"Profesora Cipariņa klubs" 2004./05. m.g.

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Kā zināms, naturāls skaitlis dalās ar 4 tad un tikai tad, kad tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. Iedomāsimies, ka mūsu meklējamie skaitļi, kam ir mazāk par 4 cipariem, papildināti ar nullēm skaitļa priekšā tā, lai iegūtu četrciparu skaitļus (piemēram, 17 vietā apskatām 0017). Apzīmēsim patvaļīgu meklējamo skaitli ar $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – cipari). Aplūkosim skaitļus no 0000 līdz 1999. Tad

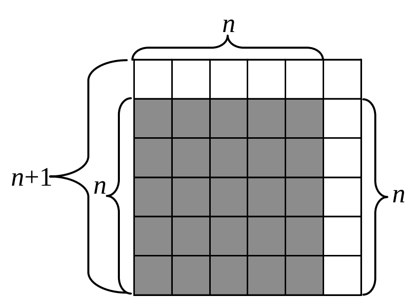
- a var pieņemt vērtības 0; 1 – skaitā divas,
- b var pieņemt vērtības 0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9 – skaitā 9,
- abu pēdējo ciparu veidotais skaitlis $\overline{cd}$ var pieņemt vērtības 00; 08; 12; 16; 20; 28; 32; 36; 52; 56; 60; 68; 72; 76; 80; 88; 92; 96 – skaitā 18 (apskatām visus divciparu skaitļus, kas dalās ar 4, un izsvītrojam no tiem tos, kas satur ciparu 4).

Katra pieļaujamā a vērtība var kombinēties ar katru pieļaujamo b vērtību un ar katru pieļaujamo $\overline{cd}$ vērtību. Iegūstam 2·9·18=324 iespējas. No tām jāatskaita ciparu virkne 0000, kas attēlo skaitli 0, un tām jāpieskaita vēl viens skaitlis – 2000. Tātad atbilde ir **324**.

2. Ievērosim, ka patvaļīgam naturālam skaitlim n pastāv vienādība

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1 \qquad \textbf{(*)}$$

(Šo rezultātu iegūst arī ģeometriski, skaitot baltās rūtiņas divu kvadrātu „starpībā”, skat. 1.zīm.)



1. zīm.

Apskatīsim vispirms izteiksmi

$$S = 2004^2 - 2003^2 + 2002^2 - 2001^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2,$$

kas no publicētās atšķiras ar vienu locekli: 2^1 ir 2^2.

No (*) pakāpeniski ievietojot n=1; 3; 5; 7; ...; 1999; 2001, 2003 iegūstam

$2^2-1^2=3$

$4^2-3^2=7$

$6^2-5^2=11$

…

$2002^2-2001^2=4003$

$2004^2-2003^2=4007$

Mums tātad jāaprēķina summa ar 1001 saskaitāmo

$$A=3+7+11+15+\ldots+4003+4007.$$

Šajā summā katrs nākošais saskaitāmais ir par 4 lielāks nekā iepriekšējais. Tiešām, ja izteiksmē $2n+1$ ievieto $n=a$ un $n=a+2$, tad

$$[2(a+2)+1]-[2a+1]=2a+5-2a-1=4$$

Tātad, uzrakstot A apgrieztā secībā, katrs nākošais saskaitāmais ir par 4 mazāks nekā iepriekšējais.

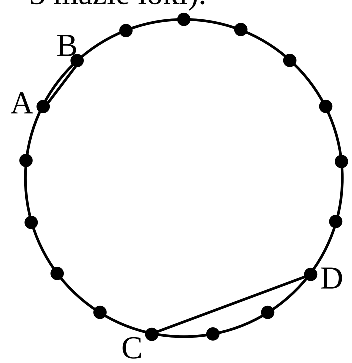
Uzrakstot summu A abos minētajos veidos:

$$\begin{aligned} A &= 3 + 7 + 11 + \ldots + 4003 + 4007 \\ A &= 4007 + 4003 + 3999 + \ldots + 7 + 3 \end{aligned} \qquad \textbf{(**)}$$

No augšminētā izriet, ka katru divu viens zem otra uzrakstīto saskaitāmo summa ir viena un tā pati, proti, 4010. Tāpēc, saskaitot abas vienādības (**) pa kolonnām, iegūstam

$2A=4010\cdot1002$, tātad $A=2005\cdot1002=2009010$. Tā kā uzdevumā dotajā izteiksmē, salīdzinot ar mūsu aplūkoto, locekļa 2^2 vietā ir 2, tad aprēķināmās izteiksmes vērtība ir A-2=**2009008**.

3. Atcerēsimies, ka vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas. Apskatāmās lauztās līnijas posmi ir hordas, kam atbilst 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 mazie loki (piem., 2. zīm. AB atbilst viens mazais loks, bet CD – 3 mazie loki).



2. zīm.

No šejienes seko, ka lauztās līnijas posmiem ir tikai 8 iespējami dažādi garumi. Tā kā šo posmu ir 17 un $17>8\cdot2$, tad kādam garumam jābūt sastopamam vairāk nekā 2 reizes, t.i., vismaz 3 reizes.

4. Apzīmēsim Jānīša uzrakstītos skaitļus ar *a*; *b*; *c*; *d*; *e*.

Tad $(a+b+c)+(a+d+e)+(b+a+c)+(b+d+e)$ kā 4 pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Bet pēc pārveidojumiem iegūstam, ka šī izteiksme ir

$$(a+b)+2(a+b+c+d+e).$$

Tā kā $2(a+b+c+d+e)$ – pāra skaitlis, tad $a+b$ arī ir pāra skaitlis. Tātad *a* un *b* paritātes ir vienādas. Līdzīgi pierāda, ka **jebkuru** divu no skaitļiem *a*; *b*; *c*; *d*; *e* paritātes ir vienādas. Ja tie visi būtu nepāra skaitļi, rastos pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. **Tātad tie visi ir pāra skaitļi.**

5. Ja A satur ciparu 0, tad tā nospiedums ir 0. Ja A satur ciparu 5 un kaut vienu pāra ciparu, tad tā nospiedums ir 0; tātad ja A nospiedums nav 0 un tas satur ciparu 5, tad A nav vairāk par 5 cipariem.

Apskatām skaitļus, kam visi cipari dažādi un kas nesatur ne ciparu 0, ne ciparu 5. Ja tiem ir 8 cipari, tad to ciparu reizinājums ir $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=72576$; šī skaitļa ciparu reizinājums dalās ar 10, tātad nospiedums būs 0. Apskatām šādus 7-ciparu skaitļus; skaidrs, ka „atmestais" cipars nav 1, citādi nospiedums nemainītos un joprojām būtu

0. Atmetot ciparu 2, 7-ciparu skaitļa ciparu reizinājums būs 1·3·4·6·7·8·9=36288, tā ciparu reizinājums – 2304, tātad nospiedums būs 0. „Atmetot” ciparu 3, 7-ciparu skaitļa ciparu reizinājums būs 1·2·4·6·7·8·9=24192, tā ciparu reizinājums – 144, tā ciparu reizinājums – 16, tā ciparu reizinājums – 6. Tātad sākotnējā skaitļa nospiedums nav 0. Skaidrs, ka lielākais no šādiem skaitļiem ir **9876421**.

„Atmetot” kādu no cipariem 9; 8; 7; 6; 4 un tā vietā lietojot 3, iegūsim mazāku skaitli. Tātad izceltais skaitlis ir uzdevuma atbilde.

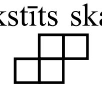
6. Apzīmēsim draudzību skaitu starp zēnu un meiteni ar d, zēnu skaitu ar z un meiteņu skaitu ar m. Tad d=3z, jo katrs zēns draudzējas ar 3 meitenēm. Līdzīgi d=3m, jo katra meitene draudzējas ar 3 zēniem. Tātad 3z=3m; tātad z=m.

B grupa

1. Ievērosim, ka no 1 līdz 64 ieskaitot ir tieši

16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 0 (tie ir skaitļi 4; 8; 12; ...; 60; 64)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 1 (tie ir skaitļi 1; 5; 9; ...; 57; 61)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 2 (tie ir skaitļi 2; 6; 10; ...; 58; 62)
16 skaitļi, kas, dalot ar 4, dod atlikumu 3 (tie ir skaitļi 3; 7; 11; ...; 59; 63)

Ievērosim arī, ka vairāku skaitļu summa dalās ar 4 tad un tikai tad, ja ar 4 dalās to atlikumu summa, kurus iegūst, šos skaitļus katru atsevišķi dalot ar 4.

Katrā 3. zīmējuma rūtiņā ierakstīts skaitlis 0; 1; 2 vai 3; katra veida rūtiņu ir tieši 16. Viegli pārbaudīt, ka katrā  tipa figūrā (arī pagrieztā vai spoguļattēlā) ierakstīto skaitļu summa dalās ar 4. Ja mēs ierakstīsim rūtiņās dažādus skaitļus no 1 līdz 64, kas dod tādus atlikumus, kādi redzami 3.zīm., iegūsim vajadzīgo.

0	3	2	1	0	3	2	1
0	3	2	1	0	3	2	1
2	1	0	3	2	1	0	3
2	1	0	3	2	1	0	3
0	3	2	1	0	3	2	1
0	3	2	1	0	3	2	1
2	1	0	3	2	1	0	3
2	1	0	3	2	1	0	3

3. zīm.

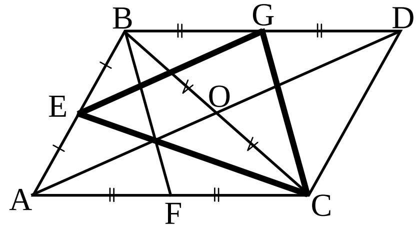
2. Viegli pārbaudīt, ka visiem *a* pastāv vienādības

$$a^2+(a+1)^2+a^2\cdot(a+1)^2=a^2+(a^2+2a+1)+a^2\cdot(a^2+2a+1)=$$
$$=a^2+(a^2+a+1)+a+a^2(a^2+a+1)+a^2\cdot a=$$
$$=(a^3+a^2+a)+(a^2+a+1)+a^2(a^2+a+1)=$$
$$=(a^2+a+1)(a+1+a^2)=(a^2+a+1)^2$$

Ievietojot *a*=2004, iegūstam:

$$2004^2+2005^2+2004^2\cdot 2005^2=(2004^2+2004+1)^2$$

3. Tā kā 4+4=8, 4+10=14, 10+10=20, tad ir vismaz viena 4 cm gara mediāna un vismaz viena 10 cm gara mediāna. Pierādīsim, ka katru divu mediānu garumu summa ir lielāka par trešās mediānas garumu. No tā sekos, ka trešās mediānas garums nav 4 cm (jo 4+4<10); tātad tas ir 10 cm.



4. zīm.

Papildinām ΔABC līdz paralelogramam ABCD ar diagonāļu krustpunktu O. Tad O ir BC viduspunkts, tātad AO ir ΔABC mediāna pret malu BC. Atzīmējam malu AB, BD, AC viduspunktus E, G, F. tad EG ir ΔABD viduslīnija, tāpēc $EG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(2AO) = AO$. Tā kā $\Delta ABC = \Delta DCB$ (*mmm*), tad CG=BF (vienādos trijstūros atbilstošās mediānas ir vienādas. Redzam, ka ΔEGC malas vienādas ar ΔABC mediānām; no tā seko vajadzīgais, jo katrā trijstūrī (tātad arī ΔEGC) katru divu malu garumu summa lielāka par trešās malas garumu.

4. a) nē, ne noteikti. Izvietosim zinātniekus pa apli un pieņemsim, ka katrs ir dzirdējis tos 5 zinātniekus, kas atrodas tieši aiz viņa pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Viegli pārbaudīt, ka nav tādu zinātnieku, kas abi būtu dzirdējuši viens otru.

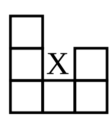
b) jā, noteikti. Ja katrs zinātnieks noklausījies 6 kolēģus, tad pavisam notikušas $6 \cdot 12 = 72$ noklausīšanās. No 12 zinātniekiem var izveidot 66 pārus (katru zinātnieku var ņemt pāri ar 11 citiem, bet skaitlis $12 \cdot 11$ jādala ar 2, jo pāri (A,B) un (B,A) ir viens un tas pats pāris). Uz šiem 66 pāriem attiecas 72 noklausīšanās. Tā kā 72>66, tad uz kādu pāri attiecas **vairāk nekā viena** noklausīšanās. Šajā pārī abi zinātnieki dzirdējuši viens otru.

5. Pieņemam, ka rūtiņas malas garums ir 1.

Atbilde. Āķos var sagriezt tos un tikai tos taisnstūrus, kam vienlaicīgi ir spēkā šādi nosacījumi: a) $m \cdot n$ dalās ar 12, b) vai nu m, vai n dalās ar 4, ne m, ne n nav ne 1, ne 2, ne 5.

Risinājums. Skaidrs, ka ne taisnstūra garums, ne platums nevar būt ne 1, ne 2, jo neviens āķis neievietojas tādā taisnstūrī. Viegli pārbaudīt, ka ne platums, ne garums nevar būt arī 5 (analizējam visas iespējas, kā varētu mēģināt aizpildīt taisnstūri, sākot no malas ar garumu 5).

Turpmāk uzskatīsim, ka ir m rindiņas, n kolonnas un ne m, ne n nav ne 1, ne 2, ne 5.



5. zīm.

Ar X apzīmēto rūtiņu sauksim par āķa centru. Skaidrs, ka katra āķa A centru aizpilda kāds cits āķis B. Acīmredzami, ka tad savukārt āķa B centru aizpilda āķis A. Tātad āķi apvienojas pa pāriem, un to skaitam jābūt pāra skaitlim. Tā kā vienā āķī ir 6 rūtiņas, tad taisnstūra rūtiņu skaitam jādalās ar 12. Pastāv 2 iespējas:

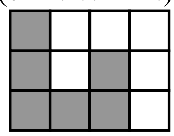
a) viens no skaitļiem m un n dalās ar 4,

b) neviens no skaitļiem m un n nedalās ar 4, bet tie abi ir pāra skaitļi.

Parādīsim, ka a) gadījumā taisnstūri var sagriezt āķos. Pastāv divi apakšgadījumi:

a1) viens no skaitļiem n un m dalās ar 3, bet otrs – ar 4.

Tad taisnstūri var sagriezt mazākos taisnstūros ar izmēriem 3×4. Tā kā katru 3×4 taisnstūri var sagriezt divos āķos (skat. 6. zīm.), vajadzīgais pierādīts.



6. zīm.

a2) viens no skaitļiem m un n dalās ar 12 (pieņemsim, ka n dalās ar 12). Atceramies, ka m≠1, m≠2, m≠5. Pierādīsim, ka m var izteikt kā tādu saskaitāmo summu, katrs no kuriem ir vai nu 3 vai 4 daudzkārtnis.

$4=4\cdot 1$

$6=3\cdot 2$

$7=3\cdot 1+4\cdot 1$

$8=4\cdot 2$

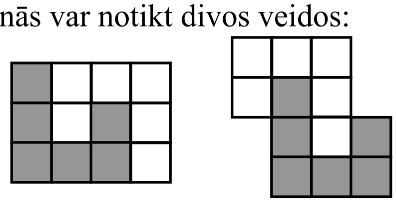
Tā 9=6+3, 10=7+3, 11=8+3, tad vajadzīgā veidā var izteikt arī 9; 10; 11. Tā kā 12=9+3, 13=10+3 un 14=11+3, tad vajadzīgā veidā var izteikt arī 12; 13; 14, utt.

Tātad apskatāmo taisnstūri var sagriezt strēmelēs, kuru platums ir n, kas dalās ar 12, bet augstums ir vai nu 3, vai 4. Skaidrs, ka katru šādu strēmeli var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 3×4, bet katru šādu taisnstūri var sagriezt āķos. Vajadzīgais pierādīts.

Tagad pierādīsim, ka b) gadījumā taisnstūri āķos sagriezt nevar. Līdz ar to uzdevums būs atrisināts.

Pieņemsim pretējo – taisnstūri izdevies sadalīt āķos.

Risinājuma sākumā mēs atzīmējām, ka āķi apvienojas pa pāriem, aizpildot viens otra centru. Šī apvienošanās var notikt divos veidos:



7. zīm.

Lai arī kā novietotu jebkuru no šiem pāriem, pastāv viena no 2 iespējām:

I) pāri satur 4 kolonnas, katrā pa 3 rūtiņām un 3 vai 4 rindiņas, katrā pa 2 vai 4 rūtiņām,

II) pāri satur 4 rindiņas, katrā pa 3 rūtiņām un 3 vai 4 kolonnas, katrā pa 2 vai 4 rūtiņām.

Ja pavisam būtu pāra skaits šādu pāru, tad kopējais rūtiņu skaits dalītos ar $12\cdot 2=24$. Tad vai nu m, vai n dalītos ar 4. Mēs apskatām gadījumu, kad ne m, ne n nedalās ar 4, tātad 7. zīmējumā attēloto pāru ir nepāra skaits. Tāpēc vai nu I, vai II tipa pāru ir nepāra skaits; varam pieņemt, ka I veida pāru ir nepāra skaits. Izkrāsosim taisnstūrī katru ceturto kolonnu melnu. **Tad kopējais melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis** (jo katra taisnstūra kolonna satur pāra skaitu melno rūtiņu). Bet katrs I veida pāris satur 3 melnas rūtiņas (tieši viena no tā četrām kolonnām ir melna), katrs II veida pāris satur pāra skaitu melno rūtiņu (katra tā kolonna satur 0, 2 vai 4 melnas rūtiņas). Tā kā I veida pāru ir nepāra skaits, secinām: **kopējais melno rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis** (nepāra skaits trijnieku un kaut kāds skaits saskaitāmo 0; 2; 4 dod summā pāra skaitli).

Pretruna starp abiem izceltajiem apgalvojumiem parāda, ka mūsu pieņēmums par sagriešanas iespējamību b) gadījumā ir nepareizs.

6. Apskatām skaitļus

32
3232
323232
32323232
...

$$\underbrace{323232323232...32}_{\text{n+1 ciparu grupa "32"}}$$

Dalām katru no šiem skaitļiem ar n ar atlikumu. Tā kā, dalot ar n, iegūtajam atlikumam iespējamas tikai n dažādas vērtības (tās ir 0; 1; 2; ...; n-1), bet apskatāmo skaitļu ir n+1 un n+1>n, tad kaut kādi divi apskatāmie skaitļi noteikti dos vienādus atlikumus, dalot ar n. tad šo skaitļu starpība dalās ar n. Ievērojam: ja abi minētie skaitļi ir $\underbrace{3232...32}_{\text{i ciparu grupas "32"}}$ un $\underbrace{3232...32}_{\text{j ciparu grupas "32"}}$, kur i>j, tad starpība (kas dalās ar n) ir

$$S=\underbrace{3232...32}_{\text{i - j grupas "32"}}\underbrace{0000...00}_{\text{2j nulles}}$$

Ievērojam, ka $S=\underbrace{3232...32}_{\text{i - j grupas "32"}}\cdot 10^{2j}$. Tā kā n nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad 10^{2j} nav nekādas nozīmes tai apstāklī, ka S dalās ar n; ar n dalās reizinātājs $\underbrace{3232...32}_{\text{i - j grupas "32"}}$. Bet šis reizinātājs ir interesants skaitlis.

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. **Atbilde**: nē, tā nevar gadīties.

Risinājums. Apskatāmo vienādojumu saknes ir: $\left(-\frac{b}{a}\right)$, $\left(-\frac{c}{b}\right)$, $\left(-\frac{d}{c}\right)$, $\left(-\frac{e}{d}\right)$ un $\left(-\frac{a}{e}\right)$. Viegli pārbaudīt, ka to reizinājums ir (-1). Bet, sareizinot skaitļus, kas atrodas **starp** (-1) un 1, atkal iegūst skaitli, kas atrodas **starp** (-1) un 1.

2. Atbilde: nē, neeksistē.

1. risinājums. Pastāv 4 iespējas:

a) x - pāra skaitlis, y – nepāra skaitlis,
b) x – nepāra skaitlis, y – pāra skaitlis,
c) x un y – abi pāra skaitļi,
d) x un y – abi nepāra skaitļi.

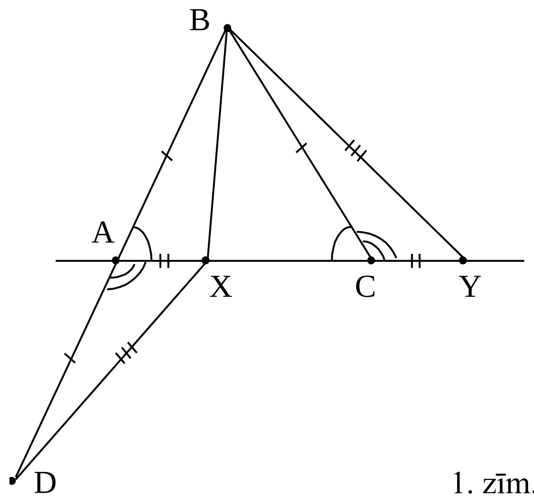
Atbilstoši šīm iespējām eksistē tādi veseli skaitļi n un k, ka

	x	y	x^2	y^2	x^2+y^2
a)	2n	2k+1	$4n^2$	$4k^2+4k+1$	$4(n^2+k^2+k)+1$
b)	2n+1	2k	$4n^2+4n+1$	$4k^2$	$4(n^2+n+k^2)+1$
c)	2n	2k	$4n^2$	$4k^2$	$4(n^2+k^2)$
d)	2n+1	2k+1	$4n^2+4n+1$	$4k^2+4k+1$	$4(n^2+n+k^2+k)+2$

No tabulas pēdējās kolonnas redzam, ka x^2+y^2, dalot to ar 4, kā atlikumu var dot 0, 1 vai 2. Bet 1003:4=250 atl.3. Tātad 1003 nevar izsacīt prasītajā formā.

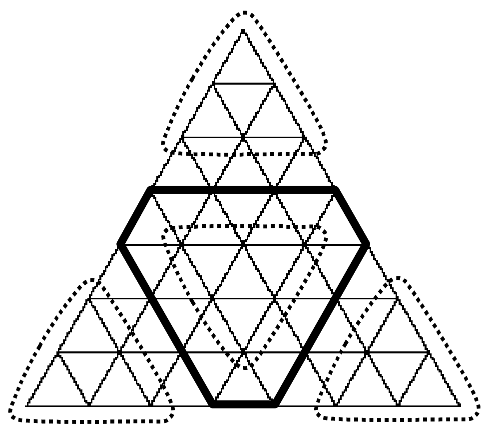
2. risinājums. Tā kā pie naturāliem x un y $x^2>0$ un $y^2>0$, tad x^2 nevar būt lielāks par 1003; tātad x^2 var pieņemt tikai vērtības no $1^2=1$ līdz $31^2=961$ (jo $32^2=1024>1003$ un pie x>32 būs $x^2>32^2=1024>1003$). Pārbaudot visas (31) vērtības (x=1; x=2; ...; x=31), nevienā gadījumā izteiksme $1003-x^2$ neiznāk naturāla skaitļa kvadrāts. (Pārbaudi izdarīt patstāvīgi.) Iegūstam, ka 1003 nav divu naturālu skaitļu kvadrātu summa.

3. Uz stara BA atliekam AD=BC. Ievērojam, ka ΔABC – vienādsānu, tāpēc $\angle BAC=\angle BCA$; tāpēc arī $\angle XAD=\angle YCB$. Iegūstam, ka $\Delta XAD=\Delta YCB$ (pazīme mlm). Tātad DX=BY. Trijstūrī BXD pastāv nevienādība BD<BX+XD, no kurienes seko BA+AD<BX+XD jeb BA+BC<BX+BY, k.b.j.



1. zīm.

4. Pirmais Andra gājiens parādīts 2. zīm. Atlikušos gājienus var izdarīt tikai četru apvilkto vienādo trijstūru iekšpusē. Andris domās apzīmē šos trijstūrus ar A, B, C, D un tālāk izmanto šādu stratēģiju:
a) ja Bruno izdara gājienu trijstūrī A, tad Andris izdara tādu pašu gājienu trijstūrī B,
b) ja Bruno izdara gājienu trijstūrī C, tad Andris izdara tādu pašu gājienu trijstūrī D.
Tā kā Andris vienmēr atjauno apgabalu (A un B) resp. (C un D) "vienādību" spēles mērķiem, bet Bruno to izjauc, tad Andrim gājienu nepietrūks. Tā kā kādam gājienu noteikti pietrūks, tad to pietrūks Bruno.



2. zīm.

5. Uzskatīsim attālumu starp diviem blakus esošiem skolēniem par 1 vienību. Katra gājiena rezultātā notiek pārvietošanās kopā par 2 vienībām. Pirmajā pozīcijā esošajam skolēnam jāpārvietojas vismaz par 7 vienībām, otrajā vietā esošajam – vismaz par 8 vienībām, trešajā vietā esošajam – vismaz par 9 vienībām, ceturtajā vietā esošajam – vismaz par 10 vienībām. (Līdzīgi izspriežam par 8., 7., 6., 5. vietās esošajiem skolēniem.) Tātad kopā jāpārvietojas vismaz par 2(7+8+9+10) = 2·34 vienībām. Tātad nepieciešami vismaz $\frac{2\cdot 34}{2}=34$ gājieni.

6. Atbilde: 1 vai 2.

Risinājums. To, ka kvadrātos var būt 1 vai 2 dažādi melno rūtiņu daudzumi, skat. 3. zīm.

x							
	x						
		x					
			x				
				x			
					x		
						x	
							x

x							
					x		
		x					
						x	
				x			
	x						
							x
			x				

3. zīm.

Pierādīsim, ka divos kvadrātos, kas saskaras tikai ar vienu stūri, melno rūtiņu daudzumi noteikti ir vienādi. Tad, tā kā a=c un b=d (skat. 4. zīm.), starp skaitļiem a, b, c, d ir 2 dažādi (ja a≠b) vai arī tie visi ir vienādi (ja a=b); tātad noteikti x=2 vai x=1.

a	b
d	c

4. zīm.

I	II
IV	III

5. zīm.

Pieņemsim, ka I kvadrātā ir a melnas rūtiņas. Lai augšējās 4 rindiņās būtu pa melnai rūtiņai, II kvadrātā jābūt (4-a) melnām rūtiņām. Lai labējās 4 kolonnās būtu pa melnai rūtiņai, III kvadrātā jābūt 4-(4-a)=a melnām rūtiņām. Tātad I un III kvadrātā melno rūtiņu daudzumi ir vienādi. Līdzīgi pierāda vajadzīgo par II un IV kvadrātu.

B grupa

1. Zēns, kuram uz krūtīm ir cipars 3, pietupstas; viņam blakus vienā pusē nostājas abi pārējie zēni. Izveidojas skaitlis 3^{14} vai 3^{41}, kas, protams, dalās ar 9.

2. Nē, neeksistē. Skat. A2 pirmo atrisinājumu. Ievērojiet, ka 2. atrisinājumā piedāvātais risināšanas ceļš šoreiz praktiski nav lietojams.

3. Figūras S laukumu apzīmēsim ar L(S). Acīmredzot L(ABC)=L(ABM)+L(ACM), no kurienes seko $\frac{1}{2}BC\cdot AG=\frac{1}{2}AB\cdot ME+\frac{1}{2}AC\cdot MF$ jeb

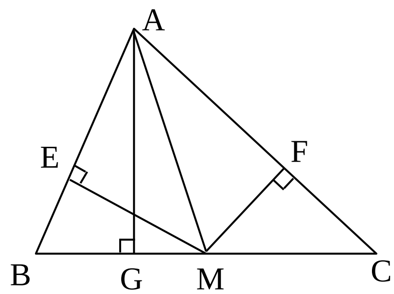
$$BC\cdot AG=AB\cdot ME+AC\cdot MF \quad (*)$$

Tā kā BC>AB un BC>AC, tad, aizstājot (*) AB un AC ar BC, iegūstam

$$BC\cdot AG<BC\cdot ME+BC\cdot MF$$

un, saīsinot ar BC,

$$AG<ME+MF, \text{ k.b.j.}$$



6. zīm.

4. Atbilde: nē, ne vienmēr.

Pieņemsim, ka sākumā uz tāfeles ir divi skaitļi, kuru starpība ir nepāra skaitlis. Pierādīsim, ka šādi divi skaitļi uz tāfeles būs vienmēr. Ja tas būs pierādīts, tad, piemēram, no situācijas 2; -1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 nevar iegūt 10 nulles.

Skaidrs, ka minētā īpašība saglabājas, visus 10 skaitļus samazinot par 1. Pieņemsim, ka minētie skaitļi pirms gājiena "3 zīmju maiņa" ir x un y. Pēc šāda gājiena šie skaitļi var kļūt par:

x un y – starpība x-y nemainās;

(-x) un (-y) – starpībai mainās tikai zīme, tāpēc tā paliek nepāra skaitlis;

-x un y – starpība kļūst par (-x)-y=(x-y)-2x, tātad joprojām paliek nepāra skaitlis;

x un –y – starpība kļūst x-(-y)=x+y=(x-y)+2y, tātad joprojām paliek nepāra skaitlis.

5. Augstākais divi skolnieki, pēdējo reizi sasnieguši rindas galu, var šajā galā palikt; citiem no turienes jāaiziet, lai atbrīvotu vietu nākošajiem. Turklāt **"atbrīvošanas"** procesā diviem skolēniem jāsper vismaz pa 1 solim, diviem – vismaz pa diviem soļiem, diviem – vismaz pa 3 soļiem (citādi nākošajiem, kas "atbrīvos" galus, nebūs, kur novietoties). Tāpēc kopā ar A5 risinājumā uzskaitītajiem soļiem jāsper vismaz 2·34+12=80 soļi, un kopā nepieciešami vismaz **40 gājieni**.

Pierādīsim, ka ar 40 gājieniem mērķis ir sasniedzams.

Apzīmējam skolēnus ar cipariem 1 2 3 4 5 6 7 8. Vispirms mainām 1 ar 2; 3; 4, pēc tam 2 ar 3; 4, pēc tam 3 ar 4. Šo 6 gājienu rezultātā 1; 2; 3; 4 ir bijuši pirmajā vietā un radusies situācija 4 3 2 1 5 6 7 8. Nākamajos 6 gājienos līdzīgi panākam, ka 5; 6; 7; 8 ir bijuši pēdējā vietā un radusies situācija 4 3 2 1 8 7 6 5. Pēc tam "nogādājam" pēdējā vietā 1, pēc tam 2, pēc tam 3, pēc tam 4; rodas situācija 8 7 6 5 1 2 3 4, un patērēti vēl 4+5+6+7=22 gājieni. Pēc tam vēl ar 6 gājieniem pakāpeniski "nogādājam" pirmajā vietā pēc kārtas 7; 6; 5. Kopā patērēti 6+6+22+6=40 gājieni.

6. Piešķiram dažām rūtiņām vērtības, kā parādīts 7. zīm. Viegli pārbaudīt: lai kā taisnstūris ar izmēriem 1x4 būtu novietots kvadrātā, tajā ierakstītais rindiņas vai vertikāles numurs dod tādu pašu atlikumu, dalot ar 4, kādu dod visu taisnstūra rūtiņu vērtību summa, dalot to ar 4. Bet visu kvadrāta rūtiņu vērtību summa ir 10·16=160, tātad dalās ar 4. Tātad ar 4 dalās arī visu taisnstūros ierakstīto rindiņu/kolonnu numuru summa.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1.		1				1				1				1		
2.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
3.		3				3				3				3		
4.		0				0				0				0		
5.		1				1				1				1		
6.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
7.		3				3				3				3		
8.		0				0				0				0		
9.		1				1				1				1		
10.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
11.		3				3				3				3		
12.		0				0				0				0		
13.		1				1				1				1		
14.	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
15.		3				3				3				3		
16.		0				0				0				0		

7. zīm.

3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

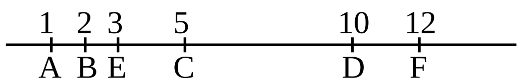
1. Atbilde: nē, nevar.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka tas iespējams. Apzīmēsim sākotnējos skaitļus ar *a, b, c* un *d*. Pēc izmaiņām Andra iegūtie skaitļi ir $\frac{11}{10}a$, $\frac{12}{10}b$, $\frac{9}{10}c$ un $\frac{8}{10}d$. Tātad Andra iegūto skaitļu reizinājums ir

$$\frac{11a}{10}\cdot\frac{12b}{10}\cdot\frac{9c}{10}\cdot\frac{8d}{10}=\frac{9504}{10000}abcd$$

Pēc uzdevuma jēgas ne *a*, ne *b*, ne *c*, ne *d* nav 0. Tāpēc $\frac{9504}{10000}abcd \neq abcd$. Tomēr, ja uz tāfeles būtu iegūti tādi paši skaitļi, kādi tur bija sākumā, tad šiem reizinājumiem būtu jāsakrīt. Iegūta pretruna.

2. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



1. zīm.

3. Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums. Sākotnēji uz tāfeles ir 1 pāra un 1 nepāra skaitlis. Ar vienu gājienu no tiem var iegūt vai nu atkal 1 pāra un 1 nepāra skaitli, vai arī 2 nepāra skaitļus. Savukārt no 2 nepāra skaitļiem, noteikti iegūst 1 pāra un 1 nepāra skaitli. Tātad nav iespējams panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos 2 pāra skaitļi.

4. Atbilde: 3.

Atrisinājums. Viegli saprast, ka ar 3 saskaitāmajiem var iztikt:

$$2004=1000+1000+4=10^3+10^3+2^2$$

Ja varētu iztikt ar diviem saskaitāmajiem, tad vismaz viens no tiem nepārsniegtu 1002. Apskatām sekojošu tabulu.

Naturālu skaitļu kvadrāti, kas nepārsniedz 1002	Naturālu skaitļu kubi, kas nepārsniedz 1002
1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 861; 900; 961	1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; 1000

Apskatot vienādojumu $x+y=2004$ un ņemot x jebkuru skaitli no šīs tabulas, redzam, ka y neiznāk ne naturāla skaitļa kvadrāts, ne kubs. Tātad ar 2 saskaitāmajiem nepietiek.

5. Atbilde: 16 konfektes.

Atrisinājums. Ja Andris izveido kaudzes, kas satur 1; 17; 33; 49 konfektes (tas ir iespējams, jo 1+17+33+49=100), tad katrās divās kaudzēs konfekšu skaiti atšķiras viens no otra vismaz par 16, un tātad jebkuras Pētera izvēles gadījumā Andris apēdīs vismaz 16 konfektes.

Pieņemsim, ka Andris izveidojis kaudzes, kurās konfekšu daudzumi ir x; y; z; t, pie tam $x \le y \le z \le t$. Ja Andris varētu garantēt sev **vairāk** par 16 konfektēm, tad noteikti jāpastāv nevienādībām

$x \ge 1$;

$y \ge x+17$, tātad $y \ge 18$;

$z \ge y+17$, tātad $z \ge 35$;

$t \ge z+17$, tātad $t \ge 52$.

Iegūstam, ka $x+y+z+t \ge 1+18+35+52=1003$ – pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6. Ja $0<a<1$, tad arī $0<a^2<1$. Tāpēc $\{a^2\}-\{a\}^2=a^2-a^2=0\neq\frac{1}{2004}$.

Ja $a=1$, tad $\{a\}=\{a^2\}=0$ un arī $\{a^2\}-\{a\}^2\neq\frac{1}{2004}$.

Apskatīsim gadījumu $1<a<2$; apzīmēsim $a=1+x$. (Tad $x=\{a\}$). Iegūstam $a^2=1+2x+x^2$. Jo mazāks a, jo mazāks x; savukārt, jo mazāks x (pie $0<x<1$), jo mazāks $2x+x^2$. Tātad, jo mazāks a, jo mazāks $2x+x^2$. Mēs meklējam **mazāko** iespējamo a; ja atradīsim tādu a pie $2x+x^2<1$, tas būs meklējamais. Bet, ja $2x+x^2<1$, tad $\{a^2\}=2x+x^2$, un iegūstam vienādojumu

$$2x+x^2-x^2=\frac{1}{2004}, \quad x=\frac{1}{4008}.$$

Viegli saprast, ka pie tāda x tiešām $2x+x^2<1$.

Tātad meklējamā a vērtība ir $1\frac{1}{4008}$.

B grupa

1. Apzīmējam $2003=x$. Tad apskatāmā izteiksme ir

$$(x+1)(x+3)^3-(x+2)\cdot x^3=(x+1)(x^3+9x^2+27x+27)-(x+2)x^3=$$
$$=x^4+9x^3+27x^2+27x+x^3+9x^2+27x+27-x^4-2x^3=$$
$$=8x^3+36x^2+54x+27=(2x+3)^3$$

Tā kā $2x+3=4009$ – vesels skaitlis, vajadzīgais pierādīts.

2. Apzīmējam skaitļus, kas uzrakstīti uz kartītēm, ar x_1, x_2, x_3, ..., x_9, pie tam tā, ka x_1 un x_2 pēdējie cipari ir dažādi. Apskatām šādas 10 izteiksmes:

x_1

x_2

x_1+x_2

$x_1+x_2+x_3$

$x_1+x_2+x_3+x_4$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$

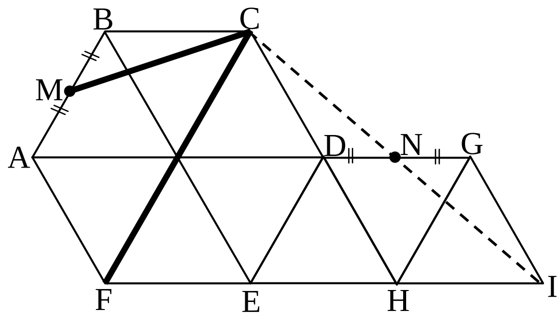
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9$

Pastāv divas iespējas:

a) tām visām pēdējie cipari ir dažādi. Tā kā summu ir 10 un dažādu iespējamu ciparu arī 10, tad šai gadījumā sastopami **visi** iespējamie cipari, tai skaitā arī 0. Tā izteiksme, kuras pēdējais cipars ir 0, dalās ar 10.

b) ir divas izteiksmes, kurām pēdējie cipari ir vienādi. (Saskaņā ar konstrukciju **tās nav x_1 un x_2**.) Šo izteiksmju starpība S beidzas ar ciparu 0, tātad dalās ar 10. Bet šo izteiksmju starpība ir kāds no skaitļiem x_1, x_2, ..., x_9 vai dažu šo skaitļu summa (piemēram, $(x_1+x_2)-x_1=x_2$; $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-(x_1+x_2)=x_3+x_4+x_5$ utt.). Tātad arī šai gadījumā vajadzīgais pierādīts.

3. Skat. 2. zīm. Ar tievām līnijām uzzīmētie 9 trijstūri visi ir vienādmalu, ABCDEF – regulārs sešstūris, M ir AB viduspunkts, N ir DG viduspunkts.



2. zīm.

Viegli saprast, ka

1) $\Delta MBC=\Delta NDC$ (*mlm*)

2) FAMC=EDNI

3) C, N, I atrodas uz vienas taisnes (jo N kā paralelograma CDIG diagonāles DG viduspunkts ir arī otras tā diagonāles DG viduspunkts ir arī otras tā diagonāles CI viduspunkts)

4) CF:FI=2:3

Tāpēc uzdevumu var veikt, piemēram, tā: sagriezt ABCDEF pa biezajām līnijām, ΔMBC novietot ΔNDC vietā, bet četrstūri FAMC – četrstūra EDNI vietā, rezultātā iegūstot ΔCFI.

4. To, ka skaitlis *y* stāv vietā, kurā jābūt skaitlim *x*, attēlosim ar $x \to y$. Tad

- tas, ka *x* stāv savā vietā, attēlojas ar x
- tas, ka *x* un *y* stāv viens otra vietā, attēlojas ar $x \leftrightarrows y$
- mums jāiegūst situācija 1 2 3 ... 100

Apskatām kādu skaitli *x*, kas nav savā vietā; pieņemsim, ka skaitļa *x* vietā *y*, t.i., $x \to y$. Šķirosim divus gadījumus:

a) skaitļa *y* vietā stāv skaitlis *x*, t.i., $x \leftrightarrows y$. Apmainām vietām *x* un *y*.

b) skaitļa *y* vietā stāv kāds skaitlis *z*, t.i., $x \to y \to z \to \ldots$. Novietojam skaitli *x* vietā, kur pašreiz ir *y*, skaitli *y* vietā, kur pašreiz ir *z*; skaitli *z* vietā, kur pašreiz ir *x*.

Gan vienā, gan otrā gadījumā **vismaz divi skaitļi** (*x* un *y*) **nonāk savās vietās**. Atkārtojam šādus gājienus, kamēr vien kāds skaitlis vēl nav savā vietā.

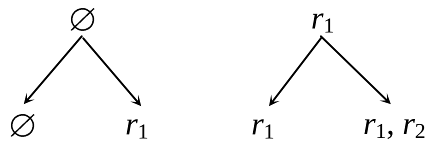
Sākumā ne vairāk kā 100 skaitļi atrodas „ne savās” vietās. Tā kā ar katru gājienu „nepareizi novietoto” skaitļu skaits samazinās vismaz par 2, tad augstākais pēc 50 gājieniem visi skaitļi būs savās vietās.

5. Atbilde: $2^9=512$ apspriedes.

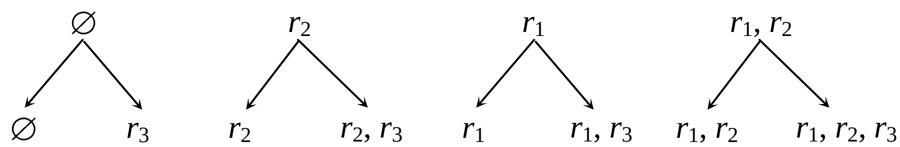
Atrisinājums. Vispirms pierādīsim šādu lemmu: no n rūķīšiem var izveidot 2^n dažādas grupas (ieskaitot grupu, kas nesatur nevienu rūķīti; apzīmēsim to ar $\varnothing$).

Ja $n=1$, iespējamas 2 jeb 2^1 grupas: $\varnothing$ un r_1.

Ja $n=2$, tad grupas var veidot sekojoši: vispirms izveidot grupu, izmantojot tikai vienu rūķīti un aizmirstot par otro, bet pēc tam šai grupai pēc mūsu izvēles vai nu pievienot, vai nepievienot otro rūķīti. Tā kā no katras „vecās" grupas rodas divas „jaunas", tad tagad grupu skaits būs divas reizes lielāks nekā viena rūķīša gadījumā, un tas būs $2^1 \cdot 2=2^2$:



Līdzīgi pie $n=3$ grupu skaits būs divas reizes lielāks nekā pie $n=2$, tātad tas būs $2^2 \cdot 2=2^3$:



Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.

Tagad pārejam pie uzdevuma atrisinājuma.

- 512 apspriedes var noorganizēt, piemēram, šādi: rūķītis r_1 piedalās visās apspriedēs, bet katrā apspriedē bez viņa piedalās cita no pārējiem 9 rūķīšiem izveidota grupa (saskaņā ar lemmu šādu grupu ir $2^9=512$)
- Ievērosim, ka visas 1024 iespējamās rūķīšu grupas var sadalīt 512 pāros tā, ka vienā pārī ieejošām grupām nav kopīgu rūķīšu, bet kopā šīs abas grupas satur visus 10 rūķīšus. Šādi pāri ir, piemēram,

$$\varnothing \text{ un } r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$$
$$r_1, r_3, r_7 \text{ un } r_2, r_4, r_5, r_6, r_8, r_9, r_{10}$$
utt.

Ja G_1 un G_2 būtu vienā pārī ietilpstošās grupas un vienā apspriedē piedalītos G_1, bet otrā G_2, tad nebūtu izpildīts uzdevuma tiešais nosacījums. Tātad no katra minētā pāra augstākais viena grupa var rīkot apspriedi. Tāpēc dažādu apspriežu nav vairāk kā minēto pāru, t.i., to nav vairāk par 512.

6. Piemēram, var izvietot skaitļus tā, kā redzams 3. zīm.: katrā rindiņā un katrā kolonnā ir viens „8", viens „2" un seši „1". Tad **katrā rindiņā** un **katrā kolonnā** ierakstīto skaitļu reizinājums, gan summa ir 16.

8	2	1	1	1	1	1	1
1	8	2	1	1	1	1	1
1	1	8	2	1	1	1	1
1	1	1	8	2	1	1	1
1	1	1	1	8	2	1	1
1	1	1	1	1	8	2	1
1	1	1	1	1	1	8	2
2	1	1	1	1	1	1	8

3. zīm.

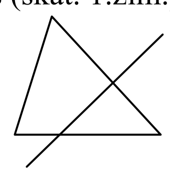
4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Pieņemsim, ka Aija nosūtīja Paijai x kartiņas. Tad Aija Maijai nosūtīja $(6-x)$ kartiņas. Tātad Maija no Paijas saņēma $10-(6-x)=4+x$ kartiņas. Tātad Paija kopā nosūtīja vismaz $4+x$ kartiņas, tātad arī saņēma vismaz $4+x$ kartiņas. Tāpēc Paija no Maijas saņēma vismaz $(x+4)-x=4$ kartiņas. Tātad Maija un Paija sasvstarpēji nosūtīja vismaz $(4+x)+4=8+x\geq 8$ kartiņas, k.b.j.

2. Tā kā a dalās ar b un $3b$ dalās ar b, tad arī $13=a-3b$ dalās ar b. Tāpēc vai nu $b=1$ (tad $a=16$), vai arī $b=13$ (tad $a=52$).

3. Novelkot 3 taisnes, viens no radušamies apgabaliem ir trijstūris. Ja ceturtā taisne to nekrusto, trijstūris saglabājas arī pēc ceturtās taisnes novilkšanas. Ja ceturtā taisne to krusto, viena no daļām ir trijstūris (skat. 1.zīm.).



1. zīm.

Līdzīgi izspriežam, ka vismaz viens trijstūris saglabājas arī pēc 5., 6., 7., 8., 9. taisnes novilkšanas.

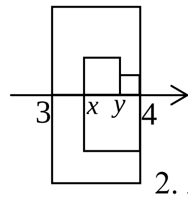
4. Ar pirmo svēršanu pārbaudām, vai „3”+„4”+„8”=„7”+„6”+„2”. Vienādības gadījumā šo atsvaru masas norādītas pareizi, un kļūda ir uz atsvara „1” vai „5”. Kura no šīm masām norādīta nepareizi, noskaidrojam, salīdzinot „1”+„4” ar „5”. Ja pirmajā svēršanā smagāks izrādījās svaru kauss ar atsvariem „3”, „4” un „8”, tad nepareizi uzrādīta viena no šīm masām. Kura – noskaidrojam otrajā svēršanā salīdzinot „3”+„5” ar „8”.

Ja pirmajā svēršanā smagāks izrādījās svaru kauss ar atsvariem „2”, „6” un „7”, tad nepareizi norādīta viena no šīm masām. Kura – noskaidrosim otrajā svēršanā salīdzinot „2”+„5” ar „7”.

5. Uzdevuma apgalvojums ir nepareizs. Plkst. 15^{00} pareizi ejoša pulksteņa minūšu rādītājs atpaliek no stundu rādītāja par piecpadsmit minūšu iedaļām. Pēc tam tas tuvojas stundu rādītājam, apsteidz to un atkal sāk tuvoties tam „no aizmugures”. Šajā posmā (līdz plkst. 16^{00}) minūšu rādītāja atpalicība no stundu rādītāja samazinās no 60 minūšu iedaļām līdz 20 minūšu iedaļām. Tātad no plkst. 15^{00} līdz plkst. 16^{00} nav tāda brīža, kad minūšu rādītāja atpalicība no stundu rādītāja būtu starp 15 un 20 minūšu iedaļām. Ja rādītāji ir „sastinguši” tādā leņķī (piemēram, plkst. 16^{01}), tad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

6. 1.atrisinājums. No dotā seko, ka $0\leq|4-x|\leq 1$, $|x-y|\leq 1$ un $0\leq|4-y|\leq 1$. Varam uzskatīt, ka $x\leq y$ (otrā gadījumā $y>x$ spriedums ir līdzīgs). Tad $(4-x)^2\leq 4-x$, $(x-y)^2\leq y-x$ un $(4-y)^2\leq 4-y$, tāpēc $(4-x)^2+(4-y)^2+(x-y)^2\leq 4-x+4-y+x-y=8-2y\leq 2$, jo $y\geq 3$.

2.atrisinājums. Atkal pieņemam, ka $x\leq y$. Skat. 2.zīm., salīdzinot abu „lielo” kvadrātu laukums ar 3 „mazo” kvadrātu laukumiem.



2. zīm.

B grupa

1. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt.

Katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 4 un nav lielāka par 8; tāpēc tā ir 5, jo citi skaitļi šajās robežās ar 5 nedalās. Tā kā tabulā ir 7 kolonnas, tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summas ir $5 \cdot 7 = 35$.

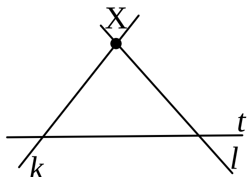
Katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 7 un nav lielāka par 14, tātad tā ir 10. Tāpēc visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $10 \cdot 4 = 40$.

Iznāk, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir gan 35, gan 40. Tā ir pretruna, tātad tādas tabulas nav.

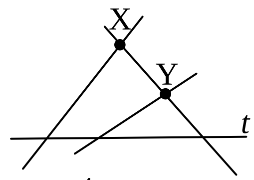
2. Meklējamā skaitļa n lielākais dalītājs ir viņš pats. Apzīmēsim otro lielāko un trešo lielāko dalītāju attiecīgi ar x un y, $x>y$. No $x+y=499$ seko, ka viens no skaitļiem x un y ir nepāra, bet otrs – pāra. Tātad n – pāra skaitlis, jo dalās ar pāra skaitli.

Viegli pārbaudīt, ka 499 ir pirmskaitlis. Tā kā $x+y=499$, tad skaitļu x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 1 (ja tas būtu kāds $d>1$, tad arī 499 dalās ar d – pretruna). Tāpēc n dalās ar $x \cdot y$. Tā kā viens no x un y – pāra skaitlis, tad $\frac{x \cdot y}{2}$ ir naturāls skaitlis, un n dalās arī ar $\frac{xy}{2}$. Pie $x>2$ un $y>2$ pastāvētu nevienādības $\frac{xy}{2} > x$ un $\frac{xy}{2} > y$, tāpēc ne x, ne y nebūtu skaitļa n otrais lielākais dalītājs (jo dalītāji xy un $\frac{xy}{2}$ būtu lielāki par x un y). Tāpēc vai nu $x=2$, vai $y=2$. Ja $x=2$, tad $y=1$ (jo $x>y$), bet tā nevar būt, jo $x+y=499$. Tāpēc $y=2$ un $x=499-2=497$. Pēc iepriekšējā n noteikti dalās arī ar $2 \cdot 497=994$. Tāpēc $n=994 \cdot k$, $k=1, 2, 3, \ldots$. Ja būtu $k>1$, tad 497 nebūtu skaitļa n otrais lielākais dalītājs, jo n dalītos gan pats ar sevi, gan ar 994. Tāpēc nav citu iespēju kā vien (varbūt) $k=1$ un $n=994$. Pārbaudot šo iespēju, redzam, ka tā neder, jo skaitļa 994 otrais un trešais lielākais dalītājs ir attiecīgi 497 un 71. Tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

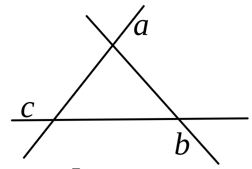
3. Izvēlamies vienu taisni t. Apskatām visus citu taišņu krustpunktus, kas atrodas ārpus t vienā pusē no t; izvēlamies to krustpunktu, kas atrodas vistuvāk t. Ja šo krustpunktu X veido taisnes k un l, tad taisnes t, k un l veido plaknes apgabalu – trijstūri, kuru citas taisnes sīkākos apgabalos nesadala. Tiešām, ja kāda taisne h krustotu šo trijstūri, tad tai būtu jākrusto vai nu k, vai l kādā punktā Y, kas ir tuvāk taisnei t nekā punkts X. Tā būtu pretruna ar to, kā izvēlējāmies X (skat. 4.zīm.).



3. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

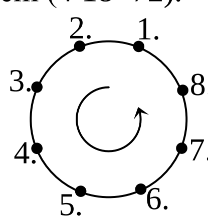
Sauksim šādu trijstūri par **derīgu taisnei *t***. Ja abās pusēs taisnei t ir citu taišņu krustpunkti, varam atrast divus trijstūrus, kas derīgi taisnei t – pa vienam katrā pusē.

Pierādīsim, ka augstākais divas no apskatāmajām 9 taisnēm ir tādas, kam vienā pusē nav citu taišņu krustpunktu.

Pieņemsim, ka esam atraduši 3 tādas taisnes a, b, c. Apskatām a, b, c veidoto trijstūri. Viegli pārbaudīt: lai kā censtos novilkt ceturto taisni d, tā krusto vismaz vienas trijstūra malas pagarinājumu (nevis pašu malu), un tāpēc kādai no taisnēm a, b, c abās pusēs atrodas citu taišņu krustpunkti – pretruna.

Tātad ≥ 7 taisnēm ir vismaz pa 2 derīgiem trijstūriem un ≤ 2 taisnēm – vismaz pa vienam. Kopīgais „derīgumu” skaits ir vismaz $7 \cdot 2+2=16$. Ievērosim, ka katrs nesadalīts trijstūris ir derīgs trim taisnēm. Ja šādu trijstūru būtu ≤ 5, tad „derīgumu” skaits būtu $\leq 5 \cdot 3=15$ – pretruna. Tātad nesadalīto trijstūru ir vismaz 6, k.b.j.

4. Skaidrs, ka 2., 4., 6., 8. rūķīšiem pēc 1000 minūtēm zelta gabalu vispār nav, jo visi 72 zelta gabali ir 1., 3., 5., 7. rūķīšiem ($4 \cdot 18=72$).



6. zīm.

Pieņemsim, ka kāds rūķītis nav devis nevienu zelta gabalu rūķītim no sevis pa labi. Tad šis rūķītis ir 1., 3., 5. vai 7. rūķītis (jo viņa zelta gabalu skaits nav samazinājies, tātad nevar kļūt 0). Varam pieņemt, ka tas ir 1. rūķītis. Tad viņš no 8. rūķīša ir saņēmis tieši 18-9=9 zelta gabalus, t.i., visus zelta gabalus, kas 8. rūķītim bija sākumā. Tā kā 8. rūķītim beigās nav neviena zelta gabala, tad 7. rūķītis viņam neko nav devis. Līdzīgi turpinot, iegūstam: 2., 4., 6., 8. rūķīši ir atdevuši visus savus zelta gabalus un neko nav saņēmuši. Tātad pavisam zelta gabali ir doti $9 \cdot 4=36$ reizes. Bet saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, tas ir noticis 1000 reizes. Iegūta pretruna, tātad tāda rūķīša, kurš nav devis nevienu zelta gabalu, nav.

5. No katra stienīša garākais iegūtais gabals nav īsāks par 20 cm (jo $1\text{m}:5=20\text{cm}$). Apskatām šos piecus gabalus; apzīmēsim to garumus centimetros ar a, b, c, d, e. Varam pieņemt, ka $a \leq b \leq c \leq d \leq e$; skaidrs, ka $20 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e < 100$.

Tā kā $a \geq 20$, $b \geq 20$ un $c \geq a$, $c \geq b$, tad no gabaliem a, b, c nevar izveidot trijstūri tikai tad, ja $c \geq a+b$. Tātad $c \geq 40$. Līdzīgi pieņemot, ka trijstūri nevar izveidot ne no b, c, d, ne no c, d, e, iegūstam $d \geq b+c \geq 20+40=60$ un $e \geq c+d \geq 40+60=100$ – pretruna.

6. Pieņemsim pretējo. Tad neviena rindiņa (un neviena kolonna) nesastāv pilnībā no nenokrāsotām rūtiņām. Katrā rindiņā (un katrā kolonnā) nokrāsota tieši viena rūtiņa. Ņemsim rūtiņu R, kas nokrāsota pirmajā kolonnā. Nenokrāsotās rūtiņas, kas ir vienā rindiņā ar R, veido prasīto taisnstūri.

5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

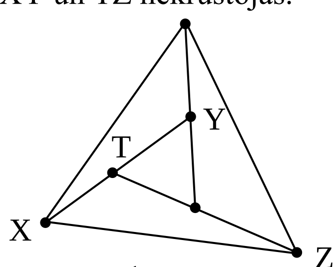
A grupa

1. Nē, neeksistē. Ja n būtu 3 vai mazāk cipari, tad n^2 būtu ne vairāk par 6 cipariem. (Tiešām, ja n nav vairāk par 3 cipariem, tad n<1000; tāpēc n^2<1000·1000, tātad n^2<1000000.) Tad n un n^2 **kopā nav vairāk par 9 cipariem.** Ja turpretī n ir 4 vai vairāk cipari, tad n^2 ir vismaz 7 cipari (pierāda līdzīgi). Tad n un n^2 **kopā ir vismaz 11 cipari.** Bet dažādu ciparu pavisam ir 10.

2. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas iespējams. Apzīmēsim pēc kārtas uzrakstītos skaitļus ar A, B, C, D, E. Tad katra no attiecībām $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}, \frac{D}{E}$ un $\frac{E}{A}$ ir vai nu pirmskaitlis, vai pirmskaitlim apgriezts skaitlis. Šo attiecību reizinājums ir $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{E}{A} = 1$. Tātad 1 izsacīts kā piecu tādu reizinātāju reizinājums, katrs no kuriem ir pirmskaitlis vai pirmskaitlim apgriezts skaitlis. Tā kā reizinājuma vērtība ir 1, tad skaitītājā esošo pirmskaitļu reizinājums vienāds ar saucējā esošo pirmskaitļu reizinājumu, un šo pirmskaitļu pavisam ir pieci. Tātad skaitītājā un saucējā ir **vienādi skaitļi**, kas satur dažādu daudzumu reizinātāju – pirmskaitļu (starp šiem pirmskaitļiem var būt vienādi). Tā ir pretruna, jo katram skaitlim eksistē tikai viens sadalījums reizinātājos – pirmskaitļos (ar precizitāti līdz reizinātāju kārtībai).

3. Piemēram, skat. 1. zīm. Jāatceras: divi nogriežņi krustojas tad, ja tiem ir kopējs **iekšējs** punkts. Tāpēc, piemēram, XY un TZ nekrustojas.

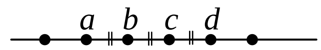


1. zīm.

4. Ja uz visām kartiņām uzrakstītie skaitļi ir vienādi, tad uzdevuma nosacījumi izpildās.

Ja eksistē vismaz divi atšķirīgi skaitļi, tad katrs no tiem var būt uzrakstīts tikai uz vienas kartiņas. Pieņemsim, ka tā nav: ir vismaz divas kartītes, uz kurām uzrakstīts skaitlis a. Tā kā ir uzrakstīti vismaz divi dažādi skaitļi, starp tiem atrodam tādu skaitli b, ka starp a un b nav citu uzrakstīto skaitļu (piemēram, uzrakstām visas vērtības augošā secībā un izvēlamies a blakusesošo vērtību). Pieņemsim, ka $a<b$ (gadījumā $b<a$ pierādījums līdzīgs). Skaidrs, ka $a < \frac{a+a+b}{3} < b$. Saskaņā ar a un b izvēli skaitlis $\frac{a+a+b}{3}$ nav uzrakstīts ne uz vienas no kartiņām, iegūta pretruna.

Tātad, ja uzrakstītas vismaz divas atšķirīgas vērtības, pie tam katra no tām uzrakstīta tikai uz vienas no kartiņām, tad uz visām kartiņām jābūt uzrakstītiem dažādiem skaitļiem. Izrakstīsim šos skaitļus augošā secībā un izvēlamies trīs pēc kārtas sekojošus, piem. a, b, c (skat. 2. zīm.)



2. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem seko, ka $\frac{a+b+c}{3}=b$, tātad $a+b+c=3b \Rightarrow a+c=b+b$ $\Rightarrow b\text{-}a=c\text{-}b=w$ jeb $b=a+w$ un $c=a+2w$. Apskatot skaitļus b, c, d, līdzīgi iegūstam $\frac{b+c+d}{3}=c \Rightarrow c\text{-}b=d\text{-}c=w$ un $d=c+w=a+3w$.

Izvēloties skaitļus a, b, d, to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{a+b+d}{3}=\frac{a+(a+w)+(a+3w)}{3}=\frac{3a+4w}{3}=a+\frac{4}{3}w.$$

Bet $b<a+\frac{4}{3}w<c$, tātad tas nav uzrakstīts ne uz vienas no kartiņām – pretruna.

5. Atzīmēsim, ka $4865 \cdot 2=9730$ un četrciparu skaitļos 4865 un 9730 visi cipari ir dažādi. Tātad meklējamais lielākais kopīgais dalītājs varbūt ir 4865. Mēģināsim atrast lielāku vērtību.

Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar a un b, bet to lielāko kopīgo dalītāju ar d; tad $a=a_1d$, $b=b_1d$ un skaitļu a_1 un b_1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Varam uzskatīt, ka $a>b$, tātad $a_1>b_1$ (skaidrs, ka $a_1 \neq b_1$). Tāpēc $a_1 \geq 2$.

Ja $a_1>2$, tad $d<4865$, jo $a_1 \cdot d$ ir četrciparu skaitlis. Tāpēc $a_1=2$, $b_1=1$, $a=2d$ un $b=d$. Mums jāpārbauda, vai var būt $\mathbf{4865<b<5000}$ (ja $b \geq 5000$, tad a nebūs četrciparu skaitlis), turklāt skaitļos b un $2b$ visiem 8 cipariem jābūt dažādiem. To visvieglāk izdarīt, pārbaudot visas hipotētiskās b vērtības (jāpārbauda tikai tās, kurās nav vienādu ciparu). Izrādās, ka neviena no tām neder.

Tātad meklējamā vērtība ir **4865**.

6. Skaidrs, ka procesa attīstība atkarīga tikai no tā, **uz kuru pusi** katrā brīdī skatās 1., 2., 3., ..., 30. pirmklasnieks, nevis no tā, **kurš** pirmklasnieks stāv 1, 2., 3., ..., 30. vietā. Iedomāsimies, ka 2 pirmklasnieki, kas skatās viens uz otru, nevis apgriežas, bet sper soli viens otram pretī un tādējādi samainās vietām. Skaidrs, ka šajā procesā ik pēc sekundes jebkurā vietā stāvošais pirmklasnieks skatās uz to pašu pusi, uz kuru skatās šajā vietā stāvošais pirmklasnieks uzdevumā aprakstītajā procesā.

Bet ir skaidrs, ka mūsu aprakstītajā procesā neviens pirmklasnieks nespers vairāk par 29 soļiem. Tātad kustība noteikti beigsies. Tātad tā beigsies arī uzdevumā aprakstītajā procesā.

B grupa

1. Patvaļīga naturāla skaitļa x ciparu skaitu apzīmēsim ar S(x). Tā kā $S(10)+S(10^2)+S(10^3)=2+3+4=9<10$ un $S(100)+S(100^2)+S(100^3)=3+5+7=15>10$, un $S(a)+S(a^2)+S(a^3) \leq S(b)+S(b^2)+S(b^3)$, ja $a<b$, secinām: ja meklējamais skaitlis n eksistē, tad $10<n<100$. Tātad n ir divciparu skaitlis: $S(n)=2$. Tāpēc jābūt $S(n^2)+S(n^3)=8$. Ja $S(n^2) \geq 4$, tad $S(n^3) \geq 5$ ($n^3=n^2 \cdot n$, un reizinot divciparu skaitli n ar vismaz četru ciparu skaitli n^2, iegūst vismaz piecu ciparu skaitli) – tā nevar būt, jo tad $S(n^2)+S(n^3) \geq 9$. Tā kā $S(n)=2$, tad $S(n^2) \geq 3$; tāpēc $S(n^2)=3$. Tad no $S(n^2)+S(n^3)=8$ seko $S(n^3)=5$.

Tā kā $S(32^2)=S(1024)=4$, jābūt $n \le 31$; tā kā $S(20^3)=S(8000)=4$, jābūt $n \ge 21$. Tāpēc $21 \le n \le 31$. Pārbaudot šīs 11 n vērtības, redzam, ka neviena no tām neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tāpēc tāda n nav.

2. Atbilde: nē, nevar.

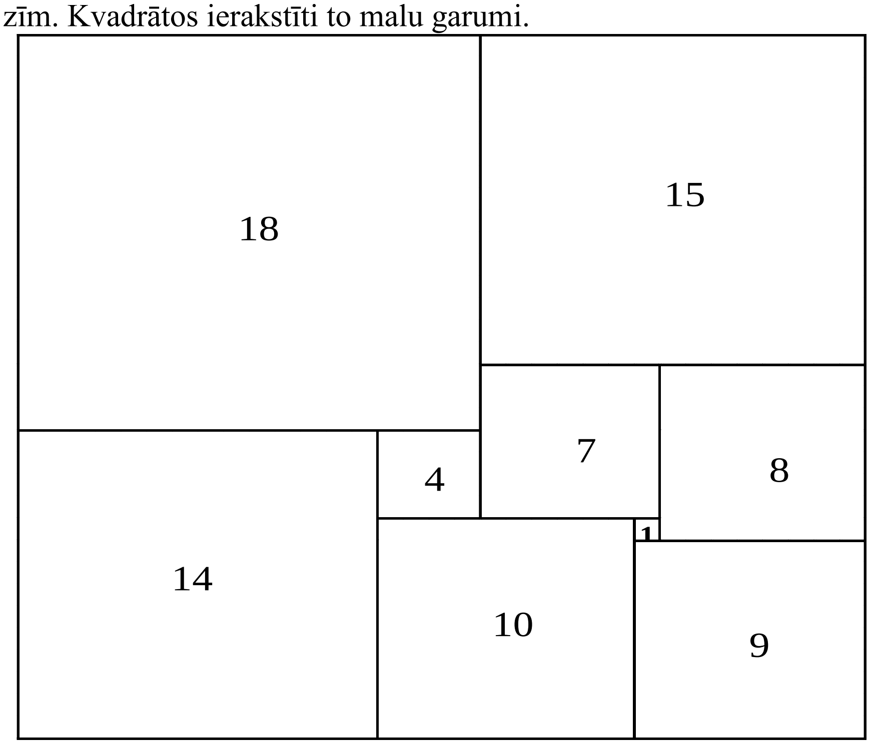
Risinājums. Abās vienādības pusēs kopā atrodas visas iespējamās pa pāriem ņemtu skaitļu *a, b, c, d, e* starpības (neņemot vērā to, kuru skaitli no kura atņem). Tāpēc

$$\left|(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)(a-c)(b-d)(c-e)(d-a)(e-b)\right| =$$
$$= \left|(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(2-3)(2-4)(2-5)(3-4)(3-5)(4-5)\right| =$$
$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 288$$

No otras puses, ja pastāvētu uzdevumā minētā vienādība, tad jābūt $A^2=288$, kur A – vienādības kreisās (tāpat arī labās) puses vērtība. Skaidrs, ka A ir vesels skaitlis, jo iegūts kā veselu skaitļu reizinājuma modulis. Bet 288 nav vesela skaitļa kvadrāts – tas atrodas starp divu viens otram sekojošu veselu skaitļu kvadrātiem: $16^2=256<288<289=17^2$.

Tātad uzdevumā minētā vienādība nevar pastāvēt.

3. Skat. 3. zīm. Kvadrātos ierakstīti to malu garumi.



3. zīm.

4. To, ka var iztikt ar 9 atslēgām, redzam 4.zīm. Ja uz darbu atnāk C, D un E, viss kārtībā: visas vajadzīgās atslēgas pieejamas. Ja viens vai divi no C, D, E darbā neierodas, tad viņu vietā atnākuši tikpat daudz sargi ar visām atslēgām, un lādi joprojām var atvērt.

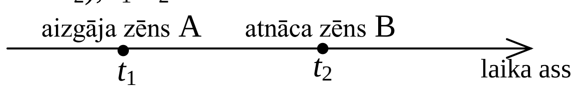
Pierādīsim, ka ar 8 atslēgām nepietiek. Ja izgatavotas 8 (vai mazāk) atslēgas, tad kādai no 3 slēdzenēm izgatavotas ne vairāk par 2 atslēgām. Tātad vismaz 3 sargiem nav atslēgu no šīs slēdzenes. Ja darbā ierodas tieši šie 3 sargi, lādi atvērt nevar.

Sargs / Atslēga	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1.	x	x	x		
2.	x	x		x	
3.	x	x			x

4. zīm.

5. Var atrast skaistuli A, kuru apskauž ne vairāk kā viena cita. Izvēlamies A un no tālākās apspriešanas izslēdzam gan to skaistuli, kuru apskauž A, gan to skaistuli, kura apskauž A (ja tādas ir). Paliek vismaz 25 skaistules, ne apskauž A, ne tiek apskaustas no A puses. Ar šīm 25 skaistulēm rīkojamies līdzīgi; paliek 22 skaistuļu grupa. Līdzīgi, atstājot grupas, kurās ir 19; 16; 13; 10; 7; 4; 1 skaistule, atrodam 9 skaistules, kuras viena otru neapskauž. Skaidrs, ka tām var pievienot pēdējo palikušo skaistuli.

6. Pieņemsim, ka nebija tāda brīža, kad visi zēni vienlaicīgi atradās sarīkojumā. Tas nozīmē, ka pirmais aizgājušais zēns aizgāja agrāk (brīdī t_1), nekā atnāca pēdējais atnākušais zēns (brīdī t_2); $t_1<t_2$.

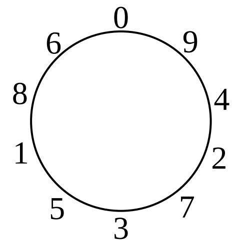


Tā kā A satika visas meitenes, tad visas meitenes ieradās sarīkojumā ne vēlāk kā brīdī t_1. Tā kā arī B satika visas meitenes, tad neviena meitene neaizgāja pirms brīža t_2. Tātad laika intervālā no t_1 līdz t_2 visas meitenes vienlaicīgi sarīkojumā.

6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Jā, var. skat. 1.zīm.

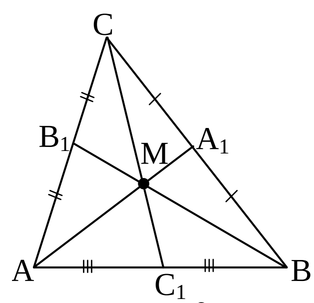


1. zīm.

2. Piemērs a=1; b=4; c=9 parāda, ka **visi** šie skaitļi var būt kvadrāti. Piemērs a=2; b=8; c=32 (tad $ab=16=4^2$, $ac=64=8^2$, $bc=256=16^2$) parāda: var gadīties, ka **neviens** no šiem skaitļiem nav kvadrāts. Pierādīsim, ka citu iespēju nav.

Atceramies: skaitlis ir kvadrāts tad un tikai tad, ja katru pirmskaitli, ko tas vispār satur kā reizinātāju, tas satur pāra skaitu reižu. Ja, piemēram, a ir kvadrāts un $a \cdot b$ ir kvadrāts, tad gan a, gan ab katru pirmskaitli satur kā reizinātāju pāra skaitu reižu. Ja a kādu pirmskaitli p satur ar kāpinātāju α (varbūt $\alpha=0$) un ab šo pašu pirmskaitli satur ar kāpinātāju β, tad $b=\frac{ab}{a}$ šo pirmskaitli satur ar kāpinātāju $\beta-\alpha$; tā kā α un β ir pāra skaitļi, tad $\beta-\alpha$ arī ir pāra skaitlis. No šejienes seko, ka arī b ir kvadrāts. Līdzīgi pierāda, ka c ir kvadrāts. Tātad, ja kvadrāts ir kaut viens no skaitļiem a; b; c, tad kvadrāti ir arī abi pārējie.

3. Augstumu pret malu AB apzīmēsim ar h.



2. zīm.

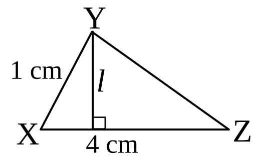
Tad $L(ACC_1)=\frac{1}{2}AC_1\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}AB\right)\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}AB\cdot h\right)=\frac{1}{2}L(ABC)$.

Augstumu pret malu CC_1 trijstūrī ACC_1 apzīmēsim ar t. Tad

$$L(AMC_1)=\frac{1}{2}MC_1\cdot t=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}CC_1\right)\cdot t=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}CC_1\cdot t\right)=\frac{1}{3}L(ACC_1)=\frac{1}{6}L(ABC)$$

(izmantojām to, ka mediānas krustpunktā dalās attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes). No šejienes seko, ka mediānas sadala trijstūri 6 daļās ar vienādiem laukumiem.

Katram šādam trijstūrim viena mala ir $\frac{1}{3}$ no vienas mediānas, bet otra mala ir $\frac{2}{3}$ no citas mediānas. Tātad trijstūrī ABC viena no 6 minētajām daļām ir trijstūrītis, kura divu malu garumi ir 1 cm un 4 cm.

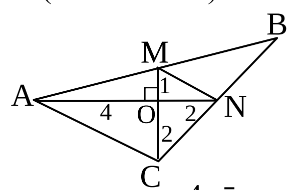


3. zīm.

Tā kā l≤1 cm (slīpne garāka par perpendikulu), tad

$L(XYZ) = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot l \le \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$. No augstāk minētā seko, ka $L(ABC)=6L(XYZ) \le 6 \cdot 2\ \text{cm}^2=12\ \text{cm}^2$.

Skaidrs, ka $L(ABC)=12\ \text{cm}^2$, ja minētās 3 cm un 6 cm garās mediānas ir savstarpēji perpendikulāras. Tas ir iespējams (skat. 4. zīm.).



4.zīm.

Tiešām, konstruējam AN=6 cm, MC=3 cm tā, lai tie krustotos punktā O, kas dala AN un CM attiecībās 2:1. No tā, ka OM:ON=OC:OA, seko, ka ΔMON~ΔCOA. Tāpēc $MN = \frac{1}{2}AC$ un ∠MNO=∠CAO, tātad MN||AC pēc iekšējiem šķērsleņķiem. Tāpēc ΔBMN~ΔBAC ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$. Tātad M un N ir attiecīgi AB un CB viduspunkti un AN un CM ir ΔABC mediānas.

Esam pierādījuši, ka

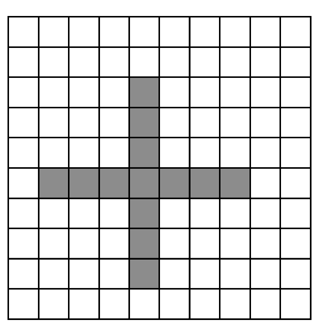
a) laukums nevar būt lielāks par 12 cm^2,

b) laukums var būt tieši 12 cm^2.

Tātad lielākā iespējamā laukuma vērtība ir 12 cm^2. Skaidrs, ka L(ABC)>0.

Atbilde: $0\ \text{cm}^2 < L(ABC) \le 12\ \text{cm}^2$.

4. Skat., piem., 5.zīm.


5.zīm.

5. Viegli pārbaudīt, ka der, piemēram, a=803; b=801; c=199; d=202. Ir arī daudzi citi atrisinājumi.

6. Tā kā $\frac{2005}{2^{2005}}=\frac{2005\cdot 5^{2005}}{10^{2005}}$, pietiek atrast trešo ciparu no beigām skaitlī $2005\cdot 5^{2005}$.

Viegli pārbaudīt, ka

5^1=...005
5^2=...025
<u>5^3=...125</u>
5^4=...625
<u>5^5=...125</u>

Redzam, ka 5^3 trīs pēdējie cipari sakrīt ar 5^5 pēdējiem trim cipariem. Tā kā $5^{n+1}=5^n\cdot 5$, tad 5^{n+1} pēdējie trīs cipari atkarīgi tikai no 5^n trim pēdējiem cipariem. Tāpēc arī 5^7; 5^9; ...; 5^{2001}; 5^{2003}; 5^{2005} trīs pēdējie cipari būs ...125. Tā kā $005\cdot 125=625$, tad meklējamais cipars ir 6.

B grupa

1. Nē. Kaut kur uz riņķa līnijas jābūt skaitlim 0. Pārējos skaitļus var sadalīt grupās pa trim viensotram sekojošiem skaitļiem. Ja prasītais būtu iespējams, visu uzrakstīto skaitļu summa nepārsniedz $0+3\cdot 14=42$. Bet šī summa ir $0+1+2+...+8+9=45$ – pretruna.

2. Apzīmēsim šos saskaitāmos ar x; y; z. Tad eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka

$$\frac{x}{n}=\frac{y}{n+1}=\frac{z}{n+2}=\frac{x+y+z}{3n+3}=\frac{180}{3n+3}=\frac{60}{n+1}.$$

No šejienes seko, ka y==60, $x=\frac{60\cdot n}{n+1}$, $z=\frac{60\cdot(n+2)}{n+1}$. Tā kā n un n+1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad, lai x būtu naturāls skaitlis, 60 jādalās ar n+1 (šis nosacījums ir arī pietiekams, lai x; y; z visi būtu naturāli). Skaidrs, ka $n+1\geq 2$. Skaitļa 60 dalītāji, kas nav mazāki par 2, ir 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60. Tātad ir 11 uzdevumā minētie sadalījumi.

3. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Pieņemsim, ka apskatāmais četrciparu skaitlis ir $x=\overline{abcd}=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d=(1000a+10c+d)+98b+2b$. Padomāsim, kā mainās x atlikums, dalot ar 7, ja b palielina par 1 (aizmirsīsim, ka b ir cipars, un apskatīsim b – jebkuru veselu skaitli). Saskaitāmais $1000a+10c+d$ nemainās, tāpēc nemainās arī tā atlikums, dalot ar 7. Saskaitāmais $98b$ dalās ar 7 neatkarīgi no b vērtības, jo $98=7\cdot 14$. Saskaitāmais $2b$ palielinās par 2. Iegūstam situāciju, kas attēlota tabulā:

x atlikums, dalot ar 7, pirms b palielināšanas	x atlikums, dalot ar 7, pēc b palielināšanas
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	0
6	1
0	2

1	3
...	...

No šīs tabulas redzam, kādas *b* izmaiņas novestu pie summas x=(1000a+10c+d)+98b+2b, kas dalās ar 7:

x atlikums, dalot ar 7, pirms b izmaiņas	b izmaiņa
1	palielināt par 3 vai samazināt par 4
2	palielināt par 6 vai samazināt par 1
3	palielināt par 2 vai samazināt par 5
4	palielināt par 5 vai samazināt par 2
5	palielināt par 1 vai samazināt par 6
6	palielināt par 4 vai samazināt par 3

Skaidrs, ka jebkuram **ciparam** *b* katrā gadījumā var veikt vismaz vienu no norādītajām operācijām tā, lai rezultāts arī būtu cipars.

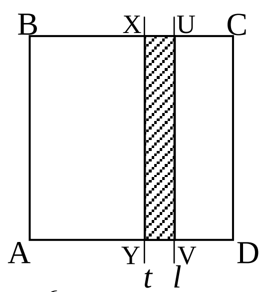
Vajadzīgais pierādīts.

4. Apskatāmajam skaitlim būtu jābūt formā ...6...6...$\underline{4}$...2...2... , kur pasvītrotais četrinieks ir vienīgais; tas tātad paliek, gan iegūstot 664, gan iegūstot 422. Iegūstot 664, kreisajā pusē no 4 jānodzēš vienāds skaits pāra un nepāra ciparu; iegūstot 422, kreisajā pusē jānodzēš vēl 2 sešinieki, tātad kreisajā pusē no 4 sākumā ir par diviem pāra cipariem vairāk nekā nepāra. Tāpēc iegūt 422 vispār nav iespējams.

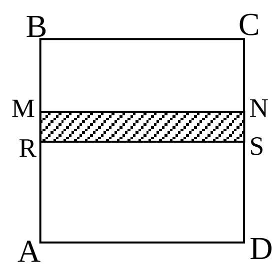
Tātad tāds skaitlis nevar saturēt tikai vienu ciparu 4.

5. Atbilde: nē.

Risinājums. Apskatām pēc kārtas 1., 2., 3., ... vertikālo līniju kvadrāta rūtiņu režģī (no kreisās uz labo pusi). Atzīmējam **pēdējo** no tām līnijām, no kurām pa labi ir vismaz 10 atzīmētās rūtiņas. Skaidrs, ka šī līnija nav kvadrāta labās puses robeža (bet var būt kreisās puses robeža). Apzīmēsim šo līniju ar *t*. Tātad pa labi no nākošās līnijas *l* jau ir mazāk par 10 atzīmētām rūtiņām. Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem ABUV satur vismaz 10 atzīmētas rūtiņas. Tātad gan taisnstūrī ABUV, gan taisnstūrī XCDY ir vismaz 10 atzīmētas rūtiņas (6. zīm.).



6. zīm.



7. zīm.

Līdzīgi atrodam tādu horizontālu rūtiņu rindu, ka katrā no taisnstūriem AMND un BCSR ir vismaz 10 atzīmētas rūtiņas.

Saskaitīsim atzīmēto rūtiņu daudzumu visos minētajos taisnstūros. Summa ir ≥40. Katra atzīmētā rūtiņa, izņemot iesvītrotās rindas un kolonnas „krustpunktā" esošo (ja tā ir atzīmēta), ieskaitīta ne vairāk kā 3 reizes; „krustpunktā esošā rūtiņa (ja tā vispār ir atzīmēta) ieskaitīta 4 reizes. Tāpēc, ja atzīmēto rūtiņu būtu 12, apskatāmā summa nepārsniegtu 3·11+4=37 – pretruna.

6. Atbilde: 25.

Risinājums. Sanumurēsim cepures no viena gala. To, ka *i*-tā cepure ir balta (sarkana), pierakstīsim kā *i*~b (*i*~s). Pieņemsim, ka 11~s. Secīgi iegūstam 22~s, 6~s, 17~s, 1~s, 12~s, 23~s, 7~s, 18~s, 2~s, 13~s, 24~s, 8~s, 19~s, 3~s, 14~s, 25~s, 19~s, 20~s, 4~s, 15~s. Ja rūķīšu ir 25, varam izvēlēties 5~b, 10~b, 16~b, 21~b; pārbaudiet patstāvīgi, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

Ja rūķīšu ir ≥26, tad no 15~s seko 26~s; tālāk 10~s, 21~s, 5~s un 16~s. Tātad pirmajiem 26 rūķīšiem visiem ir sarkanas cepures. Skaidrs, ka tad arī citiem rūķīšiem (ja tādi ir) ir sarkanas cepures, un iegūta pretruna ar nosacījumiem, ka ir vismaz viena katras krāsas cepurīte.