"Profesora Cipariņa klubs" 2003./04. m.g.

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Ja baraviku būtu 12 vai vairāk, tad neizpildītos uzdevuma pirmais nosacījums: no groza varētu izņemt 12 sēnes (visas – baravikas), un neviena no tām nebūtu gailene. Tātad **baraviku nav vairāk par 11**. Līdzīgi pierāda, ka **gaileņu nav vairāk par 14**.

Ja baraviku būtu mazāk par 11, tad seņu kopā būtu mazāk nekā 11+14=25 – pretruna. Tātad **baraviku ir 11**. Līdzīgi pierāda, ka **gaileņu ir 14**.

2. Viena iespējama risinājuma atslēga ir vienādība $3^2+4^2=5^2$. (Tiešām, tā ir patiesa: $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$ un 9+16=25.) No tās seko, ka katram naturālam k (k=1, 2, 3, ...) ir spēkā $(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$. Piemēram, pie k=3 iegūstam $9^2+12^2=15^2$, pie k=4 iegūstam $12^2+16^2=20^2$ utt.

Tagad izdarām summā $1^2+2^2+3^2+...+78^2+79^2$ šādas izmaiņas:

48^2+64^2 aizstājam ar 80^2 (k=16)
51^2+68^2 aizstājam ar 85^2 (k=17)
54^2+72^2 aizstājam ar 90^2 (k=18)
57^2+76^2 aizstājam ar 95^2 (k=19)

Summas vērtība nav mainījusies, bet saskaitāmo (kvadrātu) skaits samazinājies par 4.

3. Apskatām „vieninieku virknes” dalīšanu ar 7 pēc skolā mācītā paņēmiena:

```
1 1 1 1 1 1 | 1 1 ... : 7 = 1 5 8 7 3 0 1 ...
7           |
-           |
4 1         |
3 5         |
---         |
  6 1       |
  5 6       |
  ---       |
    5 1     |
    4 9     |
    ---     |
      2 1   |
      2 1   |
      ------
            | 1 1
            |   7
            |   -
            |   4
                ...
```

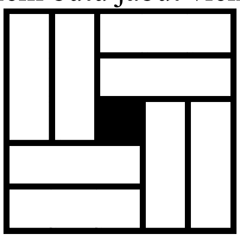
Redzam, ka tie skaitļi, kas sastāv no viena, diviem, ..., pieciem vieniniekiem, nedalās ar 7, bet skaitlis, kas sastāv no sešiem vieniniekiem, dalās ar 7. Pēc tam dalīšanās process „sākas no jauna”: vispirms dalām skaitli, kas sastāv no viena „lejup nonestā” vieninieka, pēc tam – skaitli, kas sastāv no diviem „lejup nonestajiem” vieniniekiem, utt. Tātad dalīšanas rezultāti (iegūtie cipari un atlikumi) atkārtosies. Secinām, ka no vieniniekiem sastāvošs skaitlis dalās ar 7 tad un tikai tad, ja vieninieku skaits tajā dalās ar 6.

Tā kā 2003:6=333 atl. 5, tad starp apskatāmajiem skaitļiem ir 333 tādi, kas dalās ar 7.

4. Kā redzams 1.zīm., vidējā rūtiņa var būt melna.

Parādīsim, ka citas iespējas nav.

Ierakstīsim kvadrāta rūtiņās burtus a, b, c, kā redzams 2.zīm. Viegli pārbaudīt, ka ir 8 burti „a”, 9 burti „b” un 8 burti „c”. Ja mēs nokrāsosim melnu rūtiņu ar burtu „a” vai rūtiņu ar burtu „c”, nenokrāsotajā daļā burtu daudzumi atšķirsies. Bet katrs taisnstūris ar izmēriem 1×3 pārklāj vienu burtu „a”, vienu burtu „b” un vienu burtu „c”. Tātad, ja nenokrāsoto daļu varētu sagriezt šādos taisnstūros, tad tajā visu burtu daudzumiem būtu jābūt vienādiem. Tāpēc tāda sagriešana nav iespējama.



1. zīm.

a	b	c	a	b
b	c	a	b	c
c	a	b	c	a
a	b	c	a	b
b	c	a	b	c

2. zīm.

b	a	c	b	a
c	b	a	c	b
a	c	b	a	c
b	a	c	b	a
c	b	a	c	b

3. zīm.

Secinām: sagriešana **varbūt** ir iespējama tikai tad, ja melna nokrāsota rūtiņa, kurā 2.zīm. ierakstīts burts „b”. Līdzīgi secinām, ka sagriešana **varbūt** ir iespējama tikai tad, ja melna nokrāsota rūtiņa, kurā 3.zīm. ierakstīts burts „b”. Bet vienīgā rūtiņa, kurā gan 2., gan 3.zīm. ierakstīts burts „b”, ir centrālā rūtiņa.

5. a) jā; savienojam visas virsotnes ar riņķa līnijas centru un iegūstam sešus vienādmalu trijstūrus, kam katram visi leņķi ir 60° lieli.

b) nē. Pieņemsim, ka tas būtu iespējams. Tā kā sešstūra malu skaits lielāks par trijstūru skaitu, tad divu sešstūra malu fragmenti pieder vienam trijstūrim. Skaidrs, ka tās var būt tikai sešstūra blakus malas. Bet leņķis starp tām ir 120°, tātad šādu malu fragmenti nevar atrasties uz šaurleņķu trijstūra malām.

6. *Atbilde:* 9 reizes. Skat. B grupas 6.uzdevuma atrisinājumu.

B grupa

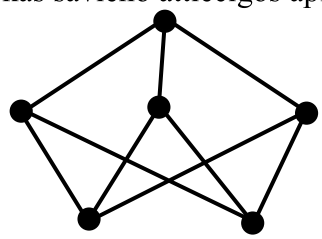
1. Skaidrs, ka n nav vairāk par 4 cipariem. Tāpēc n ciparu summa nav lielāka par 36, un pats skaitlis nav mazāks par 2003-36=1967. Protams, ka $n\le2003$. Pārbaudot visus skaitļus no 1967 līdz 2003, redzam, ka der **n=1978**.

2. Ievērojam, ka $(a^3+3ab^2)+(b^3+3a^2b)=(a+b)^3$. Tāpēc $(a+b)^3=27$ un $a+b=3$. Līdzīgi $(a^3+3ab^2)-(b^3+3a^2b)=(a-b)^3$. Tāpēc $(a-b)^3=1$ un $a-b=1$. Tāpēc $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=3\cdot1=3$.

3. Naturālie skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., dalot ar 5 dod atlikumus 1; 2; 3; 4; 0; 1; 2; 3; 4; 0; 1; 2; .... Ja kaut viens no četriem skaitļiem dalītos ar 5, tad arī to reizinājums dalītos ar 5. Tātad neviens no šiem skaitļiem nedalās ar 5 (t.i., nedod atlikumu 0, dalot ar 5). Tātad šie 4 skaitļi, dalot ar 5, dod atlikumus 1; 2; 3; 4. Bet tad pirmā un pēdējā skaitļa summa dalās ar 5, un arī abu vidējo skaitļu summa dalās ar 5. Tātad arī visu skaitļu summa dalās ar 5.

4. Skaidrs, ka jābūt $m\ge4$ (citādi nevienam nevar būt 3 draugi). Ja m=4, tad katrs draudzējas ar katru citu, un uzdevuma nosacījumi nav izpildīti. Gadījums m=5 nav iespējams. Tiešām, iedomāsimies, ka katri divi draugi savienoti ar lenti. Tad pavisam būtu $5\cdot3=15$ lenšu gali (katram zinātniekam – 3 gali). Bet katrai lentai ir 2 gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis.

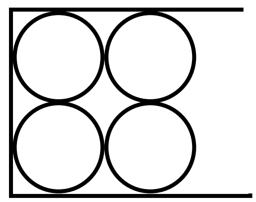
Tas, ka m=6 iespējams, redzams 4.zīm., kur zinātnieki attēloti ar melniem aplīšiem, bet draudzības – ar līnijām, kas savieno attiecīgos aplīšus.



4.zīm.

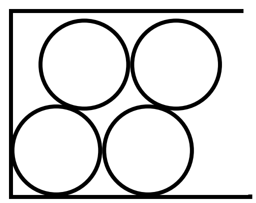
5. Jā, eksistē. Aprakstīsim kastītes un monētu izvietojuma pakāpenisku veidošanu.

Sāksim ar 4 monētu ievietošanu standartveidā.



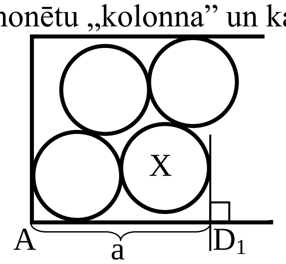
5. zīm.

„Ļoti nedaudz" pabīdīsim pa labi divu augšējo monētu rindu, vienlaikus ļaujot tai noslīdēt uz leju tik tālu, cik to atļauj apakšējās divas monētas. Gar kastītes augšmalu rodas šaura sprauga.



6. zīm.

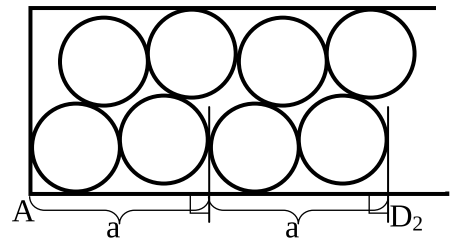
Labējo monētu „kolonnu" paceļam uz augšu, vienlaikus to pabīdot pa kreisi tik tālu, cik to atļauj pa kreisi esošā monētu „kolonna" un kastītes augšējā mala.



7. zīm.

Tā kā monēta X pabīdījās pa kreisi, tad $a<2$ (7.zīm.). Apzīmēsim $a=2-\varepsilon$, kur ε - kaut kāds pozitīvs lielums (ļoti mazs).

Ievietojam vēl vienu šādu 4 monētu konfigurāciju pa labi no taisnes t (8.zīm.).



8. zīm.

Tagad $AD_2=2a=2(2-\varepsilon)=4-2\varepsilon$.

Līdzīgi turpinot, pēc n čtru monētu konfigurācijas eksemplāru ievietošanas iegūsim punktu D_n, kuram $AD_n=n(2-\varepsilon)=2n-n\varepsilon$. Skaidrs, ka, n augot, lielums $n\cdot\varepsilon$ neierobežoti aug, t.i., brīvā vieta līdz kastītes garumam 2n apakšējās rindas labējā galā neierobežoti palielinās. Izvēlēsimies tādu n, ka $n\cdot\varepsilon>2$. Tad kastītē ar izmēriem $2\times 2n$, kurā jau ievietotas 4n monētas, apakšējā rinda pa labi ir vieta vēl vienai monētai.

6. Iedomāsimies, ka skudras, par kurām runā uzdevumā, ir melnas. Iztēlosimies, ka turpat blakus atrodas otra tikpat gara smilga un pa to tādos pašos attālumos cita aiz citas un ar tādiem pašiem ātrumiem kā melnajām skudrām viena otrai pretī dodas divas sarkano skudru grupas. Vienīgā atšķirība – sarkanās skudras sastopoties negriežas apkārt, bet dodas viena otrai garām un turpina ceļu tai pašā virzienā ar to pašu ātrumu. Skaidrs, ka jebkurā laikā momentā kustība uz sarkano skudru smilgas notiek tāpat kā uz melno skudru smilgas (tikai vienas un tās pašas melnās skudras kustību dažādos laika momentos „imitē" dažādas sarkanās skudras). Tāpēc uz abām smilgām skudru satikšanos daudzumi būs vienādi. Skaidrs, ka uz sarkano skudru smilgas notiks 9 sastapšanās. Tātad 9 sastapšanās notiks arī uz melno skudru smilgas.

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Pieņemsim, ka pārējām vāverēm ir attiecīgi a; b; c; d rieksti, pie tam $a<b<c<d$. Saskaņā ar uzdevuma noteikumiem $a+b+c+d=64-15=49$ un $d \le 14$.

Ja būtu $d<14$, tad $d \le 13$; tad $c \le 12$, $b \le 11$ un $a \le 10$. Tāpēc $a+b+c+d \le 10+11+12+13=46$, un tā ir pretruna ar augstāk iegūto $a+b+c+d=49$. Tāpēc $d=14$ un $a+b+c=49-14=35$. Tā kā $c<d$, tad $c \le 13$.

Ja būtu $c<13$, tad $c \le 12$; tad $b \le 11$ un $a \le 10$. Tāpēc $a+b+c \le 12+11+10=33$, un tā ir pretruna ar augstāk iegūto $a+b+c=35$. Tāpēc $c=13$ un $a+b=35-13=22$. Tā kā $b<c$, tad $b \le 12$.

Ja būtu $b<12$, tad $b \le 11$; tad $a \le 10$. Tāpēc $a+b \le 21$ – pretruna ar augstāk iegūto $a+b=22$. Tāpēc $b=12$, un tad $a=22-12=10$.

Pārbaude parāda, ka visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

2. Par piecciparu skaitļa sākumu sauksim tā trīs pirmo ciparu veidoto skaitli. Piemēram, skaitļa 68042 sākums ir 680.

Katrs no uzdevumā minētajiem „simetriskajiem" piecciparu skaitļiem ir viennozīmīgi noteikts, ja ir dots tā sākums. Piemēram, no sākuma 371, iegūstam skaitli 37173. Tātad meklējamo piecciparu skaitļu ir tikpat, cik to iespējamo sākumu. Bet par sākumu var kalpot jebkurš trīsciparu naturāls skaitlis. Trīsciparu naturālu skaitļu pavisam ir 900 (no 100 līdz 999 ieskaitot). Tātad meklējamo piecciparu skaitļu arī ir 900.

3. Lapu, uz kuras uzrakstīti skaitļi a un b, apzīmēsim ar (a; b). Parādīsim, ka mums der lapas (0; 1), (0;2), (0;4), (0;8), (0;16).

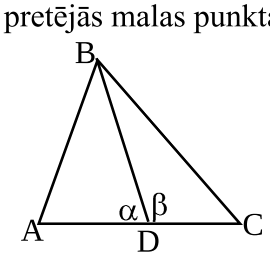
Skaitļus 0 un 1 varam iegūt ar 1.lapas palīdzību, pārējās lapas novietojot ar nullēm uz augšu.

Pieskaitot skaitļiem 0 un 1 skaitli 2, iegūstam skaitļus 2 un 3. Tātad 0; 1; 2; 3 varam iegūt ar pirmajām divām lapām, pārējās lapas novietojot ar nullēm uz augšu.

Pieskaitot skaitļiem 0; 1; 2; 3 skaitli 4, iegūstam skaitļus 4; 5; 6; 7. Tātad 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 varam iegūt ar pirmajām trim lapām, abas pārējās novietojot ar nullēm uz augšu.

Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.

4. Acīmredzami trijstūri sadalīt divos trijstūros var tikai ar nogriezni, kas vilkts no trijstūra virsotnes līdz kādam pretējās malas punktam.



1. zīm.

Ja $BD \perp AC$, tad abi trijstūri ADB un CDB ir taisnleņķa ar taisno leņķi virsotnē D. Apskatīsim otro iespēju, kad BD nav perpendikulārs AC. Tad $\angle BDA \ne \angle BDC$. Apzīmēsim $\angle ADB=\alpha$ un $\angle CDB=\beta$ (skat. 1.zīm.); skaidrs, ka $\alpha+\beta=180°$.

Ja $\Delta ADB=\Delta CDB$ ir vienādi savā starpā, tad vai nu $\angle BAD=\beta$, vai $\angle ABD=\beta$. Bet tad ΔADB ir **divi** leņķi, kuru lielumu summa ir $\alpha+\beta=180°$. Tā nevar būt, jo ΔADB **visu triju** leņķu lielumu summa ir 180°. Iegūtā pretruna parāda, ka mūsu pašreiz apskatāmā otrā iespēja nepastāv.

Piezīme. Ievērojiet, ka patiesībā esam pierādījuši spēcīgāku apgalvojumu nekā prasītais. No mūsu sprieduma izriet: ja trijstūris sadalīts divos **līdzīgos** trijstūros, tad tie abi ir taisnleņķa.

5. Piemēram, tā: $2:(((2-3):((3-4):4-5)):5)=52\frac{1}{2}$.

6. Skat., piem., 2.zīm., kur skaitļu summa uz diagonāles AB ir 88.

B

32	33	34	35	36	37	38	39
31	22	21	16	15	14	13	40
30	23	20	17	10	11	12	41
29	24	19	18	9	44	43	42
28	25	6	7	8	45	46	47
27	26	5	52	51	50	49	48
2	3	4	53	54	55	56	57
1	64	63	62	61	60	59	58

A

2. zīm.

B grupa

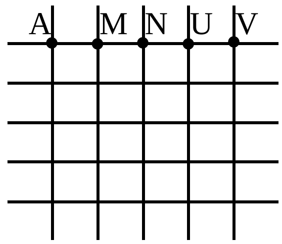
1. Ja vairākas taisnes novietotas tā, ka katras divas no tām ir savā starpā vai nu paralēlas, vai perpendikulāras, tad teiksim, ka tās veido *sistēmu*. Kvadrātu var veidot tikai taisnes, kas pieder vienai sistēmai. Protams, ne katras četras taisnes no vienas sistēmas (pat ja divas no tām ir perpendikulāras otrām divām) veido kvadrātu.

Visas 10 apskatāmās taisnes var sadalīt vairākās sistēmās tā, ka taisnes no dažādām sistēmām savā starpā nav ne paralēlas, ne perpendikulāras. Dažās no šīm sistēmām varbūt ietilpst tikai 1, 2 vai 3 taisnes.

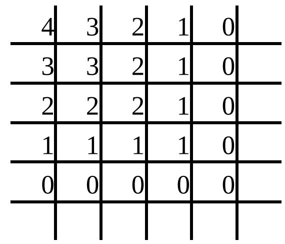
Pieņemsim, ka mums ir divas sistēmas A un B, tādas, ka A taisnes nav ne paralēlas, ne perpendikulāras B taisnēm. Pagriezīsim sistēmu A kā vienu veselu ķermeni tā, lai A taisnes kļūtu paralēlas (perpendikulāras) B taisnēm. Tā rezultātā sistēmas A un B apvienojušās vienā sistēmā, bet kvadrātu skaits vai nu nav mainījies, vai ir palielinājies. rīkosim tā, līdz visas taisnes nonāk vienā sistēmā, kurā x taisnes iet vienā virzienā, bet y taisnes ir tām perpendikulāras ($x+y=10$). Mums jānoskaidro, kāds lielākais kvadrātu skaits var veidoties šādā sistēmā.

Skaidrs: ja x vai y ir 0 vai 1, neveidojas vispār neviens četrstūris, tātad arī neviens kvadrāts. Atliek apskatīt gadījumus $x=2$, $y=8$; $x=3$, $y=7$; $x=4$, $y=6$; $x=5$, $y=5$; $x=6$, $y=4$; $x=7$, $y=3$; $x=8$, $y=2$.

Apskatīsim gadījumu, kad $x=5$ un $y=5$.



3. zīm.



4. zīm.

Kvadrātu, kuriem kreisais augšējais stūris ir punktā A, ir ne vairāk kā 4 (jo to labais augšējais stūris var būt tikai kādā no punktiem M, N, U, V). Spriežot līdzīgi, iegūstam 4.zīm., kur katram punktam norādīts, cik vislielākais var būt kvadrātu ar kreiso augšējo stūri šajā punktā. Tātad apskatāmajā gadījumā nevar veidoties vairāk par $1\cdot4+3\cdot3+5\cdot2+7\cdot1=30$ kvadrātiem. No otras puses, ja taisnes 4. zīm. veido kvadrātisku režģi, rodas tieši 30 kvadrāti. Tātad gadījumā $x=5$, $y=5$ iespējamā kvadrātu skaita maksimums ir 30.

Līdzīgi aprēķinām, ka gadījumos $x=4$, $y=6$ un $x=6$, $y=4$ šis maksimums ir 26, gadījumā $x=3$, $y=7$ un $x=7$, $y=3$ tas ir 17, bet gadījumos $x=2$, $y=8$ un $x=8$, $y=2$ tas ir 7.

Tātad uzdevuma atbilde ir 30.

2. Apzīmēsim pāra skaitļus ar p, bet nepāra ar n. Pavisam mums ir 100 p un 100 n. Trīs pēc kārtas uzrakstītus skaitļus sauksim par trijnieku. Pavisam mums ir 198 trijnieki. Sauksim trijnieku par labu, ja tajā ietilpstošo skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Acīmredzot, trijnieks ir labs tad un tikai tad, ja tajā ir viens n vai trīs n.

Vispirms pierādīsim: nevar būt, ka visi 198 trijnieki ir labi. Pieņemsim pretējo.

Aplūkosim virknes veidošanos atkarībā no tā, kāds ir pirmais trijnieks. Pastāv 4 iespējas.

A. n n n…

Viegli saprast: lai visi trijnieki būtu labi, virknē var parādīties tikai n. Bet tur jābūt arī 100 p. Pretruna.

B. n p p…

Lai visi trijnieki būtu labi, virknei jāturpinās šādi: n p p n p p n p p n p p n p p… (to iegūstam, par katru kārtējo burtu izspriežot, vai tas var būt n vai p, lai pēdējo triju burtu veidotais trijnieks būtu labs). Skaidrs, ka p šajā virknē būs vairāk nekā n (piemēram, jau starp 180 pirmajiem burtiem būs 120 p). Bet virknē jābūt 100 p un 100 n.

C. p n p…

Lai visi trijnieki būtu labi, virknei jāturpinās šādi: p n p p n p p n p p n p p n… Iegūstam pretrunu kā B gadījumā.

D. p p n…

Virknei jāturpinās kā p p n p p n p p n p p n…, un atkal iegūstam pretrunu kā B gadījumā.

Tātad 198 labu trijnieku nevar būt.

Savukārt 197 labi trijnieki iegūstami, izvietojot skaitļus no 1 līdz 200 sekojošā secībā: $\underbrace{\text{nppnpp...n pp}}_{150sk.}\underbrace{\text{nnn...n}}_{50sk.}$. Vienīgais trijnieks, kas nav labs, ir trijnieks p n n uz abu ciparu grupu robežas.

3. Baltās kartītes: 0, 1, 2

Zaļās kartītes: 0, 3, 6

Dzeltenās kartītes: 0, 9, 18

Sarkanās kartītes: 0, 27, 54

Pierādījums līdzīgs A3 uzdevuma risinājumā dotajam. Var arī tieši pārbaudīt visus skaitļus no 0 līdz 80 ieskaitot.

4. **Atbilde:** P jāsakrīt ar D (tad PD=0 un PA+PB+PC+PD=AD+BD+CD).

Viegli pārbaudīt, ka neatkarīgi no punkta P novietojuma trijstūri PAB, PBC, PCA (varbūt viens vai divi no tiem „deģenerējas" par nogriežņiem, ja P pieder vienai vai divām no taisnēm AB, BC, CA) pārklāj visu ΔABC, tātad arī punktu D.

Tālākajā spriedumā mēs izmantosim trijstūra nevienādību: katriem 3 punktiem X, Y un Z pastāv nevienādība $XY+XZ\geq YZ$, pie tam $XY+XZ=YZ$ tad un tikai tad, ja X ir nogriežņa YZ punkts.

Šķirosim vairākas iespējas, pieņemot, ka P nesakrīt ar D.

1) punkts D pieder kādam no nogriežņiem PA, PB, PC. Varam pieņemt, ka D pieder nogrieznim PA. Tā kā D nesakrīt ar P un ir ΔABC iekšējs punkts, tad D ir nogriežņa PA iekšējs punkts, tāpēc $PA=PD+DA$.

Iegūstam $PA+PB+PC+PD=PD+DA+PB+PC+PD=DA+(PD+PB)+(PC+PD)$. (1)

No trijstūra nevienādības

$PD+PB\geq DB$ (2)

$PC+PD\geq DC$ (3)

Nevienādības (2) un (3) abas vienlaicīgi pārvēršas par vienādībām tad un tikai tad, ja P ir gan nogriežņa BD, gan nogriežņa CD punkts. Tā kā BD un CD ir tikai viens kopīgs punkts D, tad P būtu jāsakrīt ar D, bet mēs esam pieņēmuši, ka tā nav. Tātad (2) un (3) vienlaicīgi nav vienādības. No tā seko, ka $PD+PB+PC+PD>DB+DC$, un vienādība (1) mums dod $PA+PB+PC+PD>DA+DB+DC$.

2) punkts D ir **iekšējs** punkts kādam no trijstūriem/nogriežņiem PAB, PBC, PCA; varam pieņemt, ka D ir iekšējs punkts **trijstūrim** PAB. Apzīmēsim staru AD un PB krustpunktu ar E; punkts E ir nogriežņa PB iekšējs punkts.

Tāpēc $DA+DB<DA+DE+EB=AE+EB<AP+(PE+EB)=AP+PB$ (4)

Bez tam no trijstūra nevienādības $DC\leq DP+CP$ (5)

Saskaitot (4) un (5), iegūstam $DA+DB+DC<AP+PB+PD+PC$

Redzam: ja P nesakrīt ar D, tad $PA+PB+PC+PD>DA+DB+DC$;

ja P sakrīt ar D, tad $PA+PB+PC+PD=DA+DB+DC$.

Tātad punkta P meklējamā atrašanās vieta ir D.

Piezīme. Ievērojiet, ka mūsu dotais risinājums der visiem iespējamiem P stāvokļiem gan ABC iekšpusē, gan uz kontūra, gan ārpus ABC. Mums pat nebija vajadzīgs atsaukties uz konkrētu zīmējumu. Iesakām lasītājam patstāvīgi izsekot sprieduma pareizībai dažādos zīmējumos, kas atbilst dažādiem P novietojumiem

5. Ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad:

1) saucēju palielinot, daļa samazinās,

2) saucēju samazinot, daļa palielinās.

Tāpēc

$$\frac{a}{d+a+b}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{c+d+a}>$$

$$>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1$$

un

$$\frac{a}{d+a+b}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{c+d+a}<$$

$$<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}=1+1=2$$

6. Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā un pētīsim, cik maza var būt skaitļa summa uz „melnās" diagonāles. Viegli izsekot, ka visi pāra skaitļi ir vienas krāsas rūtiņās, bet visi nepāra skaitļi – otras krāsas rūtiņās. Iedomāsimies, ka mēs ierakstām skaitļus rūtiņās pēc kārtas, sākot ar 1, un apstājamies brīdī, kad esam aizpildījuši melno diagonāli. šajā brīdī vai nu daļai zem melnās diagonāles, vai daļai virs melnās diagonāles jābūt aizpildītai (ja gan vienā, gan otrā no tām būtu neaizpildītas rūtiņas, tad tās abas turpmāk nevarētu aizpildīt saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, jo ceļam no vienas pie otras jāšķērso jau aizpildītā melnā diagonāle). Melnā diagonāle un viena no abām minētajām daļām kopā satur 36 rūtiņas – 20 melnas un 16 baltas. Tā kā mēs pamīšus aizpildām melnās un baltās rūtiņas, tad apskatāmajā brīdī jābūt aizpildītām vēl vismaz 3 baltām rūtiņām no vēl pilnībā neaizpildītās daļas. Tātad pēdējais uz melnās diagonāles ierakstītais skaitlis ir vismaz 39 (pavisam aizpildītas vismaz 36+3=39 rūtiņas). Visās citās uz melnās diagonāles esošajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 1+3+5+7+9+11+13=49 (septiņu mazāko nepāra skaitļu summa) vai vismaz 2+4+6+8+10+12+14=56 (septiņu mazāko pāra skaitļu summa. Tātad uz melnās diagonāles ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 49+39=88, k.b.j.

3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Sanumurējam vietas, kurās bērni stāv pa apli, pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; ...; 4005; 4006. Ir 2003 vietas ar pāra numuriem („pāra vietas”) un 2003 „nepāra vietas”.
Ir spēkā viens no diviem: vai nu pāra vietās ir vismaz 1002 meitenes, vai arī nepāra vietās ir vismaz 1002 meitenes. Tiešām, ja nebūtu spēkā ne viens, ne otrs, tad meiteņu kopskaits būtu ne lielāks par 1001 + 1001 = 2002 – pretruna.
Varam pieņemt, ka pāra vietās ir vismaz 1002 meitenes (otrs gadījums apskatāms līdzīgi). Atceramies, ka pāra vietu pavisam ir 2003, un ievērojam, ka $1002 \cdot 2 > 2003$.
Pieņemsim, ka nekādas divas pāra vietās esošās meitenes neatrodas blakus esošās pāra vietās. Tad starp katrām divām meiteņu aizņemtām pāra vietām atrodas pāra vieta, kuru neaizņem meitene; tā kā pāra vietās ir ≥ 1002 meitenes, tad jābūt ≥ 1002 pāra vietām, kuras neaizņem meitenes (atstarpju starp pāra vietās esošām meitenēm ir tikpat, cik šo meiteņu); bet tad pāra vietu ir „≥ 1002”+„≥ 1002”, tātad ≥ 2004 – pretruna.
Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un ir divas meitenes, kas atrodas blakus esošās pāra vietās. Bērns, kas atrodas starp šīm meitenēm, ir meklējamais.

2. Jā. Tāds skaitlis ir, piemēram, 715715715.

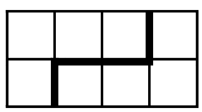
3. **a)** jā, noteikti. Viegli pārbaudīt, ka $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Tāpat viegli pārbaudīt, ka $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}\left((x - y)^2 + x^2 + y^2\right)$. Skaitļa kvadrāts ir vai nu 0, vai pozitīvs skaitlis. Tātad $x^2 - xy + y^2 = 0$ tad un tikai tad, ja $x - y = 0$, $x = 0$ un $y = 0$; bet tad nevarētu būt $x^3 + y^3 > 0$ – pretruna. Tāpēc $x^2 - xy + y^2 > 0$. No šejienes iegūstam, ka $x + y = \frac{2(x^3 + y^3)}{(x - y)^2 + x^2 + y^2} > 0$ kā divu pozitīvu skaitļu dalījums.
<u>Cits pierādījums</u>: no dotā seko, ka $x^3 > -y^3$ jeb $x^3 > (-y)^3$. Tā kā lielākam skaitlim atbilst lielāks kubs, tad no tā seko, ka $x > -y$ un $x + y > 0$, k.b.j.
b) nē. Kā pretpiemērs der, piemēram, $a = 3$;
$b = c = -2$.

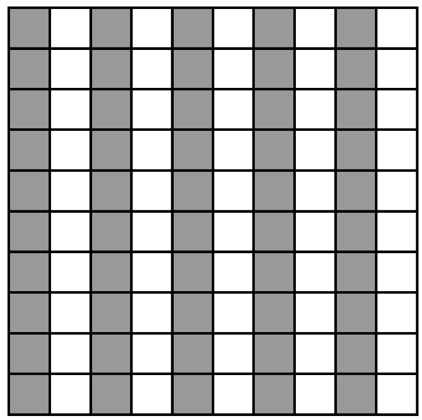
4. Izvēlamies vienu skolnieku un iedodam viņam baltu cepuri. Visiem viņa draugiem/draudzenēm iedodam sarkanas cepures. Visiem šo skolēnu draugiem, kam vēl cepuru nav, iedodam baltas cepures. Visiem šo skolēnu draugiem, kam vēl cepuru nav, iedodam sarkanas cepures, utt.
Agri vai vēlu šis process beigsies. Ja ir skolēni, kam vēl cepuru nav, izvēlamies vienu no tiem un atkārtojam tādu pašu procesu kā iepriekš. Šādi rīkojamies, kamēr katram skolniekam ir cepure. Tagad vienā komandā ieskaitām skolēnus ar sarkanām, bet otrā – ar baltām cepurēm.

5. <u>Atbilde:</u> desmit daļas.
a) piemērs $\frac{13}{1}; \frac{4}{2}; \frac{21}{3}; \frac{15}{5}; \frac{12}{6}; \frac{14}{7}; \frac{16}{8}; \frac{18}{9}; \frac{20}{10}; \frac{22}{11}; \frac{17}{19}$ parāda, ka desmit daļas (piemērā visas, izņemot pēdējo) var būt veseli skaitļi.

b) skaitļi 13, 17, 19 ir pirmskaitļi, kas lielāki par $\frac{22}{2}=11$. Ja kāds no šiem skaitļiem ir skaitītājs, tad daļas vērtība būs vesels skaitlis tikai, ja saucējs būs 1; bet daļu ar saucēju 1 nevar būt vairāk par vienu. Ja kāds no šiem skaitļiem būs saucējs, tad atbilstošā daļa nevar būt vesels skaitlis, jo skaitītājam būtu jābūt lielākam par 22 (daļas vērtība var būt 2; 3; 4; ...).
Tātad visas 11 daļas nevar būt veselas.

6. **a)** jā. No divām uzdevumā dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 2×4 (skat. A163. zīm.), bet no tādiem taisnstūriem viegli salikt kvadrātu ar izmēriem 12×12.


A163. zīm.


A164. zīm.

b) Nē. Apskatām A164. zīm.; tajā ir 50 iekrāsotas un 50 neiekrāsotas rūtiņas. Viegli pārliecināties: jebkura uzdevumā minētā figūra, kuru izgriež no šī kvadrāta, satur vai nu 1, vai 3 (tātad noteikti nepāra skaitu) iekrāsoto rūtiņu. Ja uzdevumā prasītais būtu iespējams, tad būtu jārodas 100 : 4 = 25 gabaliem (nepāra skaitam gabalu). Šie 25 gabali kopā saturētu nepāra skaitu iesvītroto rūtiņu (jo 25 nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis) – pretruna.

B grupa

1. No dotā seko: zilacaino zēnu ir mazāk nekā trešdaļa visu skolēnu, zilacaino meiteņu – mazāk nekā sestdaļa visu skolēnu. Bet $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Tāpēc zilacaino skolēnu noteikti ir mazāk nekā puse no visiem skolēniem.

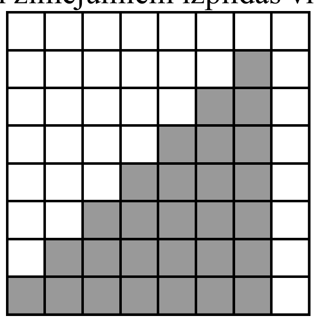
2. Apzīmēsim A ciparu summu ar x. Skaidrs, ka $A\geq1000$. Ja $x\geq4$, tad $B=A\cdot x\geq4000$, tāpēc B ciparu summa ir vismaz 4. Bet tad $C\geq16000$ un nav četrciparu skaitlis – pretruna.
Ja x = 3, tad A > 1000 un B > 3000. Tā kā B – četrciparu skaitlis, tad B pirmais cipars ir vismaz 3; tātad B ciparu summa ir vismaz 4. Tāpēc $C>3000\cdot4=12000$ – pretruna.
Ja $x=1$, tad $A=1000$. Tad $B=1000\cdot1=1000$ un $C=1000\cdot1=1000$. Tātad A = 1000 der.

Ja x = 2, tad iespējamās A vērtības ir 1100; 1010; 1001; 2000. Viegli pārbaudīt, ka pirmās trīs vērtības der, bet A = 2000 neder (tad B = 4000, C = 16000 – piecciparu skaitlis).

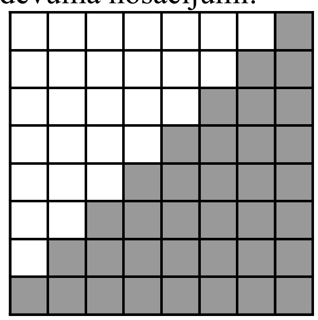
Tātad iespējamās A vērtības ir 1000; 1100; 1010; 1001.

3. Melno rūtiņu daudzums rindiņā (kolonnā) var būt 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Ja kādā rindiņā ir 0 melno rūtiņu, tad nevienā kolonnā nav 8 melno rūtiņu; tātad kolonnās ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 melnās rūtiņas, un kopējais melno rūtiņu skaits ir 0 + 1 + ... + 7 = 28. Ja kādā rindiņā ir 8 melnās rūtiņas, tad nevienā kolonnā nav 0 melno rūtiņu; tātad kolonnās ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 melnās rūtiņas un kopējais melno rūtiņu skaits ir 1 + 2 + ... + 8 = 36.

Piemēri A165. un A166. zīm. parāda, ka abas iespējas tiešām pastāv; pārbaudiet paši, ka katrā no šiem zīmējumiem izpildās visi uzdevuma nosacījumi.



A165. zīm.

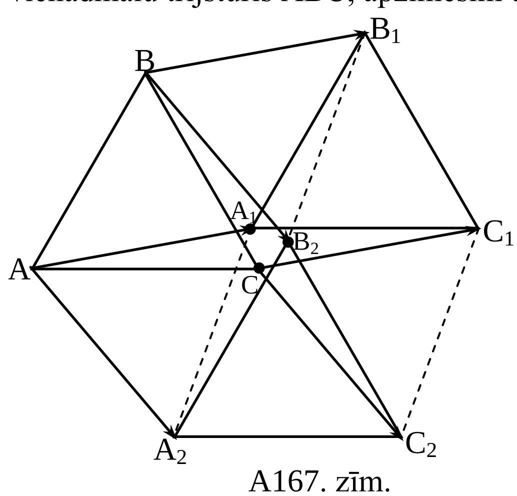


A166. zīm.

4. Jā, var. Skat., piem., A167. zīm. Visi tur novilktie nogriežņi (t.sk. ar pārtrauktām līnijām attēlotie) ir vienāda garuma.

Izskaidrosim, kā šis zīmējums veidots, un pamatosim, ka tas apmierina uzdevuma prasības.

Zīmējuma pamatā ir vienādmalu trijstūris ABC; apzīmēsim tā malas garumu ar a.



A167. zīm.

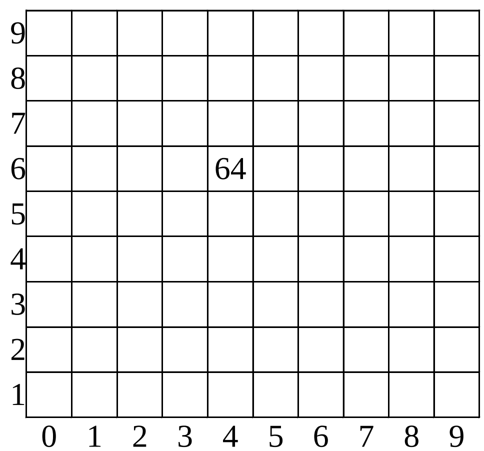
Trijstūris ABC, negrozot to, pārbīdīts par attālumu a, iegūstot jaunu vienādmalu trijstūri $A_1B_1C_1$ ar malas garumu a. Pēc tam ABC, negrozot to, pārbīdīts vēl citā virzienā par attālumu a, iegūstot vienādmalu trijstūri $A_2B_2C_2$ ar malas garumu a. Abi pārbīdīšanas virzieni izvēlēti leņķī 60° vienam pret otru, pie tam tā, lai visi punkti A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 būtu dažādi.

Jau šī konstrukcija garantē, ka $AB = BC = CA = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = A_2B_2 = B_2C_2 =$
$= C_2A_2 = AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = a$;
tātad mums jau ir 15 vienādi attālumi. Pierādīsim, ka arī nogriežņi A_1A_2, B_1B_2 un C_1C_2 (zīmējumā attēloti ar pārtrauktām līnijām) ir ar garumu a; tad uzdevums būs atrisināts.

Aplūkosim ΔA_1AA_2. Saskaņā ar konstrukciju $AA_1 = AA_2 = a$ un $\angle A_1AA_2 = 60^\circ$. Tātad ΔA_1AA_2 ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu; tātad $A_1A_2 = AA_1 = a$. Līdzīgi pierāda, ka $B_1B_2 = C_1C_2 = a$.

5. Uzzīmētajiem 4 trijstūriem kopā ir $4 \cdot 3 = 12$ virsotnes; ir vēl 37 – 12 = 25 sarkanie punkti, kas nav šo četru trijstūru virsotnes. Šie 25 punkti ir kaut kā izvietoti pa tiem 12 riņķa līnijas lokiem, kuros to sadala 12 virsotnes. Tā kā $25 > 12 \cdot 2$, tad kādā no šiem lokiem atrodas vismaz 3 no minētajiem 25 punktiem. Tos var ņemt par meklējamā trijstūra virsotnēm.

6. Attēlosim divciparu naturālos skaitļus ar tāda taisnstūra rūtiņām, kuram ir 9 rindiņas un 10 kolonnas. Rindiņas numurs nosaka skaitļa pirmo, bet kolonnas numurs – otro ciparu (skat. A168. zīm.)



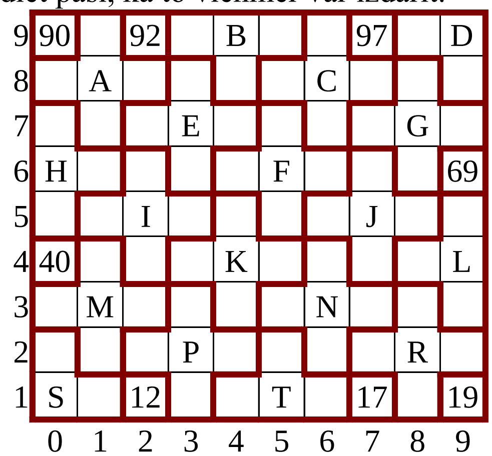
A168. zīm.

Katram Jura jautājumam „Vai Tavs skaitlis ir x?" atbilst vai nu 3, vai 4, vai 5 Andra iedomātie skaitļi, kuru gadījumā jāatbild „silts". Ja x mūsu zīmējumā atrodas stūrī (piem., x = 10), tādu Andra iedomāto skaitļu ir 3; ja x atrodas pie malas, bet ne stūrī (piem., x = 69), tādu Andra iedomāto skaitļu ir 4; ja x atrodas tabulas iekšpusē, tādu Andra iedomāto skaitļu ir 5.

Parādīsim vispirms, ka ar 18 jautājumiem Jurim nepietiek. Pieņemsim, ka Juris uzdevis 17 jautājumus. Neatkarīgi no tā, kas tie ir par jautājumiem, var gadīties, ka Andris uz visiem ir atbildējis „auksts", jo ir ne vairāk $17 \cdot 5 = 85$ iedomājamie skaitļi, kuru gadījumā Andrim būtu jāatbild „silts". Tad pirms pēdējā jautājuma ir vismaz 90 – 85 = 5 skaitļi, katrs no kuriem var būt Andra iedomātais. Bet, uzdodot vienu jautājumu, uz kuru ir iespējams tikai divas dažādas atbildes, var izvēlēties pareizo skaitli no ne vairāk kā divām iespējām.

Tagad parādīsim, ka ar 23 jautājumiem Jurim pietiek.

Vispirms Juris uzdod jautājumus (jebkurā secībā), kuri A169. zīm. attēloti ar burtiem (pavisam šādu jautājumu ir 18), pārtraucot šo procesu, ja uz kādu jautājumu tiek saņemta atbilde „silts”. Tādā gadījumā Jurim paliek vēl vismaz 5 jautājumi un viņam jāizvēlas īstais no ne vairāk kā 5 skaitļiem. To izdarīt ir viegli; nākošie jautājumi jāuzdod tā, lai uz katru atbilde „silts” būtu iespējama tikai viena atlikušā hipotētiskā skaitļa gadījumā. Pārbaudiet paši, ka to vienmēr var izdarīt.



A169. zīm.

Ja uz visiem 18 jautājumiem atbildes ir „auksts”, tad iedomātais ir viens no skaitļiem 12; 17; 19; 40; 69; 90; 92; 97 (skat. 7. zīm.). Tad nākošie jautājumi ir 18 un 91. Ja uz pirmo resp. otro atbilde ir „silts”, tad iedomātais skaitlis ir 17 vai 19 resp. 90 vai 92. Tad iedomāto skaitli noskaidro, uzdodot jautājumus 17 resp. 90.

Ja turpretī uz abiem jautājumiem 18 un 91 atbilde ir „auksts”, tad iedomātais skaitlis ir viens no 12; 40; 69; 97. Uzdodam jautājumus 12; 40; 69. Ja uz kādu no tiem atbilde ir „silts”, tad attiecīgais jautājums arī ir iedomātais skaitlis. Ja visas trīs atbildes ir „auksts”, tad iedomātais skaitlis ir 97.

Iesakām lasītājam pacensties noskaidrot mazāko jautājumu daudzumu, ar kuru garantēti var atrast iedomāto skaitli. Profesors Cipariņš prot to izdarīt ar 22 jautājumiem.

4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Ar katru sitienu akmeņu skaits palielinās par 1. Pēc 17 sitieniem tas palielinājies par 17. Tātad sākumā bija 31 – 17 = 14 akmeņu.

2. Vienu no iespējām skat. A170. zīm. Kustība sākas un arī beidzas, kubam atrodoties ar „*" apzīmētajā kvadrātā (kuba skaldne vienāda ar katru zīmējumā parādīto kvadrātu). Katrā kvadrātā ierakstīts numurs (-i), kas parāda, pēc cik pārvelšanām kubs nonāk šajā kvadrātā.

		5	4	3
8	7	* 6, 12	1	2
9	10	11		

A170. zīm.

Iespējami arī citi veidi, kā sasniegt prasīto.

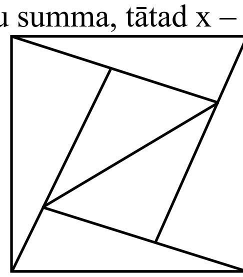
3. **a)** Jā; skat., piem., A171. zīm.

b) Nē, neeksistē. Pieņemsim, ka tāds kvadrāts eksistē; apzīmēsim tā vienā rindiņā ierakstīto skaitļu summu ar x. Tad visās trijās rindiņās ierakstīto skaitļu summa ir $x + x + x = 3x$. Bet no otras puses šī summa ir visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa, t.i., tā ir $1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 53$. Tātad jābūt $3x = 53$ un $x = 17\frac{2}{3}$.

Iegūta pretruna, jo x ir triju veselu skaitļu summa, tātad x – vesels skaitlis.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

A171. zīm.



A172. zīm.

4. Jā, var. Skat., piem., A172. zīm.

5. Kvadrāta laukums ir nepāra skaitlis, vajadzīgais taisnstūru skaits – pāra skaitlis. Tātad jābūt vismaz vienam taisnstūrim, kura laukums – pāra skaitlis, un vismaz vienam taisnstūrim, kura laukums – nepāra skaitlis.

Ja taisnstūra laukums ir nepāra skaitlis, tad tā visu malu garumi ir nepāra skaitļi; pieņemsim, ka divu blakus esošo malu garumi ir $2a + 1$ un $2b + 1$, kur a un b – veseli skaitļi. Tad pēc Pitagora teorēmas diagonāles garuma kvadrāts ir

$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2$,

tātad tas dod atlikumu 2, dalot ar 4.

Ja taisnstūra laukums ir pāra skaitlis, tad tā divu blakus malu garumi ir vai nu 2a un 2b, vai 2a un 2b + 1 (a un b – veseli skaitļi). Diagonāles garuma kvadrāts šajos gadījumos ir vai nu $(2a)^2 + (2b)^2 = 4(a^2 + b^2)$, kas dalās ar 4, vai arī

$(2a)^2 + (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 = 4(a^2 + b^2 + b) + 1$, kas dod atlikumu 1, dalot ar 4.

Tātad visas diagonāles nevar būt savā starpā vienādas.

6. Pierādīsim vispirms šādu rezultātu:

ja naturāli skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot tos ar 2, ar 3 un ar 5, tad starpība a + b dalās ar 30.

Tiešām, no dotā seko, ka a - b dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 5. Tā kā katriem diviem no skaitļiem 2; 3; 5 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad no tā seko, ka šī starpība dalās ar $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

No šejienes izriet, ka Andrim jāprot noteikt cilvēka vecums ar precizitāti līdz 29 gadu iespējamai kļūdai. Skaidrs, ka to var izdarīt, vadoties kaut vai no sarunu biedra ārējā izskata.

B grupa

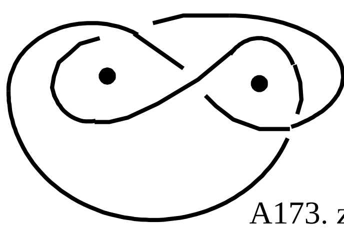
1. Profesors Cipariņš ar datoru pārbaudījis, ka pastāv tikai divas iespējas:

$$33500^2 = 1122250000 \text{ un}$$
$$66500^2 = 4422250000.$$

(Tā kā meklējamais kvadrāts – desmitciparu skaitlis, tad vajadzēja pārbaudīt tādus x^2, ka $31622 < x < 100000$, jo $31622^2 = 999950884$ – deviņciparu skaitlis un $100000^2 = 10000000000$ – 11 -ciparu skaitlis.)

Cipariņam ir arī idejas, kā šo pārbaudi varēja saīsināt (galvenā – vispirms pierādīt, ka kvadrātam pēdējie 4 cipari var būt vienādi tikai tad, ja tie ir nulles), tomēr visi zināmie „teorētiskie” risinājumi ir diezgan gari. Cipariņš turpina strādāt pie šīs problēmas. Pastrādājiet jūs arī un atrakstiet!

2. Skat., piem., A173. zīm.



A173. zīm.

x	*a*	*b*
y	*t*	*c*
z	*e*	*d*

A174. zīm.

3. Apzīmēsim kvadrātā ierakstītos skaitļus, kā parādīts A174. zīm. Izteiksim a; b; c; d; e ar x; y; z; t palīdzību.

Tā kā $x + y + z = z + t + b$, tad $b = x + y - t$.

Tā kā $x + y + z = x + t + d$, tad $d = y + z - t$.

Līdzīgi $a = (x + y + z) - x - b = z + t - x$,

$e = (x + y + z) - z - d = x + t - z$,

$c = (x + y + z) - t - y = x + z - t$

Mums jāpārbauda vienādība

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y - t)^2 + (x + z - t)^2 + (y + z - t)^2$$

Ievērojiet, ka jāpastāv vienādībai $x + y + z = b + c + d = x + y - t + x + z - t + y + z - t$, no kurienes seko $x + y + z = 3t$. Tāpēc pierādāmā vienādība pārveidojas par

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2t - z)^2 + (2t - y)^2 + (2t - x)^2$$

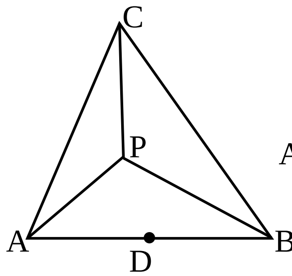
Atverot iekavas, iegūstam, ka jāpierāda

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2 - 4tz + z^2 + 4t^2 - 4ty + y^2 + 4t^2 - 4tx + x^2 \quad \text{jeb}$$

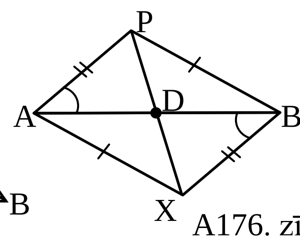
$4t(x + y + z) = 12t^2$, jeb $4t(x + y + z - 3t) = 0$.

Šī vienādība ir pareiza saskaņā ar agrāk iegūto x + y + z = 3t.

4. Savienosim punktu P ar ΔABC virsotnēm (skat. A175. zīm.). Tā kā $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^o$, tad viens no leņķiem APB, BPC, CPA nav mazāks par 120°; varam pieņemt, ka $\angle APB \geq 120^o$. Apzīmēsim AB viduspunktu ar D.



A175. zīm.



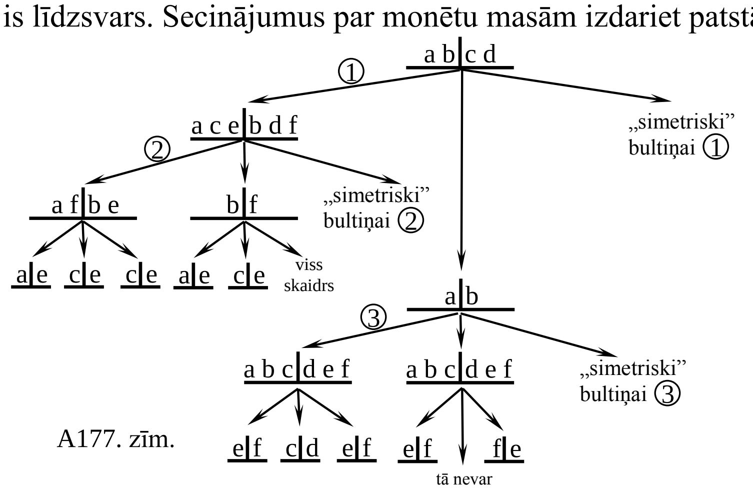
A176. zīm.

Papildināsim ΔAPB līdz paralelogramam APBX (A176. zīm.); tad D ir tā diagonāļu krustpunkts. Tā kā $\angle APB \geq 120^o$, tad vai nu $\angle APD \geq 60^o$, vai $\angle BPD \geq 60^o$; varam pieņemt, ka $\angle BPD \geq 60^o$. Ievērosim, ka $\angle PBX = 180^o - \angle APB \leq 180^o - 120^o = 60^o$.

Tā kā trijstūrī pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tad no ΔPBX seko, ka $BX \geq PX$. Tā kā $BX = PA$ un $PX = 2PD$, iegūstam $PA \geq 2PD$, iegūstam $PA \geq 2 \cdot PD$.

Tātad starp 6 nogriežņiem, kas savieno P ar ΔABC virsotnēm un malu viduspunktiem, var atrast divus tādus, no kuriem viens ir vismaz divreiz garāks par otru. Tāpēc arī garākais no šiem 6 nogriežņiem ir vismaz divreiz garāks par īsāko no tiem.

5. Apzīmēsim monētas ar a, b, c, d, e, f. Viena no iespējamām svēršanas shēmām attēlota A177. zīm. Bultiņa, kas ved pa kreisi/labi, atbilst gadījumam, kad uz leju nosvērsies kreisais/labais kauss; bultiņa, kas ved uz leju, atbilst gadījumam, kad svēršanā bijis līdzsvars. Secinājumus par monētu masām izdariet patstāvīgi.



A177. zīm.

6. Sauksim procesu, kurā iegūst 10000, par pirmo procesu, bet procesu, kurā iegūst 00001 – par otro. Apzīmēsim pārveidojamos skaitļus no kreisās uz labo ar a, b, c, d, e.

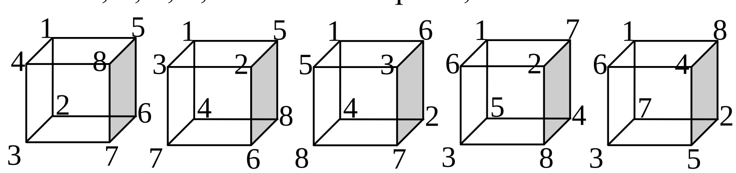
Izpildīsim vispirms visus tos otrā procesa soļus, kas skar tikai a, b vai c. To rezultātā a un b kļūs 0, bet d un e nemainīsies. Pēc tam izpildīsim visus tos pirmā procesa soļus, kas skar tikai c, d vai e. To rezultātā d un e kļūs 0.
Noskaidrosim, par ko kļuvis skaitlis c. Ievērosim, ka gājienu rezultātā izteiksme $a - b + c - d + e$ nemainās (jo katrs gājiens samazina vienu no skaitļiem a, c, e un vienu no skaitļiem b, d). No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $a - b + c - d + e = 1$ (jo gan 1., gan 2. procesa galarezultātā tiešām $a - b + c - d + e = 1$).
Tātad arī pašreiz $a - b + c - d + e = 1$. Tā kā $a = b = d = e = 0$, tad $c = 1$.

5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

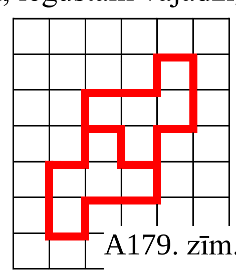
1. Ja vāverītes sākotnējais noguldītais riekstu daudzums bija x, tad pēc viena gada viņai bankā bija $x \cdot 1{,}04$ riekstu, bet pēc 3 gadiem – $x \cdot (1{,}04)^3$ riekstu jeb $x \cdot \frac{26^3}{25^3}$ riekstu. Tā kā šis skaitlis ir naturāls, tad x jādalās ar $25^3 = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 15625$. Tāpēc $x = 15625 \cdot k$, k – naturāls skaitlis. Pie $k \geq 2$ būs $x \geq 15625 \cdot 2 > 30000$, tāpēc noteikti $k = 1$. Tad vāverītei pēc 3 gadiem bankā bija $26^3 = 17576$ riekstu, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad šī atbilde der, un vāverītei sākumā bija 15625 rieksti.

2. Tā kā kubam ir 8 virsotnes un ierakstīt var 8 dažādus naturālus skaitļus, tad katrs no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 uzrakstīts tieši vienā virsotnē. Tā kā katrai šķautnei aprēķinātā starpība nav mazāka par 1 un nav lielāka par 7, tad nav vairāk par 7 dažādām starpībām. Apskatīsim virsotni, kurā ierakstīts 1. No šīs virsotnes izejošām šķautnēm pierakstītas dažādas starpības. Tātad dažādu starpību nav mazāk par 3.
Piemērus, kuros ir 3; 4; 5; 6; 7 dažādas starpības, skat. A178. zīm.

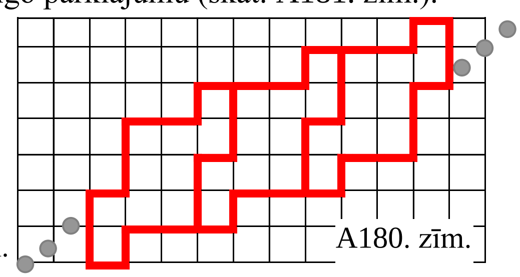


A178. zīm.

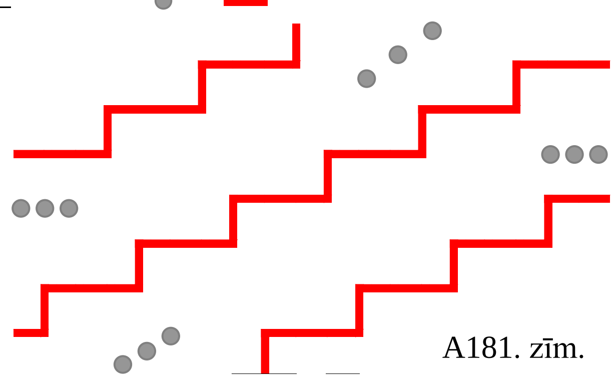
3. No divām figūrām var salikt centrāli simetrisku figūru (skat. A179. zīm.). Saliekot šādas centrāli simetriskas figūras vienu otrai galā, iegūstam bezgalīgu joslu, kuras abas malas ir vienādas lauztas līnijas (skat. A180. zīm.). Saliekot šādas joslas vienu blakus otrai, iegūstam vajadzīgo pārklājumu (skat. A181. zīm.).



A179. zīm.



A180. zīm.



A181. zīm.

4. Mazākais trīsciparu palindroms ir 101; lielākais trīsciparu palindroms ir 999. Ne pirms 101, ne pēc 999 vispār nav vairāk par 1 pēc kārtas sekojošu trīsciparu skaitļu.

Apskatīsim trīsciparu palindromu $\overline{abc}$, kas atšķiras no 999. Šķirojam divus gadījumus:

1) $b \neq 9$. Tad skaitlis $y = \overline{aba} + 10 = \overline{a(b+1)a}$ arī ir palindroms, un starp x un y ir tikai 9 citi naturāli skaitļi.

2) b = 9. Tad $a \neq 9$. Tad $y = x + 11 = \overline{a9a} + 11 = \overline{(a+1)0(a+1)}$ ir palindroms, un starp x un y ir tikai 10 citi naturāli skaitļi.

Tātad „bezpalindromu intervāls" nevar saturēt vairāk par 10 skaitļiem. Piemērs 192; 193; 194; 195; 196; 197; 198; 199; 200; 201 parāda, ka tas var saturēt 10 skaitļus.

5. Ievērosim, ka kvadrātu var sadalīt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas (piemēram, tā, ka visu taisnstūru garākās malas savā starpā paralēlas). Katrs taisnstūris pa reizei satur visus skaitļus. Tāpēc tie visi ierakstīti kvadrātā vienādu skaitu reižu.

6. Uzdevuma risinājums balstās uz faktu: ja aukla, aizdedzinot to no viena gala, deg laika sprīdi T, tad, aizdedzinot to vienlaikus no abiem galiem, tā deg laika sprīdi $\frac{T}{2}$.

Tāpēc varam rīkoties šādi:

(1) vienlaikus aizdedzinām pirmo auklu no abiem galiem, bet otro – no viena gala,

(2) brīdī, kad pirmā aukla pilnībā sadegusi, aizdedzinām otro auklu arī no otra gala.

Etapa (1) beigu brīdī pagājusi pusstunda, tāpēc otrās auklas atlikušajai daļai palicis degt vēl pusstundu. Tāpēc etaps (2) ilgs vēl $\frac{1}{2} \cdot 30 \text{ min} = 15 \text{ min}$, un kopā no etapa (1) sākuma līdz etapa (2) beigām būs pagājis 30 min + 15 min = 45 min.

B grupa

1. Sadalām skaitļus no 2 līdz 12 pirmreizinātājos:

$2=2^1$ $6=2^1\cdot3^1$ $10=2^1\cdot5^1$

$3=3^1$ $7=7^1$ $11=11^1$

$4=2^2$ $8=2^3$ $12=2^2\cdot3^1$

$5=5^1$ $9=3^2$

Redzam, ka 2 pavisam ir sastopams 10 reizes, 3 – 5 reizes, 5 – 2 reizes, 7 – 1 reizi un 11 – 1 reizi.

Lai A dalītos ar B, B nedrīkst nevienu pirmskaitli saturēt augstākā pakāpē, nekā to satur A. Tāpēc dalījumā noteikti vismaz pa vienai reizei saglabājas pirmskaitļi 3; 7; 11; tātad dalījuma vērtība ir vismaz $3\cdot7\cdot11=231$.

Vērtību 231 var iegūt, piemēram, šādi: $231 = \frac{5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot10}$.

2. Ievērosim, ka patvaļīgam naturālam skaitlim *k* pastāv vienādības $k \cdot k! = (k+1)\cdot k! - k! = (k+1)! - k!$

Uzrakstām vienādību $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ pie k=1; 2; 3; …; n:

$1 \cdot 1! = 2! - 1!$

$2 \cdot 2! = 3! - 2!$

$3 \cdot 3! = 4! - 3!$

...

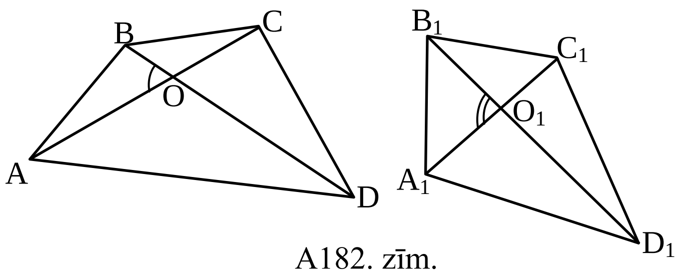
$(n-1) \cdot (n-1)! = n! - (n-1)!$

$n \cdot n! = (n+1)! - n!$

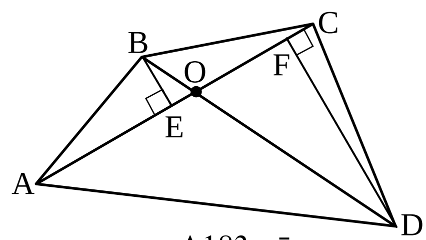
Saskaitot iegūtās vienādības un saīsinot saskaitāmos labajā pusē, iegūstam $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

3. Nē, tas nav iespējams.

Pieņemsim, ka $\angle MNK$ – šaurs. Tā kā MN || BD un NK || CA, tad $\angle BOA = \angle MNK$ (leņķi ar savstarpēji paralēlām malām); tātad $\angle BOA$ – šaurs (skat. A182. zīm.). Līdzīgi iegūstam, ka $\angle B_1O_1A_1$ – plats.



A182. zīm.



A183. zīm.

Novelkam $BE \perp AC$ un $DF \perp AC$ (skat. A183. zīm.). Tad $AB^2 = AE^2 + BE^2$, $BC^2 = CE^2 + BE^2$, $AD^2 = AF^2 + DF^2$ un $CD^2 = CF^2 + DF^2$. Tāpēc

$AB^2 + CD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CF^2 + DF^2) <$

$< (AF^2 + BE^2) + (CE^2 + DF^2) =$

$= (AF^2 + DF^2) + (CE^2 + BE^2) = AD^2 + BC^2$

Līdzīgi iegūstam nevienādību $A_1B_1^2 + C_1D_1^2 > A_1D_1^2 + B_1C_1^2$. Bet saskaņā ar uzdevumā doto abas iegūtās nevienādības nevar būt spēkā vienlaicīgi.

4. Jā, var. Apzīmēsim monētas ar A, B, C, D, E, F, G, H. Pirmajā svēršanā salīdzinām A, B, C, D ar E, F, G, H. Pastāv 3 iespējas.

I: Monētas A, B, C, D ir smagākas par E, F, G, H. Tad smagākā monēta ir starp A, B, C, D, vieglākā – starp E, F, G, H. Otrajā svēršanā salīdzinām A, B ar C, D; smagākā monēta ir uz kausa, kurš nosveras uz leju. Trešajā svēršanā atrodam smagāko monētu. Līdzīgi starp monētām E, F, G, H ar divām svēršanām atrodam vieglāko.

II: Monētas E, F, G, H ir smagākas par A, B, C, D. Rīkojamies līdzīgi kā I gadījumā.

III: Kausi pirmajā svēršanā atrodas līdzsvarā. Otrajā svēršanā salīdzinām A, B, E, F ar C, D, G, H. Pastāv 3 iespējas.

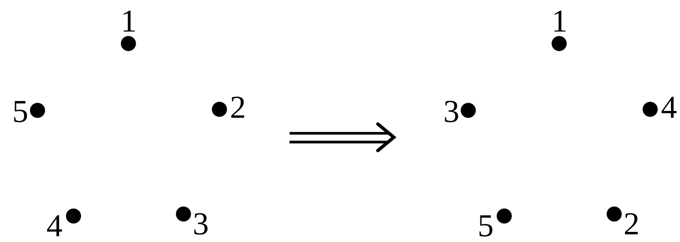
III$_1$: A, B, E, F ir smagākas par C, D, G, H. Tad vai no smagākā monēta ir viena no A, B un vieglākā – viena no C, D, vai arī smagākā monēta ir viena no E, F un vieglākā – viena no G, H. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un B un noskaidrojam, ar kuru no divām nupat minētajām iespējamībām esam sastapušies. Tad ar vēl ne vairāk kā 2 svēršanām atrodam abas meklētās monētas.

III$_2$: C, D, G, H ir smagākas par A, B, E, F. Šo gadījumu analizējam līdzīgi kā III$_1$.

III$_3$: Kausi arī otrajā svēršanā atrodas līdzsvarā. Tad atšķirīgo monētu pāris ir AB, CD, EF vai GH. Salīdzinot A ar C, A ar E un A ar G, noskaidrojam, kuras trīs no monētām A, C, E, G ir vienādas un kura no tām atšķiras, pie tam uzzināsim arī to, vai atšķirīgā monēta ir smagāka vai vieglāka par pārējām. Tas ļauj noskaidrot arī otro atšķirīgo monētu.

5. Apgalvojuma pareizība izriet no vienādības
$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = (x - y)(x - z)(y - z)$,
ko viegli pārbaudīt, atverot iekavas.

6. Skaidrs, ka jābūt $n \geq 3$. Pie $n = 3$ minētās virsotnes acīmredzot eksistē, jo vispār ir tikai viens triju virsotņu veidots trijstūris. Pie $n = 5$ var gadīties, ka uzdevumā minētās virsotnes neeksistē, kā redzams A184. zīm.



A184. zīm.

Visiem citiem n uzdevumā minētās virsotnes noteikti eksistē. Pierādīsim to, šķirojot divus gadījumus.

A: n – pāra skaitlis, $n \geq 4$. Pieņemsim, ka a un b pirmajā n-stūrī ir divās pretējās virsotnēs. Tad katram citam c trijstūris abc pirmajā n-stūrī ir taisnleņķa. Ja a un b ir pretējās virsotnēs arī otrajā n-stūrī, tad par meklējamām virsotnēm var ņemt a, b, c, kur c – patvaļīgs numurs, kas atšķiras no a un b.

Ja a un b otrajā n-stūrī nav pretējās virsotnēs, tad apzīmēsim ar d numuru, kas otrajā n-stūrī atrodas a pretējā virsotnē. Tad par meklējamām virsotnēm der virsotnes a, b, d, jo abi trijstūri ir taisnleņķa: pirmajā trijstūrī taisnais leņķis ir virsotnē d, otrajā – virsotnē b.

B: n – nepāra skaitlis, $n > 5$. Apzīmēsim $n = 2k + 1$, $k \geq 3$. Varam pieņemt, ka pirmajā n-stūrī virsotnes sanumurētas ar numuriem 1, 2, 3, ..., n pēc kārtas.

Izskaitīsim, cik ir šaurleņķu trijstūru ar vienu virsotni 1. Trijstūris ir šaurleņķu, ja starp katrām divām tā virsotnēm atrodas ne vairāk kā $k - 1$ citas n-stūra virsotnes; trijstūris ir platleņķa, ja starp kādām divām no tā virsotnēm atrodas k vai vairāk citas n-stūra virsotnes; skaidrs, ka mūsu gadījumā taisnleņķa trijstūru vispār nav.

Tāpēc ir 1 šaurleņķu trijstūris ar virsotnēm 1 un 2 (tas ir 1; 2; $k + 2$); ir 2 šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un 3 (tie ir 1; 3; $k + 2$ un 1; 3; $k + 3$); ir 3 šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un 4 (tie ir 1; 4; $k + 2$, 1; 4; $k + 3$ un 1; 4; $k + 4$); ...; ir k šaurleņķu trijstūri ar virsotnēm 1 un $k+1$ (tie ir 1; $k + 1$; $k + 2$, 1; $k + 1$; $k + 3$, ..., 1; $k + 1$; $2k + 1$). Līdzīgi ir k šaurleņķu trijstūru ar virsotnēm 1 un $k + 2$; $k - 1$ šaurleņķu trijstūru ar virsotnēm 1 un $k + 3$; ...; 1 šaurleņķu trijstūris ar virsotnēm 1 un $2k + 1$.

Kopā esam uzskaitījuši $1 + 2 + ... + (k - 1) + k + k + (k - 1) + ... + 2 + 1$ šaurleņķu trijstūrus, bet katrs ir uzskaitīts divas reizes; tātad šaurleņķu trijstūru ar virsotni 1 pavisam ir $1 + 2 + ... + k$. Līdzīgi skaitot, iegūstam, ka vispār trijstūru ar virsotni 1 ir $1 + 2 + ... + (2k - 1)$.

Ievērosim, ka $1 + 2 + ... + (2k - 1) = (1 + 2 + ... + k) + ((k + 1) + (k + 2) + ... + 2k) - 2k = (1 + 2 + ... + k) + (1 + 2 + ... + k) + k \cdot k - 2k = 2(1 + 2 + ... + k) + k(k - 2) >$
$> 2(1 + 2 + ... + k)$, ja $k \geq 3$.

Tātad mūsu apskatāmajām n vērtībām šaurleņķu trijstūru ar virsotni 1 pavisam ir mazāk nekā puse no visiem trijstūriem ar virsotni 1. Tāpēc eksistē tādi skaitļi a un b, ka trijstūri ar virsotnēm 1; a; b abos n-stūros ir platleņķa.

6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Katrs no skaitļiem a, b, c ir vai nu pāra, vai nepāra. Tā kā pastāv tikai 2 iespējas, bet skaitļu a, b, c skaits ir 3, tad no tiem var atrast divus, kuru paritātes ir vienādas: vai nu tie abi divi ir pāra skaitļi, vai arī abi ir nepāra skaitļi. Tāpēc to abu summa ir pāra skaitlis.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem šo abu skaitļu summa ir pirmskaitlis. Bet vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Savukārt skaitli 2 kā divu naturālu skaitļu summu var izsacīt tikai vienā veidā: 2 = 1 + 1. Tāpēc divi no skaitļiem a, b, c ir 1; varam pieņemt, ka a = b = 1.

Ja arī c = 1, tad a + b = a + c = b + c = 2, tātad pirmskaitļi. Šai gadījumā apskatāmajiem skaitļiem ir divas dažādas vērtības 1 un 2. Ja c = 2, tad a + c = b + c = 3; tā kā 3 ir pirmskaitlis, tad šis gadījums apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad apskatāmajiem skaitļiem var būt trīs dažādas vērtības.

Ja c > 2, tad $c \geq 3$. Tad izpildās sakarības

$a = b = 1 < 2 = a + b < 3 \leq c < c + 1 = c + a = c + b$.

Tātad uzdevumā apskatāmajiem skaitļiem ir četras dažādas vērtības 1; 2; c; c + 1. Ja ņem, piemēram, c = 4, tad c + a = c + b = 5 ir pirmskaitlis, un uzdevuma prasības ir izpildītas.

Tātad skaitļiem a, b, c, a + b, b + c, a + c var būt 2, 3 vai 4 dažādas vērtības.

2. Jā, var. Skat., piem., A185. zīm.

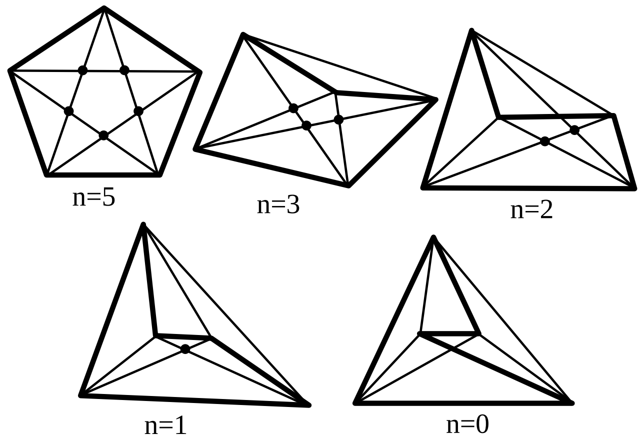
1	4	2
3	6	7
5	9	8

A185. zīm.

3. Apzīmēsim piecstūri ar ABCDE. Tā diagonāles ir AC, CE, EB, BD, DA. Diagonāles, kam ir kopīga virsotne, nekrustojas. Tāpēc katra diagonāle krustojas ar augstākais divām citām (piemēram, AC varbūt krustojas tikai ar EB un BD).

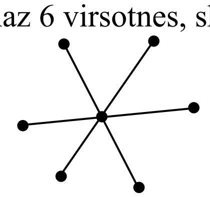
Piešķirot katrai diagonālei par vienu krustošanos vienu žetonu, pavisam ir piešķirti ne vairāk kā $5 \cdot 2 = 10$ žetoni. Bet par katru krustpunktu tiek piešķirti vismaz 2 žetoni (jo tajā krustojas vismaz divas diagonāles). Tāpēc dažādu krustpunktu nav vairāk par 10 : 2 = 5.

Kā redzams A186. zīm., iespējami 5; 3; 2; 1; 0 krustpunkti.

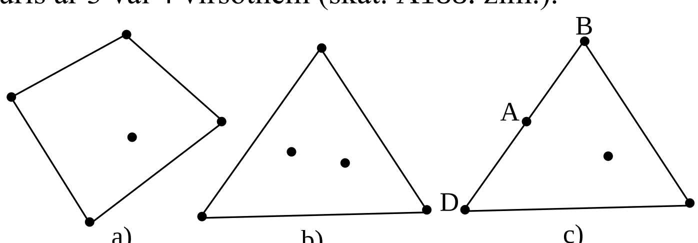


A186. zīm.

Piecstūru malas attēlotas ar resnākām līnijām.
Pierādīsim, ka tieši 4 krustpunkti nevar būt.
Iedomāsimies, ka katrā piecstūra virsotnē iedurta adata. Ņemam ļoti mazu elastīgu gumijas gredzenu, izstiepjam to, apliekam ap visām adatām vienlaikus un ļaujam tam savilkties. Skaidrs, ka gumijas gredzens ieņems tāda daudzstūra formu, kura virsotnes ir aplūkojamā piecstūra virsotnes. Līniju, uz kuras gredzens savelkoties stabilizējas, sauc par uzdevumā apskatāmā piecstūra izliekto apvalku; apzīmēsim to ar IA. Šķirosim divus gadījumus.
1. IA ir piecstūra kontūrs. Tad uzdevumā dotais piecstūris ir izliekts, katras divas tā diagonāles krustojas un pavisam ir 5 krustpunkti (nekādi divi krustpunkti nevar sakrist, jo tad pavisam būtu vismaz 6 virsotnes, skat. A187. zīm.)


A187. zīm.

2. IA ir daudzstūris ar 3 vai 4 virsotnēm (skat. A188. zīm.).



A188. zīm.

Tad vai nu kāda IA mala, vai nogrieznis, kas savieno divas uz IA malas esošas piecstūra virsotnes (piem., AD A188.c) zīmējumā) ir piecstūra diagonāle; apzīmēsim taisni, uz kuras tā atrodas, ar *t*, bet pašu šo diagonāli ar XY. Visas piecas piecstūra diagonāles atrodas uz *t* vai vienā pusē *t*. Tāpēc diagonāle XY nekrustojas ne ar vienu no pārējām diagonālēm. Uzskatīsim, ka piecstūris ir XPYST, un apskatīsim visus iespējamos tā diagonāļu pārus.

(XY, PS)	(XS, SP)	(XS, TY)
(XY, PT)	(YT, TP)	(PS, TY)
(XY, XS)	(TP, PS)	(XS, PT)

(XY, YT)		
krustpunktu nav, jo XY nekrustojas ar citām diagonālēm	krustpunktu nav, jo diagonāles iziet no vienas virsotnes	varbūt ir pa vienam krustpunktam

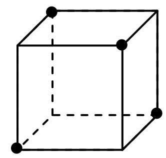
Tātad krustpunktu skaits šajā gadījumā nepārsniedz 3.

4. Sauksim katrai šķautnei aprēķināto starpību par šīs šķautnes vērtību.

Aplūkosim trīs šķautnes, kas iziet no virsotnes A. Apzīmēsim skaitļus, kas uzrakstīti 3 skaldnēs ar kopējo virsotni A, ar a, b, c; varam pieņemt, ka a < b < c. Tad mūsu apskatāmo šķautņu vērtības ir b – c a, c – a un b – c. Viegli pārbaudīt, ka

(c – a) = (c – b) + (b – a)

Tātad divu no A izejošo šķautņu vērtību summa vienāda ar trešās šķautnes vērtību.



A189. zīm.

Apskatīsim četrus šķautņu trijniekus, kas iziet no A189. zīm. attēlotajām virsotnēm. Katra kuba šķautne ietilpst tieši vienā no šiem trijniekiem.

Apzīmēsim atbilstošās vērtības ar α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3; δ_1, δ_2, δ_3. Saskaņā ar augstāk pierādīto, varam pieņemt, ka

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$
$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_3 \quad \textbf{(1)}$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$$
$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3 .$$

No vienādībām (1) seko vienādība

$$\alpha_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \delta_2 + \delta_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \delta_1 ,$$

kas dod uzdevuma atrisinājumu.

5. Skat., piem., A190. zīm.

b	m					b	m
m	m					b	b
		b	b	m	m		
		b	m	b	m		
		m	b	m	b		
		m	m	b	b		
b	b					m	m
m	b					m	b

A190. zīm.

6. Pierādīsim vispirms šādu rezultātu:

„katra 5 ciparu virkne, kurā katrs cipars ir vai nu 1, vai 2, vai nu pati ir simetriska, vai sadalāma divās simetriskās virknēs.”

Apgalvojuma pareizība virknēm, kas sākas ar ciparu 1, redzama A191. zīm. tabulā; virknēm, kas sākas ar ciparu 2, to pierāda, aizstājot tabulā vieniniekus ar divniekiem un otrādi.

1 1 1 1 1	**1 2 1 | 1 1**
1 1 1 1 | 2	**1 | 2 1 1 2**
1 1 | 1 2 1	**1 2 1 2 1**
1 1 1 | 2 2	**1 2 1 | 2 2**
1 1 2 1 1	**1 2 2 1 | 1**
1 1 | 2 1 2	**1 2 2 1 | 2**
1 | 1 2 2 1	**1 2 2 2 1**
1 1 | 2 2 2	**1 | 2 2 2 2**

A191. zīm.

Lai atrisinātu uzdevumu, sagriežam vispirms lentu 50 gabalos, katrs no kuriem satur 5 ciparus. Ja uz kāda gabala nav uzrakstīts simetrisks skaitlis, tad saskaņā ar augstāk pierādīto to var sagriezt divos gabalos, uz katra no kuriem būs simetrisks skaitlis. Tātad gabalu nav vairāk par $50 \cdot 2 = 100$, k. b. j.

B grupa

1. Nē, nevar.

Pieņemsim no pretējā, ka x un y – naturāli skaitļi un $x + y = \text{MKD}(x, y)$. Šķirosim divas iespējas:

1) x = y; tad $\text{MKD}(x, y) = x$, bet $x + y = 2x \neq x$ - pretruna.

2) $x \neq y$; varam pieņemt, ka $x > y$. Tad $x < x + y < 2x$ un $1 < \frac{x+y}{x} < 2$. Tātad $\frac{x+y}{x}$ nav vesels skaitlis, jo atrodas starp diviem blakus esošiem veseliem skaitļiem 1 un 2; tātad x + y nedalās ar x – pretruna, jo $\text{MKD}(x, y)$ dalās gan ar x, gan ar y.

2. Pieņemsim no pretējā, ka ir kāds naturāls skaitlis, kas dalās ar 99999 un kam ir mazāk nekā 5 nenulles cipari; apzīmēsim mazāko no šādiem skaitļiem ar A. Skaidrs, ka A satur vismaz 6 ciparus, jo neviens skaitlis ar mazāk nekā 5 cipariem nedalās ar 99999, bet no piecciparu skaitļiem ar 99999 dalās tikai pats 99999; tomēr $A \neq 99999$, jo saskaņā ar pieņēmumu A ir mazāk nekā 5 nenulles cipari.

Sauksim A ciparus no kreisās puses par pirmo, otro, ..., sesto (un varbūt vēl septīto, astoto utt., ja tādi ir) cipariem. Skaidrs, ka A pirmais cipars nav 0; apzīmēsim to ar a.

$$A = a****b\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{var būt vēl n}\\ \text{citi cipari}}}$$

Mēs centīsimies parādīt, ka eksistē mazāks naturāls skaitlis nekā A, kas dalās ar 99999 un kam ir mazāk nekā 5 nenulles cipari. Tad būs iegūta pretruna (jo A saskaņā ar pieņēmumu ir mazākais no šādiem skaitļiem), un uzdevums būs atrisināts.

Atņemsim no skaitļa A skaitli $1\underbrace{00\ldots0}_{n+5\,\text{nulles}}$ un pieskaitīsim tam skaitli $1\underbrace{0\ldots0}_{n\,\text{nulles}}$. Šo operāciju rezultātā A samazinās par lielumu

$$\begin{array}{r} 10000000\ldots0 \\ -\qquad 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n nulles}} \\ \hline 99999\underbrace{00\ldots0}_{\text{n nulles}} \end{array}$$

t.i., par lielumu, kas dalās ar 99999. Tātad arī jauniegūtais skaitlis A' dalās ar 99999, bet $A' < A$.

Ievērosim, ka skaitļa $1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n+5 nulles}}$ atņemšana līdzvērtīga cipara a pamazināšanai par 1, bet skaitļa $1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n nulles}}$ pieskaitīšana līdzvērtīga cipara b palielināšanai par 1 (ja vien b nav 9; tad b kļūst par 0, un rodas pārnesums 1 uz piekto šķiru).

Aplūkojam vairākas iespējas.

1) $b \neq 0$, $b \neq 9$. Tad b kā bijis, tā paliek nenulles cipars, bet a varbūt no nenulles cipara kļūst par 0; citi cipari nemainās, tātad nenulles ciparu skaits nepieaug.

2) b = 9. Tad b no nenulles cipara kļūst par 0, un pārnesumu rezultātā augstākais viena 0 kļūst par 1. Tā kā a izmaiņu rezultātā nenulles ciparu skaits nepieaug, tad arī šajā gadījumā kopējais nenulles ciparu skaits nepieaug.

3) b = 0. Tādā gadījumā atkārtojam minēto operāciju vēl un vēl, kamēr tā izpildīta a reizes. Rezultātā a no nenulles cipara kļuvis par 0, bet b – no 0 par nenulles ciparu a. Tātad nenulles ciparu skaits ir tāds pats kā sākotnējā skaitā A.

Visos gadījumos esam ieguvuši skaitli ar ne vairāk kā 4 nenulles cipariem, kas dalās ar 99999 un ir mazāks par A. Kā iepriekš atzīmēts, līdz ar to iegūta pretruna un uzdevums atrisināts.

3. Atbilde: 4 pirmskaitļi.

Kā redzams A192. zīm., vienā rindā (vidējā) tiešām var būt 4 pirmskaitļi.

5	6	7	8	9
4	1	18	17	10
3	2	19	16	11
24	23	20	15	12
25	22	21	14	13

A192. zīm.

Ja rūtiņas izkrāso šaha galdiņa kārtībā, tad skaidrs, ka pāra skaitļi nonāk vienas krāsas rūtiņās, bet nepāra – otras. Tā kā rindā ir vismaz 2 baltas un 2 melnas rūtiņas, tad katrā rindā ir vismaz 2 pāra skaitļi. Bet ir tikai viens pāra pirmskaitlis. Tātad visi 5 skaitļi rindā nevar būt pirmskaitļi.

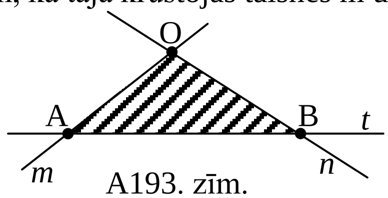
4. Kā zināms, 99–stūra iekšējo leņķu summa ir $180^\circ \cdot (99-2) = 97 \cdot 180^\circ$. Trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°. Tā kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem visu dalījuma trijstūru visas virsotnes atrodas 99-stūra virsotnēs, tad visu dalījuma trijstūru visu leņķu summa ir vienāda ar 99-stūra visu leņķu summu. Tāpēc dalījuma trijstūru skaits ir $(97 \cdot 180^\circ) : 180^\circ = 97$.

Katra 99-stūra mala ir mala kādam no dalījuma trijstūriem. Skaidrs, ka nevienam trijstūrim visas malas nav 99-stūra malas. Tātad katram trijstūrim 0, 1 vai 2 malas ir 99-stūra malas. Tā kā 99 malas „jāsadala” pa 97 trijstūriem un katram trijstūrim

„pienākas” ne vairāk par 2 malām, tad ir vismaz $99-97=2$ trijstūri, katram no kuriem 2 malas ir 99-stūra malas. Skaidrs, ka tie abi ir vienādsānu. Ja ir vēl trešais šāds trijstūris, tad tas arī ir vienādsānu. Tātad atliek apskatīt gadījumu, kad ir tieši 2 trijstūri, kam divas malas ir 99-stūra malas, bet katram no pārējiem trijstūriem tieši viena mala ir 99-stūra mala.

Tagad viegli saprast, ka tam trijstūrim, kas satur regulārā 99-stūra centru, divas malas ir vienādas diagonāles, tāpēc tas ir vienādsānu.

5. Apzīmēsim ar t vienu no novilktajām 30 taisnēm. Apskatīsim visus novilkto taišņu krustpunktus, kas neatrodas uz taisnes t; atradīsim starp tiem taisnei t tuvāko krustpunktu O. Pieņemsim, ka tajā krustojas taisnes m un n (skat. A193. zīm.).



A193. zīm.

Iesvītroto trijstūri nekrusto neviena taisne. Tiešām, ja kāda taisne to krustotu, tad tā krustotu vai nu malu OA, vai malu OB, un tad O nebūtu taisnei t vistuvākais krustpunkts.

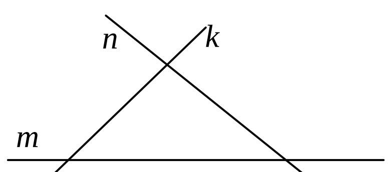
Tātad „blakus” taisnei t noteikti atrodas vismaz viens trijstūris. Tas attiecas uz katru no 30 taisnēm. Tā kā katrs trijstūris atrodas blakus trim taisnēm, tad trijstūru ir vismaz $\frac{30}{3}=10$.

Lai atrisinātu uzdevuma otro daļu, ievērosim, ka taisnei t ir divas puses. Mēs varētu apskatīt taisnei t tuvāko krustpunktu gan vienā, gan otrā pusē un līdzīgi kā iepriekš iegūt, ka katrai taisnei blakus ir vismaz 2 trijstūri; tad kopējais trijstūru skaits būtu vismaz $\frac{30\cdot 2}{3}=20$.

Šai spriedumā ir viens defekts: var gadīties, ka vienā pusē taisnei t krustpunktu vispār nav (tātad nav arī tuvākā krustpunkta). Šo defektu izlabosim sekojoši: pierādīsim, ka **tādu „sliktu” taišņu t nav vairāk par divām**. Tad pārējām 28 taisnēm katrai blakus ir vismaz 2 trijstūri, divām sliktajām taisnēm – vismaz pa 1 trijstūrim, un trijstūru kopējais skaits nav mazāks par $\frac{2\cdot 28+1\cdot 2}{3}=\frac{58}{3}=19\frac{1}{3}$.Tā kā trijstūru skaits ir naturāls skaitlis, tad tas nav mazāks par 20.

Atliek pierādīt augstāk izcelto apbalvojumu.

Pieņemsim pretējo – ir 3 „sliktas” taisnes. Apzīmēsim tās ar m, n, k (skat. A194. zīm.)



A194. zīm.

Ja visi krustpunkti atrodas vienā pusē katrai no šīm taisnēm, tad tiem visiem jāatrodas kādā no tiem 7 apgabaliem, kuros tās sadala plakni (ieskaitot arī šo apgabalu robežas). Tomēr viegli pārbaudīt, ka nevar novilkt pat vēl vienu taisni, lai šis nosacījums izpildītos. Līdz ar to pierādīts, ka 3 sliktu taišņu nav. Uzdevums atrisināts.

6. Pareizi spēlējot, uzvar pirmais spēlētājs. Ar savu pirmo gājienu viņš apēd 2 konfektes, atstājot $13 \cdot 7 + 7$ konfektes. Tad ir spēkā sekojoši fakti (to pārbaude prasa tikai rūpīgu visu gadījumu izskatīšanu, un Profesors Cipariņš atstāj to izdarīt patstāvīgi).

I Pirmais spēlētājs ar savu gājienu vienmēr var panākt vienu no šādām situācijām:

a) palikušo konfekšu skaits dalās ar 13,

b) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 3, un otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu nevar ēst 3 konfektes,

c) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 5, un otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu nevar ēst 5 konfektes,

d) palikušo konfekšu skaits, dalot ar 13, dod atlikumu 7.

II Otrais spēlētājs ar savu gājienu nekad nevar panākt, lai palikušo konfekšu skaits dalītos ar 13 bez atlikuma.

No II seko, ka otrais spēlētājs nevar panākt ,lai palikušo konfekšu skaits būtu 0; tad tas dalītos ar 13 bez atlikuma. Tātad otrais spēlētājs nevar uzvarēt. Tā kā augstākais pēc 100 gājieniem visas konfektes būs apēstas, tad uzvar pirmais spēlētājs, jo kāds noteikti uzvarēs.