Materiāls ņemts no grāmatas: A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons. "Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. - 2006. gadā. Zīmējumu numerācija saglabāta kā grāmatā.

# 27. MĀCĪBU GADS (2000/ 2001)

# UZDEVUMI

## 1. PIRMĀ NODARBĪBA

### A GRUPA

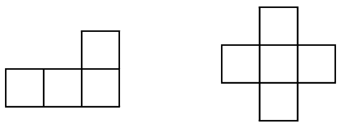
**1.A1.** Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādus pārveidojumus: a) pierakstīt tam galā 0, b) pierakstīt tam galā 4, c) dalīt to ar 2, ja tas ir pāra skaitlis.
Vai ar šādiem pārveidojumiem, lietojot tos patvaļīgā secībā un vairākas reizes, no skaitļa 4 var iegūt visus viencipara naturālus skaitļus?

**1.A2.** Taisnstūrī ABCD zināms, ka AB = 3cm un BC = 10cm. Skudra sāk rāpot pa taisnstūra kontūru vienā virzienā, sākot no virsotnes A. Uz kuras malas skudra atradīsies, kad tā būs norāpojusi tieši 2 kilometrus?

**1.A3.** Triju pirmskaitļu kvadrātu summa ir 414. Kas tie ir par pirmskaitļiem?

**1.A4.** Jānītim patīk tādi četrciparu naturāli skaitļi, kuros ir tieši 3 dažādi cipari un kuros neviens cipars nav lielāks par 5. Cik skaitļu Jānītim patīk?

**1.A5.** Vai no tādām figūrām, kādas attēlotas 1. zīm., var salikt kvadrātu ar izmēriem $6\times6$? Katru figūru var izmantot vairākas reizes. Figūras nedrīkst pārklāties.



1. zīm.

**1.A6.** Burvju māksliniekam ir 100 kartiņas ar numuriem no 1 līdz 100. Viņš tās saliek baltā, sarkanā un zaļā kastē tā, ka katrā kastē ir vismaz viena kartiņa.
Kāds no skatītājiem paņem pa vienai kartiņai no divām kastēm un skaļi nosauc to numuru summu. Zinot tikai šo summu, burvju mākslinieks pasaka, no kuras kastes kartiņa netika ņemta.
Atrodiet divus būtiski atšķirīgus veidus, kā sadalīt kartiņas pa kastēm, lai šis triks vienmēr izdotos.

### B GRUPA

**1.B1.** Skat. A grupas 1. uzdevumu, ja jāiegūst visi naturāli skaitļi no 1 līdz 100.

**1.B2.** Pildspalva, flomasters un klade kopā maksā 1 latu. Klade maksā vairāk par 2 flomasteriem, 3 flomasteri maksā vairāk par 4 pildspalvām un 3 pildspalvas maksā vairāk par kladi. Cik maksā katrs no minētajiem priekšmetiem?

**1.B3.** Katram no pieciem cilvēkiem galvā ir sarkana vai zaļa cepure. Tie, kas valkā zaļu cepuri, vienmēr melo; tie, kas valkā sarkanu cepuri, vienmēr runā patiesību. Katrs redz visu citu cepures. A saka: "Es redzu 3 sarkanas un 1 zaļu cepuri." B saka: "Es redzu 4 zaļas cepures." C saka: "Es redzu 1 sarkanu un 3 zaļas cepures." D saka: "Es redzu 4 sarkanas cepures." E nesaka neko.
Kādas krāsas cepures katram ir galvā?

**1.B4.** Andrim patīk naturāli skaitļi, kuros visi cipari ir dažādi un pirmais cipars vienāds ar visu citu ciparu summu. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, kas patīk Andrim?

**1.B5.** Skat. A grupas 5. uzdevumu, ja jāsaliek kvadrāts ar izmēriem $9 \times 9$.

**1.B6.** Cik pavisam ir dažādu veidu, kā salikt kartiņas kastēs, lai A grupas 6. uzdevumā aprakstītais triks noteikti izdotos?

## 2. OTRĀ NODARBĪBA

## A GRUPA

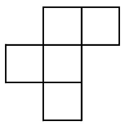
**2.A1.** Parādi, ka vienādībā $40 \pm 39 \pm 38 \pm 37 \pm ... \pm 3 \pm 2 \pm 1 = 500$ var tā izvēlēties zīmes kreisajā pusē, lai vienādība būtu pareiza. Kāds ir lielākais iespējamais "-" zīmju skaits šādā pareizā vienādībā?

**2.A2.** Uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti, kas to sadala 5 vienādos lokos. Centrs nav atzīmēts. Kā, izmantojot tikai lineālu un zīmuli, atrast riņķa līnijas centru?

**2.A3.** Profesora Cipariņa automašīnai ir četras vienādu izmēru riepas un viena rezerves riepa; visas 5 riepas ir pilnīgi jaunas. Ja riepu izmanto kā priekšējo riepu, tā nolietojas pēc 30000 km; ja to izmanto kā aizmugurējo riepu, tā nolietojas pēc 20000 km. Cik lielu attālumu Cipariņš var nobraukt ar šīm 5 riepām?

**2.A4.** No 9 nenulles cipariem, katru no tiem izmantojot tieši divas reizes, sastādiet dažādus pirmskaitļus tā, lai to summa būtu iespējami maza.

**2.A5.** Vai ar tādām figūrām, kāda parādīta 2. zīm., var pārklāt kvadrātu ar izmēriem $10 \times 10$ rūtiņas? Figūras savā starpā nedrīkst pārklāties un tās nedrīkst apgriezt "uz mutes", bet tās drīkst iziet ārpus kvadrāta robežām.



2. zīm.

**2.A6.** Jānis dod Andrim pa vienai kartiņai. Katra kartiņa ir vai nu balta, vai sarkana. Andris šīs kartiņas liek divās kaudzītēs. Katrā kaudzītē kartiņu krāsām jābūt pamīšus. Zināms, ka 7. un 8. kartiņa bija baltas, bet 19.kartiņa – sarkana. Kādā krāsā bija 20.kartiņa?

## B GRUPA

**2.B1.** Kurā gadījumā iegūst lielāku rezultātu: vai sareizinot 16 devītniekus, vai 12 skaitļus "piecpadsmit"?

**2.B2.** No 12 apgalvojumiem "x dalās ar 2", "x dalās ar 3", "x dalās ar 4", ..., "x dalās ar 13" desmit ir pareizi, bet divi viens otram sekojoši – nepareizi. Zināms, ka x nav vairāk par 5 cipariem. Atrast x.

**2.B3.** Vai trijstūri var sagriezt a) 6, b) 7, c) 8 trijstūrīšos tā, lai nekādiem diviem griežot iegūtajiem trijstūrīšiem nebūtu kopīga mala?

**2.B4.** Rūtiņu lapā "pa spirāli" izraksta visus naturālos skaitļus tā, kā redzams 3. zīm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | 5 | 4 | 3 | ⋮ | |
| | | 6 | 1 | 2 | 11 | |
| | | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| | | | | | | |

3. zīm.

Par cik rūtiņām horizontālā un par cik - vertikālā virzienā no 1 nobīdīts skaitlis 2000?

**2.B5.** Parādīt, kā dažādmalu šaurleņķu trijstūri 4 dažādos veidos var sagriezt trīs daļās tā, lai katrai daļai būtu simetrijas ass.

**2.B6.** Ar vienu gājienu šaha galdiņā var izvēlēties jebkuru taisnstūri, kura malas iet pa lauciņu robežām, un šī taisnstūra iekšienē mainīt visu lauciņu krāsas (melnu par baltu un baltu par melnu). Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi lauciņi vienlaicīgi būtu melni?

## 3. TREŠĀ NODARBĪBA

### A GRUPA

**3.A1.** Dota 30 litru kanna, kas pilna ar ūdeni. Doti arī divi sākotnēji tukši trauki ar ietilpību 9 l un 12 l. Kā, izmantojot šos traukus, var atliet a) 3 l, b) 6 l ūdens?

**3.A2.** Riņķa līnija sadalīta 10 vienādās daļās. Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju ar 10 posmiem tā, lai tās virsotnes atrastos dalījuma punktos un lai starp tās posmiem būtu tieši divi paralēli.

**3.A3.** Apskatām izteiksmi: 1:2:3:4:5:6:7:8

Ievietojiet tajā iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu 70. Vai var iekavas ievietot tā, lai izteiksmes vērtība būtu naturāls skaitlis, kas mazāks par 70?

**3.A4.** 2000 vieninieki uzrakstīti rindā. Pirmos divus skaitļus nosvītro un rindas galā pieraksta to summu. Pēc tam atkal nosvītro pirmos divus vēl nenosvītrotos skaitļus un rindas galā uzraksta to summu, utt. Tā turpina, kamēr paliek viens nenosvītrots skaitlis.

**a)** Cik skaitļu šajā brīdī uzrakstīts?

**b)** Kāds ir vienīgais nenosvītrotais skaitlis?

**3.A5**. Uz tāfeles ir uzrakstīti divi veseli pozitīvi skaitļi. Sākumā viens no tiem ir 2000 un otrs ir mazāks par 2000. Ja abu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais $m$ ir vesels skaitlis, ir atļauta šāda operācija: vienu no skaitļiem nodzēst un aizvietot ar $m$. Pierādīt, ka šo operāciju var veikt ne vairāk kā desmit reizes. Uzrādīt piemēru, kurā šī operācija ir veikta desmit reizes.

**3.A6.** Tabula sastāv no $4\times4$ rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis. Katrai rūtiņai visās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 10. Aprēķināt visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. (Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

### B GRUPA

**3.B1.** Slēdži ir izvietoti tabulas $40\times50$ veidā. Katram slēdzim ir divi stāvokli: "ieslēgts" un "izslēgts". Pārslēdzot slēdzi, tā stāvoklis un jebkura tajā pašā rindā vai tajā pašā kolonnā esoša slēdža stāvoklis nomainās uz pretējo. Pierādīt, ka slēdžu tabulu ar secīgām slēdžu pārslēgšanām var pārveidot no stāvokļa, kurā visi slēdži ir izslēgti, uz stāvokli, kurā visi slēdži ir ieslēgti, un noskaidrot mazāko pārslēgšanu skaitu, ar kuru to var izdarīt.

**3.B2.** Uzzīmējiet punktu A un tādu slēgtu lauztu līniju, ka katrai taisnei, kas iet caur A, ir tieši 10 kopīgi punkti ar šo lauzto līniju.

**3.B3.** Uz 5 kartītēm uzrakstīts pa skaitlim; vismaz viens no tiem nav nulle. Apskatīsim visas summas, kuras var iegūt, saskaitot uz trim kartītēm uzrakstītos skaitļus. Kāds lielākais daudzums no šīm summām var būt 0?

**3.B4.** Saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma nosacījumiem noskaidrojiet, kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa.

**3.B5.** Seši draugi visu dienu spēlēja basketbolu. Ik pa brīdim trīs no viņiem izdzēra pa glāzei ūdens. Vakarā viņi konstatēja, ka visi izdzēruši dažādu glāžu skaitu. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais izdzerto glāžu daudzums?

**3.B6.** Plaknē uzzīmētas n taisnes tā, ka katra no tām krusto tieši 2000 citas. Kāds var būt n?

## 4. CETURTĀ NODARBĪBA

### A GRUPA

**4.A1.** Ievietojiet izteiksmē 2 : 2 - 3 : 3 - 4 : 4 - 5 : 5 iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu cik iespējams liela. (Nav jāpierāda, ka lielāku vērtību iegūt nevar).

**4.A2.** Uzzīmējiet tādu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas savā starpā. (Paskaidrojums: divi nogriežņi krustojas, ja tiem ir tieši viens kopīgs punkts, kas nav galapunkts nevienam no šiem abiem nogriežņiem.)

**4.A3.** Vai taisnība, ka no katru 10 pēc kārtas sekojošu gadu kalendāriem vismaz viens noderētu 2001.gadam? (Kalendārs ir derīgs, ja datumi ir pareizajās nedēļas dienās).

**4.A4.** Dotas 200 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Puse no tām sver pa 100 gramiem katra, puse - pa 101 gramu katra. Doti sviras svari bez atsvariem. Jāizveido divas monētu kaudzītes, lai to svari atšķirtos, bet monētu daudzumi tajās būtu vienādi. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu to var izdarīt?

**4.A5.** Pasaku mežā Pieneņu pļaviņā dzīvo 50 rūķīši, Ozolu pakalnā – 60 rūķīši, bet Sūnu ciemā – 120 rūķīši. Daudzas līkumotas taciņas savieno savā starpā gan šīs, gan vēl citas vietas mežā, bet rūķīši citur nedzīvo. Kur Velēnu vecītim jāpušķo Ziemassvētku egle, lai kopējais attālums, kas rūķīšiem līdz tai jānoiet, būtu vismazākais? (Velēnu vecītis egli var uzburt jebkurā vietā; rūķīši mežā pārvietojas tikai pa taciņām.)

**4.A6.** Kvadrātveida režģī 8 rindās un 8 kolonnās aug 64 eglītes. Tās visas ir dažāda garuma. Sprīdītis katrā rindā apsedza divas īsākās eglītes, bet Sniegbaltīte katrā kolonnā divas īsākās eglītes ierušināja sniegā. Pierādīt, ka vismaz trīs eglītes ir gan apsegtas, gan ierušinātas sniegā.

### B GRUPA

**4.B1.** Konferencē sapulcējušies 10 politiķi. Daži no tiem vienmēr melo, pārējie vienmēr runā patiesību. Uz jautājumu "Vai, Jūs neskaitot, starp pārējiem vairāk ir meļu vai godīgu cilvēku?" seši no klātesošajiem atbildēja: "vairāk ir meļu". (Pārējiem četriem šo jautājumu neuzdeva.) Cik starp sapulcējušamies bija meļu?

**4.B2.** Skat. A grupas 2. uzdevumu, ja jāuzzīmē sešstūris.

**4.B3.** Kāds mazākais skaits malu var būt daudzstūrim, kura malu skaits ir nepāra skaitlis un kuru var sagriezt paralelogramos? (Par paralelogramu sauc četrstūri, kuram ik divas pretējās malas savā starpā ir paralēlas.)

**4.B4.** Dotas 5 pēc ārējā izskata neatšķiramas monētas. Trīs no tām sver vienādi; abas atlikušās arī sver vienādi, bet to svars atšķiras no pārējo triju monētu svara. Doti sviras svari bez atsvariem. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu var garantēti atrast kaut vienu no trim vienādajām monētām?

**4.B5.** Kuri no desmit skaitļiem 11; 101; 1001; 10001; ... 10000000001 ir pirmskaitļi?

**4.B6.** Burvju meža mala ir taisna līnija. Sprīdītis atrodas mežā 4 km attālumā no tā malas. Viņš to zina, bet nezina, uz kuru pusi atrodas meža mala. Pieņemsim, ka Sprīdītis var pārvietoties pa jebkuras formas ceļu, kādu viņš izvēlas. Izdomājiet, kā Sprīdītim rīkoties, lai garantēti izkļūtu no meža, noejot ne vairāk kā

**a)** 40 km,

**b)** 28 km. (Uzskatām, ka mežs ir tā apburts, ka Sprīdītis redz meža malu tikai tad, kad jau nonācis pie tās.)

## 5. PIEKTĀ NODARBĪBA

### A GRUPA

**5.A1.** Naturālu pāra skaitli x dalot ar 11, iegūst tādu pašu atlikumu, kā dalot to ar 17. Kāda ir mazākā iespējamā x vērtība?

**5.A2.** Visi naturālie skaitļi, kas nesatur savā pierakstā nevienu no cipariem 0; 7; 8; 9, uzrakstīti viens aiz otra augošā secībā. Kurš skaitlis atrodas 2001. vietā?

**5.A3.** Izdomājiet kaut vienu figūru, kam vienlaicīgi piemīt trīs īpašības:

**a)** tās laukums ir 6,

**b)** ar to var pilnīgi aplīmēt kubu, kura izmēri ir $1\times1\times1$,

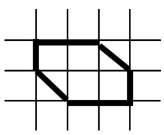
**c)** ar četrām tādām figūrām var pilnīgi aplīmēt kubu, kura izmēri ir $2\times2\times2$.

**5.A4.** Skaitlis A ir trīsciparu skaitlis, un tam ir tieši 4 dalītāji. Cik dalītāju var būt sešciparu skaitlim, kuru iegūst, divas reizes pēc kārtas uzrakstot A?

**5.A5.** Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa. Sākotnēji tieši vienā rūtiņā dzīvo baktērija. Pirmās minūtes beigās tā rada otro paaudzi - divas jaunas baktērijas; katra no tām iemitinās rūtiņā, kurai ar tās radītājas apdzīvoto rūtiņu ir kopīga mala. Otrās minūtes beigās katra otrās paaudzes baktērija rada divas jaunas baktērijas, kas novietojas plaknē pēc līdzīga likuma, utt. Nevienā rūtiņā nevar vienlaicīgi būt vairāk par vienu baktēriju; neviena baktērija nepazūd un savu uzturēšanās vietu nemaina.

Parādiet: var gadīties tā, ka šādā procesā rodas četras jaunas baktēriju paaudzes (neskaitot pirmo paaudzi, kas sastāvēja no vienas baktērijas).

**5.A6.** Parādiet, ka 4. zīm. redzamo rūtiņu lapā uzzīmēto sešstūri var sagriezt trīs daļās, no kurām iespējams salikt kvadrātu.



4. zīm.

### B GRUPA

**5.B1.** Papīra strēmeli, kas redzama 5. zīm., sagriezt a) 6, b) 7 gabalos tā, lai uz tiem uzrakstītie naturālie skaitļi būtu pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi (t.i., lai katriem diviem no tiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1).

| |
|---|
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

5. zīm.

**5.B2.** Skaitli sauksim par ķēdes skaitli, ja tas iegūstams, uzrakstot vienu aiz otra dažādus (vismaz divus) pirmos naturālos skaitļus. Piemēram, ķēdes skaitļi ir 12; 12345; 1234567891011. Pierādiet, ka divu ķēdes skaitļu reizinājums nevar būt ķēdes skaitlis.

**5.B3.** Vai kuba virsmu var (bez brīvām vietām un bez pārklāšanās) aplīmēt ar
**a)** 6 vienādiem taisnstūriem, kas nav kvadrāti,
**b)** 6 vienādiem paralelogramiem, kas nav taisnstūri?

**5.B4.** Kādā partijā ir 9 deputāti. Kādu lielāko komisiju skaitu var izveidot, lai katrā komisijā būtu tieši 3 no viņiem un nekādi divi deputāti kopā nedarbotos vairāk kā vienā komisijā?

**5.B5.** Vai A grupas 5. uzdevumā iespējams, ka rodas piecas jaunas paaudzes?

**5.B6.** Vienādsānu šaurleņķa trijstūra augstums vienāds ar pamatu. Ar diviem taisniem griezieniem sagriezt šo trijstūri četrās daļās, no kurām var salikt kvadrātu.

## 6. Sestā nodarbība

### A grupa

**6.A1.** Olimpiādē piedalījās votivappas un šillišallas. Veiksmīgi startējušo votivappu bija tikpat, cik neveiksmīgi startējušo šillišallu. Vai vairāk bija veiksmīgi startējušo dalībnieku vai dalībnieku – šillišallu?

**6.A2.** Katram naturālam trīsciparu skaitlim atrodam tā ciparu reizinājumu. Aprēķiniet visu šo reizinājumu summu.

**6.A3.** Karalis apstaigā visus šaha galdiņa lauciņus katru tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgriežas uz sākotnējā lauciņa. Vai var būt, ka viņš izdarījis tieši **a)** vienu, **b)** divus gājienus pa diagonāli?
(Karalis ar vienu gājienu pāriet uz lauciņu, kuram ir kopīga mala vai stūris ar to lauciņu, kurā viņš atrodas pirms šī gājiena izdarīšanas.)

**6.A4.** Kvadrāta mala ir 1 m gara. Tas sagriezts taisnstūros, un katrā taisnstūrī ierakstīts tā īsākās malas garums. Pierādīt, ka visu ierakstīto garumu summa nav mazāka par 1 m.

**6.A5.** Skaitļu virknē 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; … katrs skaitlis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo summu. Pierādīt, ka šīs virknes pirmo 100 locekļu kvadrātu summa vienāda ar tās 100-ā un 101-ā locekļa reizinājumu.

**6.A6.** Cik ir četrciparu skaitļu, kuros ir kaut viens nepāra cipars?

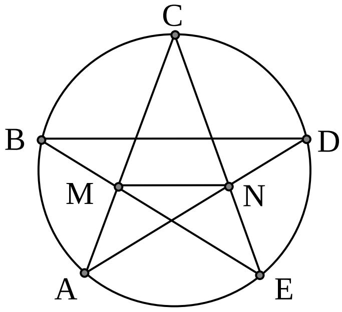
### B grupa

**6.B1.** Jānim ir vairākas monētas. Ir zināms: lai arī kādu naudas summu no 1 santīma līdz 1 latam ieskaitot viņam nāksies samaksāt, viņš to varēs precīzi izdarīt, neprasot izdot atlikumu.
Kāds ir mazākais iespējamais Jāņa monētu skaits?

**6.B2.** Skat. A grupas 2. uzdevumu, ja apskata piecciparu skaitļus.

**6.B3.** Sprīdītis stāvēja apaļa laukuma centrā. Gar laukuma malu ar seju pret viņu nostājās rūķīši. Katrs rūķītis vai nu vienmēr melo, vai vienmēr saka patiesību. Sprīdītis palūdza katram rūķītim pasacīt par savu kaimiņu pa labi, vai tas ir vai nav melis. Pamatojoties uz saņemtajām atbildēm, Sprīdītis varēja nekļūdīgi noteikt, kāda daļa rūķīšu bija meļi.
Kāda daļa rūķīšu bija meļi?

**6.B4.** Punkti A; B; C; D; E sadala riņķa līniju 5 vienādās daļās (skat. 6. zīm.).
Kāda daļa no piecstaru zvaigznes laukuma ir četrstūra BDNM laukums?



6. zīm.

**6.B5.** Kādu lielāko daudzumu šaha zirdziņu var novietot kvadrātā ar izmēriem $5\times5$ rūtiņas, lai neviens neapdraudētu nevienu citu?

**6.B6.** Maija sagatavoja Līgo vakaram 33 siera rituļus. Vai noteikti var vienu rituli sagriezt divos gabalos tā, lai sieru varētu sadalīt divās daļās ar vienādām masām, pie tam katra daļa saturētu 16 veselus rituļus un vienu no sagrieztā rituļa gabaliem?