Materiāls ņemts no grāmatas: A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons. "Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. - 2006. gadā. Zīmējumu numerācija saglabāta kā grāmatā.

27. MĀCĪBU GADS (2000/ 2001)

ATRISINĀJUMI

1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.A1. Piemēram, tā: $4 \to 2 \to 1 \to 14 \to 7$ (iegūti **1**, **2** un **7**); $4 \to 2 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3$ (iegūti **3** un **6**); $4 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5$ (iegūts **5**); No jau iegūtā skaitļa **6** var tālāk iegūt **4** un **8**: $6 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4$.
No jau iegūtā skaitļa **1** var tālāk iegūt skaitli **9**: $1 \to 14 \to 144 \to 72 \to 36 \to 18 \to 9$.

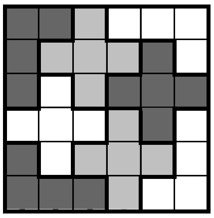
1.A2. Taisnstūra perimetrs (apkārtmērs) ir $2 \cdot 3\text{cm} + 2 \cdot 10\text{cm} = 26\text{cm}$. Divos kilometros ir 200000 cm. Dalām 200000 ar 26 ar atlikumu: $200000 = 26 \cdot 7692 + 8$ Tātad skudra 7692 reizes aprāpos taisnstūrim apkārt un vēl pēc tam veiks 8cm. Tāpēc ir divas iespējas: 1) ja skudra no A devās virzienā uz B, tad viņa kustību beigs uz malas BC; 2) ja skudra no A devās virzienā uz D, tad viņa kustību beigs uz malas AD.

1.A3. Apzīmēsim šos pirmskaitļus ar x, y un z. Tad $x^2 + y^2 + z^2 = 414$. Tā kā x^2, y^2, z^2 ir naturāli skaitļi un to summa ir pāra skaitlis, tad vai nu tie visi ir pāra skaitļi, vai arī viens no tiem ir pāra skaitlis, divi – nepāra. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Tā kā $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \neq 411$, tad pirmais gadījums nav iespējams. Otrajā gadījumā pieņemam, ka $x = 2$. Tad $y^2 + z^2 = 410$. Izrakstām dažu pirmo nepāra pirmskaitļu kvadrātus: $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$. Tā kā visi pirmskaitļu kvadrāti ir pozitīvi, tad gan y, gan z jāmeklē starp skaitļiem 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19. Pārbaudot visas šīs y vērtības, redzam, ka der tikai $y = 7$ (tad $z = 19$), $y = 11$ (tad $z = 17$), $y = 17$ (tad $z = 11$) un $y = 19$ (tad $z = 7$).
Atbilde. Meklējamie pirmskaitļi ir 2; 7; 19 vai 2; 11; 17.

1.A4. Atbilde. 600 skaitļi.
Risinājums. Skaitļu pierakstā var lietot ciparus 0; 1; 2; 3; 4; 5. Iedalīsim visus Jānītim patīkamos skaitļus divās klasēs: **1)** tie skaitļi, kas nesatur ciparu 0. Šo skaitļu cipari (neņemot vērā atkārtošanos un kārtību) var būt **(*)** 123; 124; 125; 134; 135; 145; 234; 235; 245; 345. No katriem trim dažādiem nenulles cipariem a, b, c var izveidot divpadsmit Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars a. Tie ir aabc, aacb, abac, acab, abca, acba, baac, caab, baca, caba, bcaa, cbaa. Tāpat var izveidot 12 Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars b, un 12 Jānītim patīkamus skaitļus, kuros atkārtojas cipars c. Tātad no cipariem a, b, c var izveidot 36 Jānītim patīkamus skaitļus.
Tā kā pašus ciparus a, b, c var izvēlēties 10 veidos (skat. (*)), tad apskatāmajā klasē ir $36 \cdot 10 = 360$ Jānītim patīkami skaitļi. **2)** skaitļi, kas satur ciparu 0. Šo skaitļu cipari (neņemot vērā atkārtošanos un kārtību) var būt 012, 013, 014, 015, 023, 024, 025, 034, 035, 045. Aplūkosim ciparus 0, b un c, kur b un c ir dažādi no

nulles atšķirīgi cipari. No tiem var izveidot 6 skaitļus, kuros atkārtojas cipars "nulle" (šie skaitļi ir b00c, c00b, b0c0, c0b0, bc00, cb00) un 9 skaitļus, kuros atkārtojas cipars b (šie skaitļi ir bb0c, bbc0, b0bc, bcb0, b0cb, bc0b, cbb0, cb0b, c0bb); līdzīgi var izveidot 9 skaitļus, kuros atkārtojas cipars c. Tātad no 0; b; c var izveidot 6 + 9 + 9 = 24 Jānītim patīkamus skaitļus. Tā kā pašus ciparus b un c var izvēlēties 10 veidos, tad apskatāmajā klasē ir $24 \cdot 10 = 240$ Jānītim patīkami skaitļi. Tātad pavisam ir 360 + 240 = 600 Jānītim patīkamu skaitļu.

1.A5. Jā, var. Skat., piem., A30. zīm.



A30. zīm.

1.A6. Pirmā iespēja: baltajā kastē 1, sarkanajā no 2 līdz 99 ieskaitot, zaļajā kastē 100. Tādā gadījumā, izvelkot kartiņas no baltās un sarkanās kastes, summa ir no 3 līdz 100; izvelkot kartiņas no baltās un zaļās kastes, summa ir 101; izvelkot kartiņas no sarkanās un zaļās kastes, summa ir no 102 līdz 199. Tātad summas zināšana ļauj noskaidrot prasīto. Otrā iespēja: baltajā kastē skaitļi 1; 4; 7; ...; 97; 100 (t.i., skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 1), sarkanajā kastē skaitļi 2; 5; 8; ...; 95; 98 (t.i., skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 2), zaļajā kastē skaitļi 3; 6; 9; ...; 96; 99 (t.i., skaitļi, kas dalās ar 3). Izvelkot kartiņas no baltās un sarkanās kastes, summa dalās ar 3; izvelkot tās no baltās un zaļās kastes, summa dod atlikumu 1, dalot ar 3; izvelkot tās no sarkanās un zaļās kastes, summa dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad summas zināšana ļauj noskaidrot prasīto. Piezīme. B grupas 6. uzdevuma risinājumā pierādīts, ka citu, būtiski atšķirīgu kartiņu sadalījumu, kas garantē trika izdošanos, nav.

B GRUPA

1.B1. Dotā uzdevuma vietā risināsim apgriezto uzdevumu: vai no jebkura naturāla skaitļa starp 1 un 100 ieskaitot var iegūt 4, ja ar vienu gājienu skaitli var reizināt ar 2 vai arī nosvītrot tam pēdējo ciparu (ja šis cipars ir 0 vai 4)? A grupas 1. uzdevuma risinājumā parādīts, ka šādā ceļā 4 var iegūt no visiem viencipara naturāliem skaitļiem. Atliek aplūkot divciparu naturālos skaitļus un skaitli 100. Ievērosim, ka nosvītrot skaitlim pēdējo ciparu 0 nozīmē šo skaitli izdalīt ar 10, bet nosvītrot tam pēdējo ciparu 4 nozīmē vispirms no tā atņemt 4 un tad iegūto rezultātu izdalīt ar 10. Tāpēc pieļautā cipara nosvītrošana visos gadījumos samazina skaitli vismaz 10 reizes.

a) Apskatīsim sekojošu tabulu

Skaitlis, kas beidzas ar ciparu	Pareizina to ar 2	Rezultāts lielāks par sākotnējo skaitli	Rezultāts beidzas ar ciparu
0			
1	2 reizes	4 reizes	4
2	1 reizi	2 reizes	4
3	3 reizes	8 reizes	4
4			
5	1 reizi	2 reizes	0
6	2 reizes	4 reizes	4
7	1 reizi	2 reizes	4
8	3 reizes	8 reizes	4

Ja iegūtajam rezultātam nosvītro pēdējo ciparu (4 vai 0), tas samazinās vismaz 10 reizes; tātad tagad iegūtais skaitlis ir mazāks par sākotnējo.

b) Ja sākotnējais skaitlis beidzas ar 0 vai 4, tad, nosvītrojot pēdējo ciparu, arī iegūst naturālu skaitli, kas mazāks par sākotnējo.

c) Pārveidojumi $19 \to 38 \to 76 \to 304 \to 30 \to 3$,
$29 \to 58 \to 116 \to 232 \to 464 \to 46 \to 92 \to 184 \to 18$,
$39 \to 78 \to 156 \to 624 \to 62 \to 124 \to 12$,
$49 \to 98 \to 196 \to 784 \to 78 \to 156 \to 312 \to 624 \to \to 62 \to 124 \to 12$,
$59 \to 118 \to 472 \to 944 \to 94 \to 9$,
$69 \to 138 \to 276 \to 552 \to 1104 \to 110 \to 11$,
$79 \to 158 \to 316 \to 632 \to 1264 \to 126 \to 252 \to$
$\to 504 \to 50$,
$89 \to 178 \to 356 \to 712 \to 1424 \to 142 \to 284 \to 28$
$99 \to 198 \to 396 \to 792 \to 1584 \to 158 \to 316 \to$
$\to 632 \to 1264 \to 126 \to 252 \to 504 \to 50$ parāda, ka arī skaitļus no 1 līdz 100, kas beidzas ar ciparu 9, var pārveidot par mazākiem naturāliem skaitļiem. No a), b) un c) izriet, ka visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot var pārveidot par 4. Tiešām, pieņemsim, ka ir tādi skaitļi, kurus tā pārveidot nevar. Apzīmēsim ar n mazāko no tiem. Tad $n \geq 10$ (jo saskaņā ar A grupas 1. uzdevumu visus viencipara skaitļus var pārveidot par 4). Tā kā n – mazākais no "nepārveidojamiem" skaitļiem, tad skaitļus 1, 2, 3, ..., n-1 var pārveidot par tādu skaitli k, ka k < n. Tā kā k ir viens no skaitļiem 1, 2, 3, ..., n-1, tad k var tālāk pārveidot par 4. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka n nevar pārveidot par 4. Tātad šis pieņēmums ir nepareizs, un tāda naturāla skaitļa n, ka $1 \leq n \leq 100$ un n nevar pārveidot par 4, nemaz nav.

1.B2. Atbilde: pildspalva – 19 sant., flomasters – 26 sant., klade – 55 sant. Atrisinājums. Apzīmēsim pildspalvas, flomastera un klades cenas santīmos attiecīgi ar p, f un k. Tad (1) p + f + k = 100, (2) k > 2f, (3) 3f > 4p, (4) 3p > k. Tā kā k un f – naturāli skaitļi un pirmais naturālais skaitlis, kas lielāks par 2f, ir 2f + 1, tad no (2) iegūstam (5) $k \geq 2f + 1$. Līdzīgi no (3) un (4) iegūstam (6) $3f \geq 4p + 1$, (7) $3p \geq k + 1$. No (6) iegūstam $4p \leq 3f - 1$ un tāpēc (8) $p \leq 0{,}75f - 0{,}25$. No (7) un (8) seko, ka (9) $k \leq 3p - 1 \leq 3(0{,}75f - 0{,}25) - 1 = 2{,}25f - 1{,}75$.

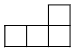
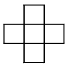
No (1), (8) un (9) seko, ka $100 = p + f + k \leq 0{,}75f - 0{,}25 + f + 2{,}25f - 1{,}75$ jeb $100 \leq 4f - 2$, no kurienes $4f \geq 102$ un $f \geq 102 : 4 = 25{,}5$. Tā kā f - naturāls skaitlis, tad (10) $f \geq 26$ Pieņemsim, ka $f \geq 27$. Tad $k > 2f \geq 54$, tāpēc $k \geq 55$; savukārt $3p > k \geq 55$, tāpēc 3p > 55 un p > 18,0333; tā kā p – naturāls skaitlis, tad $p \geq 19$. Tad $p + f + k \geq 19 + 27 + 55 = 101$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc nevar būt $f \geq 27$. Tad no (10) seko, ka (11) f = 26 No (3) iegūstam, ka 4p < 78 un p < 19,5. Tā kā p – naturāls skaitlis, tad (12) $p \leq 19$ Pieņemsim, ka $p \leq 18$. Tad no (4) seko, ka $k < 3p \leq 54$, tātad $k \leq 53$. Tad $p + f + k \leq 18 + 26 + 53 = 97$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc nevar būt $p \leq 18$. Tad no (12) seko, ka p = 19, un no (1) atrodam, ka k = 55. Pārbaude parāda, ka visi nosacījumi izpildās.

1.B3. To, ka cilvēkam X galvā ir sarkana vai zaļa cepure, apzīmēsim attiecīgi ar X ~ s un X ~ z. Pieņemsim, ka B ~ s. Tad B runā patiesību, un A, C, D, E valkā zaļas cepures, tātad melo. Bet tad iznāk, ka C ir teicis patiesību (jo viņš redz sarkano B cepuri un zaļās A, D, E cepures). Iegūta pretruna. Tātad nav taisnība, ka B ~ s. Tātad B ~ z, un B melo. No šejienes skaidrs, ka D melo, tātad D ~ z. No šejienes skaidrs, ka A melo, tāpēc A ~ z. Pieņemsim, ka E ~ z. Tad C melo, tātad C ~ z. Bet tad D runā patiesību, un tā ir pretruna. Tāpēc E ~ s. Tātad C runā patiesību, un C ~ s.

1.B4. Atbilde: 96210.

Risinājums. No diviem naturāliem skaitļiem lielāks ir tas, kurā vairāk ciparu. Ja ciparu skaits ir vienāds, tad lielāks tas, kurā lielāks pirmais cipars; ja sakrīt arī pirmie cipari, tad lielāks tas, kurā lielāks otrais cipars utt. Tā kā lielākā iespējamā cipara vērtība ir 9 un pat piecu dažādu mazāko ciparu summa ir 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9, tad mūsu meklējamā skaitlī M bez pirmā cipara nav vairāk par 4 citiem. Meklēsim M kā piecciparu skaitli, kas sākas ar 9. Apzīmēsim $M = \overline{9abcd}$. Tad a + b + c + d = 9. Skaidrs, ka $b+c+d \geq 0+1+2=3$ (saskaitām trīs mazākos ciparus). Tāpēc $a = 9-(b+c+d) \leq 6$. Meklēsim M kā piecciparu skaitli, kas sākas ar 96: $M = \overline{96bcd}$. Tagad b+c+d = 3. Tā kā $c+d \geq 0+1=1$, tad $b \leq 2$. Ņemam lielāko iespējamo b vērtību b = 2. Tad c + d = 1; lielākā iespējamā c vērtība ir 1, un tad d = 0. Esam ieguvuši sākumā minēto atbildi.

1.B5. Atbilde: to izdarīt nav iespējams.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka to ir izdevies izdarīt. Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā tā, lai stūru rūtiņas būtu melnas; tad ir 41 melna rūtiņa un 40 baltas rūtiņas. Katrā  veida figūriņā ir 2 melnas un 2 baltas rūtiņas, bet katrā  veida figūriņā melno un balto rūtiņu skaita starpība dalās ar 3 (tā ir 0, +3 vai -3). Tātad tā dalās ar 3 arī visā kvadrātā. Bet visā kvadrātā tā ir 41-40=1, kas ar 3 nedalās. Iegūta pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.

1.B6. Iedomāsimies, ka mums ir bērza, priedes un egles koka kastes. A grupas 6. uzdevuma risinājumā mēs atradām šādus divus derīgus sadalījumus:

	Bērza	Priedes	Egles
(*)	1	2; 3; 4;...;98; 99	100
(**)	1; 4; 7; ...94; 97; 100	2; 5; 8;...95; 98	3; 6; 9; ...96; 99

Tā kā kastes var nokrāsot baltā, sarkanā un zaļā krāsā 6 veidos (skat. nākošo tabulu), tad no katra no minētajiem diviem sadalījumiem var iegūt sešus kartiņu sadalījumus baltā, sarkanā un zaļā kastē.

Bērza	Priedes	Egles
b	s	z
b	z	s
s	b	z
s	z	b
z	b	s
z	s	b

Tātad pašreiz esam atraduši 12 sadalījumus. Pierādīsim, ka citu sadalījumu, kas nodrošina trika izdošanos, nav. Vispirms atzīmēsim: kartīšu sadalījums kastēs negarantē trika izdošanos tādā un tikai tādā gadījumā, ja atrodas tādi četri dažādi skaitļi a, b, c un d, ka vienlaicīgi: 1) a + b = c + d, 2) kartiņas a un b atrodas dažādās kastēs, 3) kartiņas c un d atrodas dažādās kastēs, 4) tās divas kastes, kurās atrodas a un b, nav tās pašas divas kastes, kurās atrodas c un d. (Tiešām, tādā gadījumā mākslinieks dzird to pašu skaitli gan a un b, gan c un d izvilkšanas gadījumā un nevar izvēlēties starp šīm iespējām.) Apzīmēsim kastes ar I, II, III. To, ka kartīte ar skaitli x atrodas kādā kastē, apzīmēsim ar xĪI (xĪII, xĪIII); to, ka kartīte ar skaitli x neatrodas kādā kastē, apzīmēsim ar xĻI (xĻII, xĻIII). Pieņemsim, ka kādā sadalījumā šādus četrus skaitļus a, b, c, d atrast nevar (t.i., sadalījums garantē trika izdošanos). Šķirojam divus gadījumus. A. Eksistē tāds

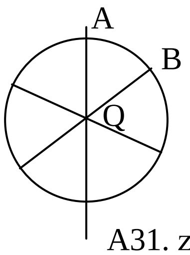
skaitlis i, ka skaitļi i, i + 1, i + 2 pieder dažādām kastēm; varam pieņemt, ka iĪI, i + 1ĪII, i + 2ĪIII. Pētīsim, kur var atrasties skaitlis i + 3 (ja tāds eksistē, t.i., ja $i+3\leq 100$) un kur – skaitlis i-1 (ja tāds eksistē, t.i., ja $i-1\geq 1$): 1) vienādība i + (i + 3) = (i + 1) + (i + 2) parāda, ka i + 3ĻII un i + 3ĻIII, Tāpēc noteikti i + 3ĪI. 2) vienādība (i - 1) + (i + 2) = i + (i + 1) parāda, ka i-1ĻI un i - 1ĻII. Tāpēc noteikti i - 1ĪIII. Līdzīgi secina, ka i + 4ĪII, i + 5ĪIII, i + 6ĪI utt., kā arī i - 2ĪII, i - 3ĪI,
i - 4ĪIII utt. Tātad šajā gadījumā mēs iegūstam sadalījumu, kas atbilst (**) (skat. risinājuma sākumu). B. Nekādi trīs pēc kārtas sekojoši skaitļi nepieder trim dažādām kastēm. Pieņemsim, ka 1ĪI. Ar n apzīmēsim mazāko skaitli, kas nepieder kastei I; pieņemsim, ka nĪIII. (Tātad n-1ĪI). Ar k apzīmēsim mazāko skaitli, kas pieder kastei III. Saskaņā ar augstāk izdarīto pieņēmumu k > n + 1. Pierādīsim, ka k = 100. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka k < 100. Tad skaitlis k + 1 uzrakstīts uz kādas kartiņas. No vienādības n + k = (n - 1) + (k + 1) seko, ka k + 1ĪI. Bet tad no vienādības n + (k + 1) = (n + 1) + k seko, ka n + 1ĪIII. Bet n + 1 < k un k ir mazākais skaitlis III kastē; iegūta pretruna. Tātad tiešām k = 100. Tātad III kastē atrodas tikai viens skaitlis 100. No vienādības (n – 1) + 100 = n + 99 seko, ka 99ĪII. Pieņemsim, ka x ir kāds no skaitļiem 2, 3, ..., 98. Pieņemsim, ka xĪI. Tad no vienādības x + 99 = (x - 1) + 100 seko, ka x - 1ĪIII. Bet jau iepriekš noskaidrojām, ka kastē III ir tikai skaitlis 100. Iegūta pretruna, tātad xĻI. Tāpēc xĪII. Esam ieguvuši sadalījumu, kas risinājuma sākumā apzīmēts ar (*). Tātad citu sadalījumu bez 12 mūsu atrastajiem nav.

2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.A1. Ievērojam, ka
$$40+39+38+\ldots+3+2+1=(40+1)+(39+2)+\ldots+(21+20)= \;=41\cdot 20=820.$$
Summu 500 iegūsim, ja pievienosim "-" zīmes tādiem saskaitāmajiem, kuru summa pašreiz ir 160: tad izteiksmes vērtība kļūs 820 – 160 + (- 160) = 500.
Acīmredzot "-" zīmju skaits būs vislielākais, ja tās pievienosim iespējami maziem saskaitāmajiem. Veidojam summu 160, izmantojot vismazākos saskaitāmos.
Ievērojam, ka 1 + 2 + 3 + ... + 16 + 17 = 153 < 160, bet 1 + 2 + 3 + ... + 17 + 18 > 160. Tātad nevar būt vairāk par 17 "-" zīmēm, un tās var pievienot, piemēram, skaitļiem 1; 2; 3; ...; 15; 16; 24.

2.A2. Taisne AQ iet caur centru. (Skat. A31. zīm.). Konstruējot līdzīgā ceļā taisni caur punktu B, centrs atradīsies šo abu taišņu krustpunktā.



A31. zīm.

2.A3. Cipariņš var nobraukt 30000 km.Divas riepas viņš visu laiku izmanto kā priekšējās, bet pārējās trīs (apzīmēsm tās ar A, B, C) kā aizmugurējās sekojošā secībā: 10000 km – A un B, 10000 km – B un C, 10000 km – A un C.
Pamatosim, ka Cipariņš nevar nobraukt lielāku attālumu.

Nobraucot 1km, priekšējā riepa nolietojas par $\frac{1}{30000}$ savas vērtības, bet aizmugurējā – par $\frac{1}{20000}$ savas vērtības. Tātad, nobraucot s km, kopējais riepu nolietojums ir $2\cdot\frac{s}{30000}+2\cdot\frac{s}{20000}$. Tā kā pavisam Cipariņš nevar nolietot vairāk par 5 riepām, tad

$$2\cdot\frac{s}{30000}+2\cdot\frac{s}{20000}\le 5$$

$$\frac{2s}{3}+s\le 50000$$

$$\frac{5s}{3}\le 50000$$

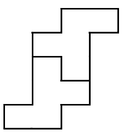
$$s\le\frac{3\cdot 50000}{5}=30000$$

2.A4. Ciparus 4; 6; 8 nevar izmantot kā vienu ciparus. Tātad tie lietoti vismaz kā desmitu cipari. Ciparus 2 un 5 var katru izmantot kā vienu ciparu augstākais vienu reizi (veidojot pirmskaitļus 2 un 5). Tāpēc meklējamā summā abi cipari 4 dod "ieguldījumu" $2\cdot 40$ vai vairāk, abi cipari 6 – "ieguldījumu" $2\cdot 60$ vai vairāk, abi cipari 8 – "ieguldījumu" $2\cdot 80$ vai vairāk, cipari 2 un 5 – attiecīgi "ieguldījumu" 20 + 2 un 50 + 5 vai vairāk, cipari 1; 3; 7; 9 – attiecīgi "ieguldījumu $2\cdot 1$; $2\cdot 3$; $2\cdot 7$; $2\cdot 9$. Tātad meklējamā summa nevar būt mazāka par $2\cdot 40+2\cdot 60+2\cdot 80+20+2+50+5+2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 7+2\cdot 9=477$.

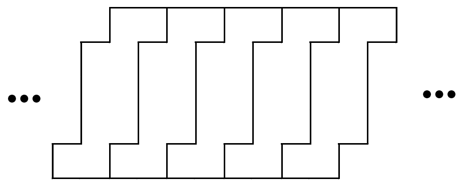
To ka tā var būt 477, parāda piemērs $2+5+23+41+47+59+61+67+89=477$.

Komentāri. **1.**Summu 477 var iegūt arī citādi. Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu nav. **2.** Pamēģiniet atrisināt līdzīgus uzdevumus, kuros a) katru nenulles ciparu lieto vienreiz (atbilde ir 207), b) katru nenulles ciparu lieto trīsreiz (atbilde ir 1107).

2.A5. A32. zīm. redzams, kā no divām dotā veida figūrām var izveidot "S burtu". Savukārt A33. zīm. redzams, kā no "S burtiem" var izveidot cik patīk garu joslu ar platumu 5 rūtiņas. Saliekot kopā divas šādas joslas, iegūstam vajadzīgo.



A32. zīm.



A33. zīm.

2.A6. Skaidrs, ka 7. un 8. kartiņas ieliktas dažādās kaudzītēs. Tātad pēc astotā gājiena abu kaudzīšu augšpusē bija baltas kartiņas.

Ievērosim: uzdevuma nosacījumi pieļauj, ka Jānis tālāk devis Andrim šādas kartiņas: 9. – sarkanu, 10. – baltu, 11. – sarkanu, 12. – baltu, ..., 18. – baltu, 19. – sarkanu, un Andris tās visas licis vienā kaudzītē. Tad šīs kaudzītes virspusē atrodas sarkana kartiņa, bet otras kaudzītes virspusē - balta. Tāpēc nākošā kartīte var būt gan balta, gan sarkana, un tās krāsa nav viennozīmīgi nosakāma.

B GRUPA

2.B1. Ievērosim, ka $2\cdot 2\cdot 2=8<9$ un $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16>15$. Tāpēc

$$\underbrace{9\cdot 9\cdot\ldots\cdot 9}_{16\text{ reizes}} > \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{3\cdot 16=48\text{ reizes}} = \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{4\cdot 12\text{ reizes}} = \underbrace{16\cdot 16\cdot\ldots\cdot 16}_{12\text{ reizes}} >$$

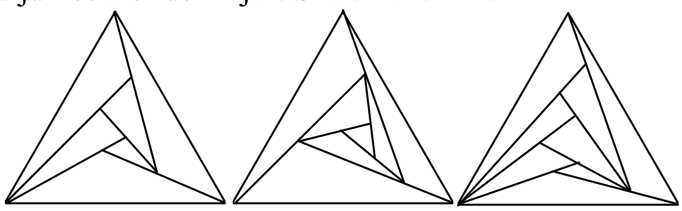
$$> \underbrace{15\cdot 15\cdot\ldots\cdot 15}_{12\text{ reizes}}$$

2.B2. Meklēsim vispirms tādus naturālus skaitļus x. Uzdevuma risinājumā mēs būtiski izmantosim faktu "divi apgalvojumi, kas apskatāmajā apgalvojumu virknē neatrodas blakus, vienlaicīgi nevar būt nepareizi". Pieņemsim, ka x nedalās ar 5. Tad x nedalās arī ar 10. Bet apgalvojumi "x dalās ar 5" un "x dalās ar 10" neatrodas blakus. Tāpēc iegūta pretruna. Tātad x dalās ar 5.

Līdzīgi iegūst, ka x dalās ar 4 un ar 3. Tātad x dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12. Apgalvojumi, kuri varētu būt nepareizi, ir x dalās ar 7; x dalās ar 8; x dalās ar 9; x dalās ar 11; x dalās ar 13.

No tiem divus blakusesošus apgalvojumus var izvēlēties tikai divos veidos. Aplūkosim abas iespējas. **A** Skaitlis x nedalās ar 7 un 8, bet dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11; 12; 13. Tātad x dalās arī ar reizinājumu $4\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13 = 25740$. Tāpēc x var būt 25740 un $3\cdot 25740 = 77220$. Tā kā $4\cdot 25740$ jau satur vairāk nekā 5 ciparus, bet $2\cdot 25740$ dalās ar 8, tad citu iespēju nav. **B** Skaitlis x nedalās ar 8 un 9, bet dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13. Tad x dalās arī ar $3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 60060$. Tā kā jau $2\cdot 60060$ satur vairāk nekā 5 ciparus, tad citu iespēju nav. Skaidrs, ka no negatīviem veseliem skaitļiem der tikai -25740, -77220; -60060, bet 0 neder, jo 0 dalās ar jebkuru naturālu skaitli.

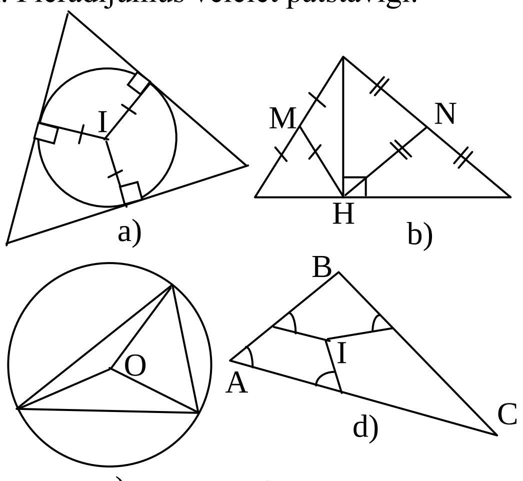
2.B3. Visos gadījumos atbilde ir "jā". Skat. A34. zīm.



A34. zīm.

2.B4. Tā kā $45^2 = 2025$, tad, izrakstot skaitļus no 1 līdz 2025 norādītajā veidā, mēs būsim aizpildījuši kvadrātu ar "1" centrā un malas garumu 45; pie tam 2025 būs šī kvadrāta labajā apakšējā stūrī. Tātad 2000 būs šī kvadrāta apakšējā malā, 25 rūtiņas pa kreisi no 2025. Tāpēc skaitlis 2000 nobīdīts attiecībā pret 1 par 22 rūtiņām uz leju un par 3 rūtiņām pa kreisi.

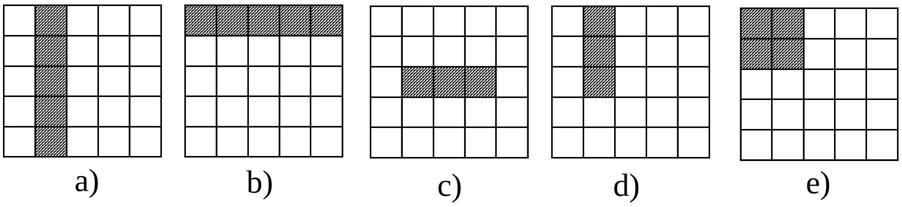
2.B5. Skat. A35. zīm. Pierādījumus veiciet patstāvīgi.



A35. zīm.

a) un d) variantā I ir ievilktās riņķa līnijas centrs, pie tam d) variantā AC ir garākā mala, bet AB - īsākā. b) variantā H ir augstuma pamats, bet M un N – malu viduspunkti. c) variantā O ir apvilktās riņķa līnijas centrs.

2.B6. Mērķi var sasniegt ar 8 gājieniem, pārkrāsojot 2.; 4.; 6.; 8. kolonnu (skaitot no kreisās puses) un 2.; 4.; 6.; 8. rindu (skaitot no lejas). Parādīsim, ka ar mazāku gājienu skaitu nepietiek. Gar galdiņa malu ir 28 rūtiņas, kas nokrāsotas pamīšus - melna, balta, ..., melna, balta. Tāpēc tur 28 vietās robežojas dažādu krāsu rūtiņas. Šīs 28 atšķirības ir jālikvidē. Pārbaudiet patstāvīgi, ka katrs gājiens likvidē augstākais 4 no šīm atšķirībām (skat. A36. zīm.), turklāt vismaz diviem gājieniem jābūt b) vai e) tipa (lai pārkrāsotu baltos stūra laukiņus); bet gan b), gan e) tipa gājieni likvidē augstākais 2 atšķirības katrs. Tāpēc ar 7 gājieniem nevar likvidēt vairāk par $5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24 < 28$ atšķirībām.



A36. zīm.

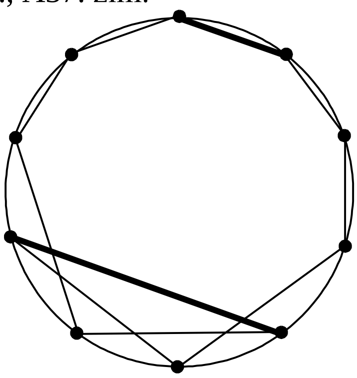
3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

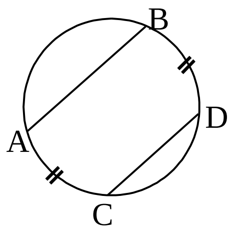
3.A1. Visās pārliešanās vai nu kādu trauku izlej tukšu, vai pielej līdz malām pilnu. Mērķi var sasniegt, piemēram, sekojoši (bultiņa parāda, no kura trauka uz kuru pārlej):

Veikto pārliešanu daudzums	30 l traukā	9 l traukā	12 l traukā
0	30	0	0
1	18	0	12
2	18	9	**3**
3	27	0	3
4	27	3	0
5	15	3	12
6	15	9	**6**

3.A2. Skat., piem., A37. zīm.



A37. zīm.



A38. zīm.

Pamatojumam atceramies, ka visi loki starp dalījuma punktiem ir vienādi un ka hordas AB un CD (skat. A38. zīm.) ir paralēlas tad un tikai tad, ja loki $\overset{\smile}{AC}$ un $\overset{\smile}{BD}$ ir vienādi savā starpā.

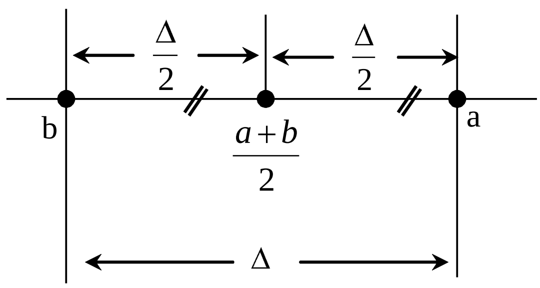
3.A3. **I** Skaitli 70 var iegūt, piemēram, kā

((1:2):3):((((4:5):6):7):8)

II Mazāku naturālu skaitli par 70 iegūt nevar. Skaitļos 2; 3; ...; 8 kopā kā pirmreizinātāji ir 7 divnieki, 2 trijnieki, 1 piecinieks un 1 septītnieks. Divnieku, piecinieku un septītnieku ir nepāra skaits. Lai izteiksmes vērtība būtu naturāls skaitlis, neviens no šiem pirmskaitļiem nedrīkst saucējā būt sastopams vairāk reižu nekā skaitītājā; tāpēc pēc saīsināšanas skaitītājā paliek vismaz pa vienam divniekam, piecniekam un septītniekam (un varbūt vēl kaut kas). Tāpēc daļas vērtība ir vismaz $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

3.A4. a) ar katru gājienu rindā esošo nenosvītroto skaitļu skaits samazinās par vienu. Tāpēc tiek izdarīti 2000 – 1 = 1999 gājieni. Tā kā ar katru gājienu uzraksta klāt vienu skaitli, tad procesa beigās rindā būs uzrakstīti 2000 + 1999 = 3999 skaitļi. b) visu nenosvītroto skaitļu summa paliek nemainīga. Tāpēc beigās tā ir tāda pati kā sākumā, t. i., 2000. Tā kā beigās tā sastāv no viena vienīgā nenosvītrotā skaitļa, tad vienīgais nenosvītrotais skaitlis ir 2000.

3.A5. Ar katru gājienu abu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) samazinās divas reizes. Tiešām, ja uz tāfeles uzrakstīti skaitļi a un b, kur $a > b$, tad: 1) ja b aizstāj ar $\frac{a+b}{2}$, tad uz tāfeles paliek $\frac{a+b}{2}$ un a, un $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$. 2) ja a aizstāj ar $\frac{a+b}{2}$, tad uz tāfeles paliek $\frac{a+b}{2}$ un b, un $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ (Ģeometrisko ilustrāciju skat. A39. zīm.)



A39. zīm.

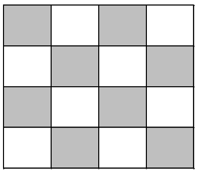
Ja operāciju veiktu 11 reizes, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu starpība samazinātos $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{11 \text{ reizes}} = 2048$ reizes. Bet sākotnēji tā bija mazāka par 2000. Tāpēc beigās tā būtu mazāka par 1; bet tā nevar būt, jo divu dažādu naturālu skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) nav mazāka par 1. Iegūta pretruna, tātad vajadzīgais pierādīts. Sekojošā piemērā aprakstīto operāciju veic 10 reizes.

Sākumā	2000; 976
Pēc 1. reizes	2000; 1488
Pēc 2. reizes	2000; 1744
Pēc 3. reizes	2000; 1872
Pēc 4. reizes	2000; 1936
Pēc 5. reizes	2000; 1968
Pēc 6. reizes	2000; 1984
Pēc 7. reizes	2000; 1992
Pēc 8. reizes	2000; 1996
Pēc 9. reizes	2000; 1998
Pēc 10. reizes	2000; 1999

3.A6. Atbilde: 60. Risinājums. Apzīmēsim dažās rūtiņās ierakstītos skaitļus ar burtiem kā parādīts A40. zīm.

a		b	II
I	c		d
e		f	
	g	III	h

A40. zīm.



A41. zīm.

5	5	5	5
5	0	0	5
5	0	0	5
5	5	5	5

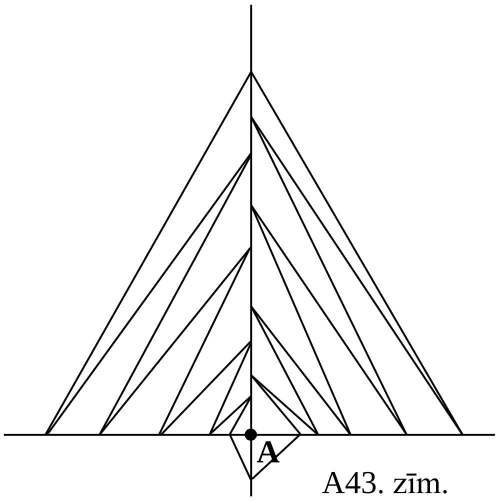
A42. zīm.

Pielietojot uzdevuma nosacījumus rūtiņai I, iegūstam a + c + e = 10; pielietojot tos rūtiņām II un III, attiecīgi iegūstam b + d = 10 un g + f + h = 10. Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam a + b + c + d + e + f + g + h = 30. Ja mēs rūtiņas izkrāsojam šaha galdiņa secībā (skat. A41. zīm.), tad redzam, ka melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 30. Skaidrs, ka līdzīgu spriedumu rezultātā atradīsim: arī baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 30. Tātad visu skaitļu summa ir 30 + 30 = 60. Skaitļu ierakstīšanas piemērs saskaņā ar uzdevuma noteikumiem dots A42. zīm. Lai risinājums būtu pilnīgs, šāds piemērs noteikti jāuzrāda, jo principā varētu gadīties, ka skaitļus uzdevumā minētajā veidā ierakstīt nemaz nevar, un tad pareizā atbilde būtu "tādas summas vispār nav".

B GRUPA

3.B1. **I** Pārslēdzot katru slēdzi tieši vienu reizi, visu slēdžu stāvokļi būs mainījušies uz pretējo sākotnējam. Pierādīsim to. Apskatām patvaļīgu slēdzi X. Šī slēdža stāvoklis augstāk aprakstītajā procesā ir mainījies tieši 89 reizes: a) pārslēdzot pašu slēdzi X, b) pārslēdzot jebkuru no 39 slēdžiem, kas ar X ir vienā kolonnā, c) pārslēdzot jebkuru no 49 slēdžiem, kas ar X ir vienā rindā. Tā kā 1 + 39 + 49 = 89 ir nepāra skaitlis, tad gala rezultātā slēdzis X ir mainījis savu stāvokli uz pretējo sākotnējam. Acīmredzot, šādā ceļā rīkojoties, mēs veicam $40 \cdot 50 = 2000$ pārslēgšanas. **II** Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 2000 pārslēgšanām uzdevumā prasītais nav sasniedzams. Pieņemsim no pretējā, ka kāds slēdzis X vispār netiek pārslēgts nevienu reizi, bet visi slēdži savu stāvokli ir mainījuši no izslēgta uz ieslēgtu. Sadalīsim pārējos slēdžus trīs grupās: **A:** tie 49 slēdži, kas ar X ir vienā rindā, **B:** tie 39 slēdži, kas ar X ir vienā kolonnā, **C:** tie slēdži, kas nav ne vienā rindā, ne vienā kolonnā ar X. Pieņemsim, ka šo grupu slēdži kopumā tiek pārslēgti attiecīgi a, b un g reizes. Tad slēdzis X maina savu stāvokli a + b reizes. Tā kā X jākļūst no izslēgta par ieslēgtu tad (1) a + b ir nepāra skaitlis Grupas A slēdzis ietekmē a pārslēgšanas (katra no tām rada 49 slēdžu stāvokļu maiņas šajā grupā) un g pārslēgšanas (katra no tām rada vienu slēdža stāvokļa maiņu šajā grupā). Kopā grupā A notikušas $49a + g$ slēdžu stāvokļu maiņas. Tā kā katrs no 49 (nepāra daudzums!) slēdžiem grupā A mainījis savu stāvokli nepāra skaitu reižu (citādi tas nebūtu kļuvis no izslēgta par ieslēgtu), tad (2) $49a + g$ ir nepāra skaitlis. Līdzīgi spriežot par grupu B, iegūstam, ka (3) $39b + g$ ir nepāra skaitlis. No (1), (2) un (3) iegūstam, ka $(a+b)+(49a+g)+(39b+g)= \;=50a+40b+2g=2(25a+20b+g)$ ir nepāra skaitlis kā trīs nepāra skaitļu summa. Bet tā ir pretruna. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un katrs slēdzis jāpārslēdz vismaz 1 reizi; tātad nepieciešamas vismaz $40 \cdot 50 = 2000$ pārslēgšanas.

3.B2. Skat., piem., A43. zīm.



A43. zīm.

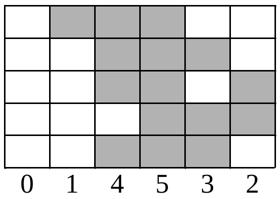
3.B3. **I** Viegli pārbaudīt: ja uz kartītēm uzrakstīti skaitļi 2; 2; -1; -1; -1, tad sešas summas ir ar vērtību 0 (katrs no divniekiem kopā ar jebkuriem diviem "-1"). Pierādīsim, ka 7 summas nevar būt 0. **II** Pieņemsim no pretējā, ka izdevies uzrakstīt uz kartītēm tādus skaitļus a; b; c; d; e, ka septiņas no šo skaitļu summām pa trīs ir 0. Šajās 7 summās kopā ir $3 \cdot 7 = 21$ saskaitāmais. Tā kā $21 > 4 \cdot 5$ un katrs saskaitāmais ir viens no pieciem uz kartiņām esošajiem skaitļiem, tad kāds no mūsu pieciem skaitļiem parādās kā saskaitāmais vairāk nekā četrās no šīm summām, tātad vismaz piecās no tām. Aplūkosim piecas summas, kuru vērtības ir 0 un kuras visas satur vienu un to pašu saskaitāmo (varam pieņemt, ka tas ir a). Tad visas piecas abu pārējo saskaitāmo summas ir vienādas. No pārējiem četriem uz kartiņām esošajiem skaitļiem b; c; d; e var izveidot sešas summas pa divi: b + c, b + d, b + e, c + d, c + e, d + e. Varam pieņemt, ka augšminētās vienādās summas pa divi ir b + c = b + d = b + e = c + d = c +e (Citi gadījumi ir analoģiski.) No abām pirmajām vienādībām seko c = d = e; tālāk no b + e = c + d seko b = c = d = e. Tātad uz kartītēm uzrakstītie skaitļi ir a; b; b; b; b. Ir tikai sešas summas pa trim skaitļiem, kurās viens no saskaitāmajiem ir a; tāpēc vismaz viena no septiņām triju saskaitāmo summām, kuru vērtība ir 0, ir b + b + b. Tāpēc b = 0. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $a \neq 0$. Bet no skaitļiem a; 0; 0; 0; 0 var izveidot tikai četras summas pa trīs, kuru vērtība ir 0. Iegūta pretruna. Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs, un septiņas summas ar vērtību nulle nav iespējamas. Tātad meklējamais maksimums ir 6.

3.B4. Aplūkosim situāciju, kad uz tāfeles atrodas 1024 nenosvītroti skaitļi. Šai brīdī ir nosvītroti 1952 vieninieki (jo 2000 – 1952 + 1952 : 2 = 1024), tātad nosvītroto skaitļu summa ir 1952. Nenosvītroto skaitļu summa saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma risinājumu ir 2000. Kad turpmākajā procesā būs nosvītroti šie

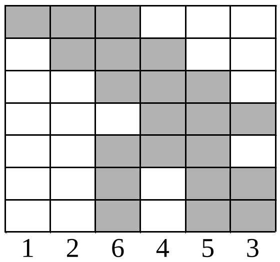
1024 skaitļi, būs uzrakstīti 512 jauni skaitļi; saskaņā ar A grupas 4. uzdevuma risinājumu to summa arī būs 2000. Līdzīgi tālāk izveidosies grupas no 256; 128; 64; 32; 16; 8; 4; 2; 1 skaitļiem katra; katrā no tām skaitļu summa būs 2000. (Pēdējā grupa sastāv no vienīgā beigās palikušā nenosvītrotā skaitļa). Tātad visu uzrakstīto skaitļu summa būs $1952+11\cdot 2000=23952$.

3.B5. Uzdevuma atrisinājums atkarīgs no tā, kā mēs saprotam vārdus "izdzēruši dažādu glāžu skaitu". Pastāv divas iespējas.

I Izdzerto glāžu skaits var būt arī 0. Tad ievērojam, ka sešu mazāko veselo nenegatīvo skaitļu summa ir 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Tātad kopā nav izdzerts mazāk par 15 glāzēm. To, ka 15 glāzes var izdzert saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, parāda tabula A44. zīm. (Kolonnas atbilst draugiem, rindiņas – brīžiem, kad kādi trīs draugi dzer pa glāzei ūdens).



A44. zīm.



A45. zīm.

II Ja mēs uzskatām, ka vārdi "izdzēruši dažādu glāžu skaitu" ietver sevī arī informāciju par to, ka katrs izdzēris vismaz vienu glāzi, tad kopējam izdzerto glāžu skaitam jābūt vismaz 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =21. To, ka tas ir iespējams, redzam tabulā A45. zīm.

3.B6. Uzdevumā minētās n taisnes kaut kā sadalās grupās tā, ka katrā grupā visas taisnes savā starpā ir paralēlas, bet dažādās grupās esošas taisnes noteikti viena ar otru krustojas (principā varētu būt, ka grupa sastāv arī tikai no vienas taisnes, t. i., tai nav paralēlu). Apskatīsim vienu šādu grupu; pieņemsim, ka tajā ir x taisnes. Tad katra no tām krusto tieši n - x citas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem n-x=2000, t. i., x = n - 2000. Tātad katrā paralēlu taišņu grupā ir tieši n - 2000 taisnes. Tā kā visas n taisnes sadalās šādās grupās pa n – 2000 taisnēm katrā, tad n jādalās ar n – 2000. Tātad skaitlim n noteikti jāapmierina 2 nosacījumi:

(1) n > 2000;

(2) n dalās ar n – 2000.

Apzīmēsim n : (n – 2000) = k, kur k – naturāls skaitlis. (Skaidrs, ka k ir paralēlo taišņu grupu skaits.) Tad $n = k\cdot(n-2000)$, no kurienes

$$n=\frac{2000k}{k-1}=\frac{2000(k-1)+2000}{k-1}=2000+\frac{2000}{k-1}.$$

Tā kā n ir naturāls skaitlis, tad skaitlim 2000 jādalās ar $k-1$. Tā kā $2000=2\cdot 10^3=2^4\cdot 5^3$, tad $k-1$ iespējamās vērtības ir $2^a\cdot 5^b$, kur $0\le a\le 4$, $0\le b\le 3$. Iegūstam tabulā A46. zīm. attēlotās iespējas.

a	b	$k-1=2^a \cdot 5^b$	k - grupu skaits	$\frac{2000}{k-1}$	n - taišņu skaits
0	0	1	2	2000	4000
0	1	5	6	400	2400
0	2	25	26	80	2080
0	3	125	126	16	2016
1	0	2	3	1000	3000
1	1	10	11	200	2200
1	2	50	51	40	2040
1	3	250	251	8	2008
2	0	4	5	500	2500
2	1	20	21	100	2100
2	2	100	101	20	2020
2	3	500	501	4	2004
3	0	8	9	250	2250
3	1	40	41	50	2050
3	2	200	201	10	2010
3	3	1000	1001	2	2002
4	0	16	17	125	2125
4	1	80	81	25	2025
4	2	400	401	5	2005
4	3	2000	2001	1	2001

A46. zīm.

Tagad pierādīsim, ka visas atrastās n vērtības der. Tiešām, pieņemsim, ka $n = 2000 + \frac{2000}{k-1}$, kur $\frac{2000}{k-1} = y$, y – vesels skaitlis. Tad $2000 = (k-1)y$ un $n = 2000 + y = (k-1)y + y = k \cdot y$. Izveidosim k grupas, katrā pa y taisnēm (tā kā $\frac{2000}{k-1} = y$, tad katrā grupā ir $\frac{2000}{k-1}$ taisnes) tā, ka visas vienas grupas taisnes ir savā starpā paralēlas, bet taisnes no dažādām grupām – nē. Tad katra taisne krusto visas taisnes no pārējām k-1 grupām, t. i., katra taisne krusto $(k-1) \cdot \frac{2000}{k-1} = 2000$ citas taisnes.

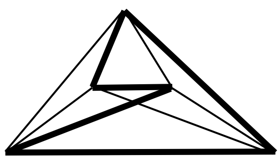
4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.A1. Viegli pārbaudīt, ka ((2:((2-3):3))-4):((4-5):5)=((2:(-1:3))-4):(-1:5)=(-6-4):(-1/5)=50.

Mēs neprotam pierādīt, ka lielāka vērtība nav sasniedzama, bet arī nezinām, kā tādu iegūt.

4.A2. Skat., piem., A47. zīm.



A47. zīm.

Ar biezākajām līnijām novilktas piecstūra malas, ar tievākām – diagonāles.

4.A3. Atcerēsimies, ka 2001. gada 1. janvāris bija pirmdiena. Līdz ar to uzdevuma jautājumu var izsacīt arī tā: vai taisnība, ka no katriem 10 pēc kārtas sekojošiem gadiem viens gads ir tāds īsais gads, kas sākas ar pirmdienu?

Saskaņā ar Eiropā lietojamā t. s. Gregora kalendāra definīciju gari gadi ir tie gadi, kuru gadskaitlis apmierina vienu no divām tālāk minētajām prasībām: 1) dalās ar 4 un nedalās ar 100,

vai arī 2) dalās ar 400.

Tātad, piemēram, 1996; 2000; 2004. gads ir garais gads, bet 2100. gads nav garais gads.

Ievērosim, ka $365 = 52 \cdot 7 + 1$ un $366 = 52 \cdot 7 + 2$. Tāpēc (n + 1)-ā gada 1. janvāris nedēļas dienu sarakstā ir par vienu dienu "tālāk" nekā n-ā gada 1. janvāris, ja n-tais gads ir īsais gads, un par divām dienām "tālāk", ja n-tais gads ir garais gads.

No šejienes iegūstam A48. zīm. tabulu.

Gads	Nedēļas diena, kurā ir 1.janvāris
2001.	Pirmdiena
2002.	Otrdiena
2003.	Trešdiena
2004.	Ceturtdiena
2005.	Sestdiena
2006.	Svētdiena
2007.	Pirmdiena
2008.	Otrdiena
2009.	Ceturtdiena
2010.	Piektdiena
2011.	Sestdiena
2012.	Svētdiena
2013.	Otrdiena
2014.	Trešdiena
2015.	Ceturtdiena
2016.	Piektdiena
2017.	Svētdiena

A48. zīm.

Redzam, ka 2008. – 2017. gadu kalendāri neviens neder 2001. gadam.

4.A4. Parādīsim, ka pietiek ar 1 svēršanu. Uzliekam uz kausiem pa 67 monētām. Ja svari nav līdzsvarā, vajadzīgās monētu kaudzītes atrodas uz kausiem. Ja svari ir līdzsvarā, tad par meklējamām kaudzītēm der malā palikušās 66 monētas un jebkuras 66 monētas no viena svaru kausa. Pierādīsim to.

Tiešām, ja malā palikušās 66 monētas kopā sver tikpat, cik 66 monētas no 1. kausa, tad šajos komplektos ir vienāds skaits (apzīmēsim to ar x) "vieglo" monētu. Tad uz 1. kausa atrodas vai nu x, vai x + 1 "vieglā" monēta (atkarībā no tā, vai 67-ā monēta uz šī kausa ir "smagā" vai "vieglā"). Atbilstoši uz otrā svaru kausa ir vai nu x, vai x + 1 "vieglā monēta (jo kausi atradās līdzsvarā). Tātad pavisam vieglo monētu ir vai nu $2x + x = 3x$, vai $2(x + 1) + x = 3x + 2$. Bet ne vienādojumam $3x = 100$, ne vienādojumam $3x + 2 = 100$ nav atrisinājuma veselos skaitļos. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un malā palikušo monētu svars noteikti atšķiras no 1. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara. Tieši tāpat pierāda, ka malā palikušo monētu kopējais svars noteikti atšķiras no 2. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara.

Skaidrs, ka pavisam bez svēršanas prasītās monētu kaudzītes atrast nevar. Tātad meklējamais minimums ir 1.

4.A5. Atbilde: egle jāpušķo Sūnu ciemā.

Pierādījums. Pieņemsim, ka egle uzburta Sūnu ciemā, un īsākais ceļš no Pieneņu pļaviņas līdz tai ir d_1, bet īsākais ceļš no Ozolu pakalna – d_2. Tad kopējais rūķīšiem noejamais attālums ir $50d_1 + 60d_2$.

Pānesīsim egli uz kādu citu vietu un pieņemsim, ka īsākais ceļš no Sūnu ciema līdz šai vietai ir d. Tad Sūnu ciema rūķīšiem uz šo egli kopā jānoiet vismaz attālums $120 \cdot d$. Savukārt neviens rūķītis no Pieneņu pļaviņas nevar nokļūt uz egli, noejot īsāku ceļu nekā d_1 - d. Tiešām, ja no Pieneņu pļaviņas uz jauno egles atrašanās vietu varētu nokļūt, noejot ceļu x, kur $x < d_1 - d_2$, tad rūķīši no Pieneņu pļaviņas varētu nokļūt uz veco egles atrašanās vietu Sūnu ciemā, noejot ne lielāku attālumu kā $x + d < d_1 - d + d = d_1$. (Viņi vispirms ietu uz egles jauno atrašanās vietu un tad uz Sūnu ciemu pa to ceļu, pa kuru Sūnu ciema rūķīši dodas uz jauno egles atrašanās vietu.) Bet tā ir pretruna ar d_1 izvēli – d_1 ir īsākais ceļš no Pieneņu pļaviņas līdz Sūnu ciemam.

Tāpēc rūķīšiem no Pieneņu pļaviņas līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $50(d_1 - d)$. Līdzīgi pierāda, ka rūķīšiem no Ozolu pakalna līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $60(d_2 - d)$. Tātad visiem rūķīšiem līdz egles jaunajai atrašanās vietai jānoiet kopā vismaz attālums $120d + 60(d_2 - d) + 50(d_1 - d) = 50d_1 + 60d_2 + 10d$, kas ir vairāk par kopējo noejamo attālumu gadījumā, ja egle uzburta Sūnu ciemā.

Redzam, ka noejamo attālumu summa ir vismazākā, ja egle atrodas Sūnu ciemā.

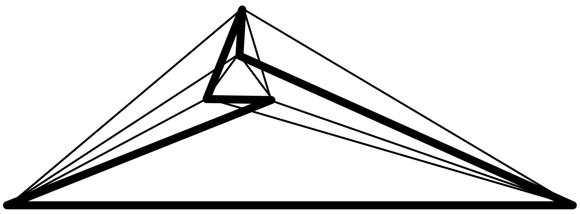
4.A6. Skaidrs, ka pati īsākā no visām eglītēm ir arī īsākā gan savā rindā, gan savā kolonnā, bet otrā īsākā no visām eglītēm ir vai nu īsākā vai otrā īsākā gan savā rindā, gan kolonnā. Tāpēc šīs abas eglītes (apzīmēsim tās ar A un B) noteikti ir gan apsegtas, gan ierušinātas.

Tālāk šķirosim trīs gadījumus. **I** A un B neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā. Tādā gadījumā trešā īsākā eglīte C var būt vienā rindā ar augstākais vienu no eglītēm A un B; tātad savā rindā tā noteikti ir vai nu īsākā , vai otrā īsākā, un tātad tā ir apsegta. Līdzīgi pierāda, ka tā ir ierušināta. **II** A un B atrodas vienā rindā a. Aplūkosim īsāko eglīti no tām, kas neatrodas šajā rindā; apzīmēsim to ar C. Eglīte C savā rindā noteikti ir visīsākā, tātad tā ir apsegta. Savā kolonnā tā var būt garāka vienīgi par rindas a eglīti, tāpēc tā savā kolonnā ir vai nu īsākā, vai otrā īsākā; tāpēc tā noteikti ir ierušināta. **III** A un B atrodas vienā kolonnā. Šo gadījumu aplūko līdzīgi II gadījumam.

B GRUPA

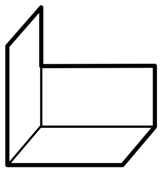
4.B1. Atbilde: 5 meļi. Risinājums. Pieņemsim, ka meļu ir mazāk nekā 5. Tad patieso politiķu (turpmāk pp) ir vismaz 6. Tā kā meļu ir ne vairāk par 4, bet aptaujāti 6 politiķi, tad vismaz viens no aptaujātajiem ir pp; apzīmēsim to ar A. Bez A grupā ir 5 pp un 4 meļi, tātad A atbilde ir nepatiesa. Iegūta pretruna ar faktu, ka A ir pp. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un meļu nav mazāk par 5. Pieņemsim, ka meļu ir vairāk nekā 5 (tātad vismaz 6). Līdzīgi kā iepriekš secinām, ka starp aptaujātajiem ir melis B, kurš runājis patiesību. Tātad meļu nav vairāk par 5. Ja meļu ir tieši 5 un pp - arī tieši 5, tad atbilde "vairāk ir meļu" ir patiesa, ja to saka pp, un aplama, ja to saka melis. Tātad šī atbilde der.

4.B2. Skat. A49. zīm. Ar biezām līnijām attēlotas daudzstūra malas, ar tievām – tā diagonāles.

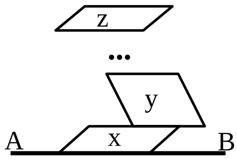


A49. zīm.

4.B3. <u>Atbilde</u>: 7 malas. <u>Risinājums.</u> Piemēru ar 7 malām skat. A50. zīm.



A50. zīm.



A51. zīm.

Pierādīsim, ka apskatāmā tipa daudzstūrim nevar būt ne 3, ne 5 malas.

Pieņemsim, ka paralelogramos sagriezts kāds daudzstūris, kam viena no malām ir AB. Uz malas AB vismaz viens paralelograms x balstās ar savu malu. Uz x pretējās malas vismaz viens paralelograms y balstās ar savu malu, utt. Šai paralelogramu ķēdītei kaut kur jābeidzas ar kādu paralelogramu z (skat. A51. zīm.). Paralelograma z augšējā mala noteikti sakrīt ar kādu daudzstūra malu pa taisnes nogriezni, citādi ķēdīti varētu vēl turpināt. Tātad katrai daudzstūra malai var atrast citu malu, kas tai paralēla. No šejienes uzreiz skaidrs, ka apskatāmais daudzstūris nav trijstūris.

Pieņemsim, ka tas ir piecstūris. Ņemam divas tā blakus malas x un y; tās nav paralēlas. Saskaņā ar iepriekš pierādīto eksistē mala z, kas paralēla x, un mala t, kas paralēla y. Piektajai malai jābūt paralēlai vai nu ar x un z, vai ar y un t. Tātad no apskatāmā piecstūra malām 3 savā starpā paralēlas. Viegli saprast: ja no piecām piecstūra malām izvēlas trīs malas, tad divas no tām ir blakusmalas. Bet tā ir pretruna, jo blakusmalas nevar būt paralēlas.

Tātad apskatāmajam daudzstūrim nevar būt arī 5 malas.

4.B4. Skaidrs, ka bez svēršanām to izdarīt nevar. Iedomāsimies, ka izdarīta viena svēršana. Šķirojam trīs gadījumus: 1) uz kausiem bija pa vienai monētai. Jebkura svēršanas rezultāta gadījumā jebkura monēta var būt gan no trim vienādajām, gan no divām vienādajām, jo mēs nezinām, kuras monētas ir smagākas; 2) uz kausiem bija pa divām monētām. Ja kausi atrodas līdzsvarā, tad malā palikusī monēta ir viena no trim vienādajām. Tomēr, ja viens kauss nosveras uz leju (un tā var gadīties!), tad jebkura monēta var būt gan no trim vienādajām, gan no divām vienādajām; 3) ja uz kausiem ir atšķirīgs monētu daudzums, mēs vispār neiegūstam nekādu lietderīgu informāciju, jo var gadīties, ka monētu masas ir, piemēram, 10g un 11g, un tādā gadījumā tas kauss, uz kura ir vairāk monētu nekā uz otra, noteikti nosvērsies uz leju.

Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas arī, izdarot vienu svēršanu. Parādīsim, ka ar divām svēršanām pietiek.

Apzīmējam monētas ar A, B, C, D, E. Tās monētas, kuru masas ir lielākas, sauksim par smagām, pārējās - par vieglām. Pirmajā svēršanā novietojam uz viena kausa monētas A un B, bet uz otra kausa - monētas C un D. Pastāv divas iespējas. I Kausi atrodas līdzsvarā. Tad uz katra no tiem ir pa vienai smagajai un vienai vieglajai monētai (jo četru vienādas masas monētu nav). Tāpēc malā palikusī monēta E der par meklējamo. II Viens kauss nosveras uz leju; varam pieņemt, ka tas ir kauss ar A un B. Tad ar otro svēršanu salīdzinām monētu komplektus A; C un B; D. Atkal, ja svari līdzsvarā, tad monēta E der par meklējamo. Pieņemam, ka viens kauss nosveras uz leju; varam uzskatīt, ka tas ir kauss ar A un C (otrs gadījums tiek aplūkots līdzīgi). Apzīmējot monētu masas ar atbilstošajiem mazajiem burtiem, iegūstam a + b > c + d, a + c > b + d.

Tad A noteikti ir smagā monēta; tiešām, ja A būtu vieglā, tad no 1. svēršanas seko, ka B - smagā, C un D – vieglās, bet no 2.svēršanas rezultāta seko, ka C – smagā, B un D – vieglās. Iegūta pretruna. Līdzīgi pierāda, ka D ir vieglā monēta. Tālāk no nevienādībām seko, ka B un C ir vienādas masas (ja viena no tām būtu vieglā, bet otra – smagā monēta, tad vienas nevienādības vietā pastāvētu vienādība). Tāpēc par meklējamo monētu var ņemt gan B, gan C.

4.B5. Skaitļi 11 un 101 ir pirmskaitļi; to viegli pārbaudām tieši.

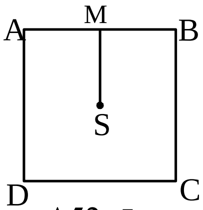
Skaitļi 1001; 100001; 10000001; 1000000001 dalās ar 11 (varam pārbaudīt tieši vai izmantot dalāmības pazīmi ar 11).

Skaitļi 1000001 un 10000000001 dalās ar 101. (visvieglāk to ievērot, pierakstot šos skaitļus formā $10^6 + 1 = 100^3 + 1$ un $10^{10} + 1 = 100^5 + 1$ un izmantojot formulas $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ un $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ – pārbaudiet tās patstāvīgi.)

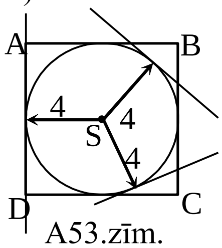
Mēģinājumu ceļā pārliecināmies, ka $10001 = 73 \cdot 137$ un $100000001 = 17 \cdot 5882353$.

Tātad vienīgie pirmskaitļi no apskatāmajiem skaitļiem ir 11 un 101.

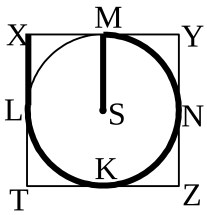
4.B6. **I** Ja Sprīdītis no sākuma atrodas punktā S, tad, noejot maršrutu SMBCDAM (skat. A52. zīm., kur ABCD – kvadrāts ar malas garumu 8km, S – tā centrs, M – malas AB viduspunkts), Sprīdītis būs nogājis 36km. Šai laikā viņš noteikti nonāks meža malā, jo katrai taisnei , kas atrodas 4km attālumā no S, ir kopīgi punkti ar kvadrāta kontūru (skat.A53. zīm.).



A52.zīm.



A53.zīm.



A54.zīm.

II Apskatām A54. zīm., kur riņķa līnija ar rādiusu 4 km un centru S ievilkta kvadrātā XYZT. Punkti M, N, K un L ir pieskāršanās punkti. Ja Sprīdītis iet pa līniju SMNKLX, kas sastāv no taisnes nogriežņiem SM un LX un riņķa līnijas loka MNKL, viņš noiet ceļu

$$4\text{km} + \frac{3}{4} \cdot (2\pi \cdot 4\text{km}) + 4\text{km} = 4\text{km} \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\pi\right) < 4\text{km} \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot 3{,}2\right) = 4\text{km} \cdot (2 + 3 \cdot 1{,}6) =$$

$$= 4\text{km} \cdot 6{,}8 = 27{,}2\text{km} < 28\text{km}.$$

To, ka Sprīdītis noteikti izkļūs no meža, pierāda tāpat kā **I** risinājumā.

5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.A1. Mazākais naturālais pāra skaitlis ir 2. Dalot 2 gan ar 11, gan ar 17, dalījumā iegūst 0 un atlikumā 2. Tātad uzdevuma atbilde ir x = 2. Atradīsim visus x, kam piemīt uzdevumā minētā īpašība. Apzīmēsim meklējamā skaitļa x nepilnos dalījumus ar 11 un ar 17 atbilstoši ar m un n, bet atlikumu – ar r. Tad x = 11m + r; x = 17n + r.

No šejienes iegūstam $x - r = 11m$, $x - r = 17n$. Tātad x - r dalās gan ar 11, gan ar 17. Tā kā skaitļu 11 un 17 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad no šejienes seko: x - r dalās ar $11 \cdot 17$ jeb ar 187. tātad $x - r = 187 \cdot k$ un $x = 187k + r$. Tā kā r ir atlikums, dalot ar 11 un 17, tad $0 \le r < 11$ un $0 \le r < 17$. Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina sekojoši skaitļi: a) 2; 4; 6; 8; 10 (pie k = 0), b) $187 \cdot k + r$, kur k = 2; 4; 6; … un r = 0; 2; 4; 6; 8; 10 (k – pāra skaitlis), c) $187 \cdot k + r$, kur k = 1; 3; 5; … un r = 1; 3; 5; 7; 9 (k – nepāra skaitlis).

5.A2. Apskatāmo skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 1; 2; 3; 4; 5; 6 (varbūt tikai daži vai pat tikai viens no tiem). Skaidrs, ka vispirms rakstīti viencipara skaitļi, pēc tam – divciparu skaitļi utt. Vispirms noskaidrosim, cik ciparu ir mūsu meklējamam skaitlim (apzīmēsim to ar x). Acīmredzot virknē ir 6 viencipara skaitļi 1; 2; 3; 4; 5; 6. Divciparu skaitļus var iegūt, katram no sešiem pieļaujamiem viencipara skaitļiem galā pierakstot jebkuru no sešiem pieļaujamiem cipariem. Tāpēc divciparu skaitļu virknē ir $6 \cdot 6 = 36$. Līdzīgi iegūstam, ka trīsciparu skaitļu virknē ir $36 \cdot 6 = 216$, četrciparu skaitļu – $216 \cdot 6 = 1296$, bet piecciparu skaitļu – $1296 \cdot 6 = 7776$.

Tā kā $6 + 216 + 1296 < 2001$, bet $6 + 216 + 1296 + 7776 > 2001$, tad x ir piecciparu skaitlis. Turklāt, tā kā 6 + 216 + 1296 = 1518, tad x starp piecciparu skaitļiem ir (2001 - 1518)-ais jeb 483-ais. No piecciparu skaitļiem vispirms uzrakstīti skaitļi, kas sākas ar 1. Tie viens no otra atšķiras ar četru pēdējo ciparu veidoto skaitli (skat. A55. zīm.):

$$\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{4-ciparu skaitlis}}$$

A55. zīm.

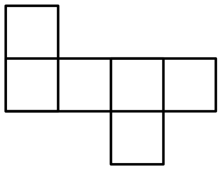
Tā kā četrciparu skaitļu, kas veidoti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6, ir $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, tad mūsu virknē ir 1296 piecciparu skaitļi, kas sākas ar 1. Tā kā 483 < 1296, tad x sākas ar 1. Tātad x ir 483-ais piecciparu skaitlis, kas sākas ar 1. Starp piecciparu skaitļiem, kas sākas ar 1, vispirms uzrakstīti visi skaitļi, kam otrais cipars ir 1 (to ir $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, skat. A56. zīm.), tad - visi skaitļi, kam otrais cipars ir 2 (arī to ir 216) utt.

$$\boxed{1}\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{3-ciparu skaitlis}}$$

A56. zīm.

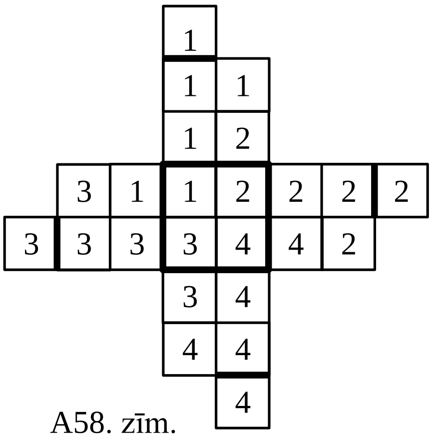
Tā kā $2 \cdot 216 < 483$ un $3 \cdot 216 > 483$, tad skaitļa x otrais cipars ir 3. Turklāt, tā kā 216 + 216 = 432, tad x ir (483-432)-ais jeb 51-ais no tiem piecciparu skaitļiem, kam pirmais cipars ir 1, bet otrais cipars ir 3. Līdzīgi spriežot tālāk, secinām: tā kā 36 < 51 un $2 \cdot 36 > 51$, tad x trešais cipars ir 2, turklāt x ir (51 – 36)-ais jeb 15-ais no tiem skaitļiem, kas sākas ar $\overline{132}$. Tālāk, tā kā $2 \cdot 6 < 15$ un $3 \cdot 6 > 15$, tad x ir (15-12)-ais jeb trešais no tiem skaitļiem, kas sākas ar $\overline{1322}$. Tātad x = 13223.

5.A3. Viena no šādām figūrām attēlota A57. zīm. (rūtiņas malas garums ir 1). Acīmredzams, ka ar to var aplīmēt kubu ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$ tā, ka katra rūtiņa pārklāj vienu kuba skaldni.



A57. zīm.

Tagad aplūkosim A58. zīm. attēloto figūru, kas sastāv no 4 tādām figūrām, kāda attēlota A57. zīm. (vienas kopijas sešas rūtiņas apzīmētas ar vienu un to pašu ciparu.)



A58. zīm.

Viegli redzēt, ka, salokot šo figūru pa biezajām līnijām, iegūstam tāda kuba virsmu, kura šķautnes garums ir 2. Tātad ar četrām A57. zīm. parādītās figūras kopijām var aplīmēt kubu, kura izmēri ir $2 \times 2 \times 2$.

5.A4. Apzīmēsim $A = \overline{abc}$, kur a, b, c – cipari un $a \neq 0$. Tad sešciparu skaitlis, par kuru runā uzdevumā, ir $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc} = = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$.

Divi no dalītājiem ir 1 un $\overline{abc}$. Acīmredzot $\overline{abc}$ dalās ar vismaz vienu pirmskaitli p, kas atšķiras no paša $\overline{abc}$. Pastāv divas iespējas: 1) $\overline{abc}$ nedalās ar citiem pirmskaitļiem, izņemot p. Tad $\overline{abc}$ ir pirmskaitļa p pakāpe: $\overline{abc} = p^k$, un $\overline{abc}$ dalītāji ir 1; p; p^2; …; p^{k-1}; p^k. Tā kā dots, ka $\overline{abc}$ ir tieši 4 dalītāji, tad $\overline{abc} = p^3$, un $\overline{abc}$ dalītāji ir 1; p; p^2; p^3. 2) $\overline{abc}$ dalās ar vēl kādu citu pirmskaitli q. Tad $\overline{abc}$ noteikti ir dalītāji 1; p; q; $\overline{abc}$. Tā kā $\overline{abc}$ ir tieši 4 dalītāji, tad citu dalītāju tam nav. Tāpēc $\overline{abc} = pq$. Tagad analizēsim šos gadījumus sīkāk:

1) ja $\overline{abc} = p^3$, tad $1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot p^3$. Iespējami divi apakšgadījumi:

1.1) p ir kāds no skaitļiem 7; 11; 13. Pieņemsim vispirms, ka $p = 7$; tad $1001 \cdot \overline{abc} = 7^4 \cdot 11 \cdot 13$. Acīmredzams, ka skaitlim $7^4 \cdot 11 \cdot 13$ ir $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ dalītāji – visi skaitļi $7^x \cdot 11^y \cdot 13^z$, kur $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$ un $0 \leq z \leq 1$, pie tam x; y; z – veseli skaitļi. Tā kā $7^3 = 343$ - trīsciparu skaitlis, tad šāds gadījums tiešām iespējams, un atbilde "20 dalītāji" der. Ja p = 11 vai p = 13, tad p^3 nav trīsciparu skaitlis, tāpēc šie apakšgadījumi nav jāpēta. (Starp citu, pat ja 11^3 vai 13^3 būtu trīsciparu skaitlis, mēs atkal iegūtu atbildi "20 dalītāji").

1.2) p nav neviens no skaitļiem 7; 11; 13. Tad $1001 \cdot \overline{abc} = p^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, un šim skaitlim ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ dalītāji – visi skaitļi $p^x \cdot 7^y \cdot 11^z \cdot 13^t$, kur x, y, z, t – veseli skaitļi, $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja $p = 5$ (tad $p^3 = 125$ ir trīsciparu skaitlis). Tātad arī atbilde "32 dalītāji" der.

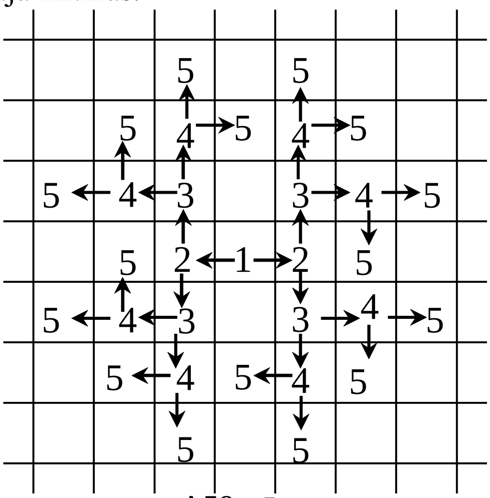
2) ja $\overline{abc} = pq$, tad $1001 \cdot \overline{abc} = p \cdot q \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, p un q – dažādi pirmskaitļi. Iespējami trīs apakšgadījumi:

2.1) ne p, ne q nesakrīt ne ar 7, ne ar 11, ne ar 13. Tad skaitlim $1001 \cdot \overline{abc}$ ir $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ dalītāji – visi skaitļi $p^x \cdot q^y \cdot 7^z \cdot 11^t \cdot 13^v$, kur x, y, z, t, v – veseli skaitļi, katrs no kuriem ir vai nu 0, vai 1. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 31 un q = 29; tad $p \cdot q$ ir trīsciparu skaitlis.

2.2) viens no skaitļiem p un q sakrīt ar kādu no skaitļiem 7; 11; 13, bet otrs – nē. Kā iepriekš iegūstam, ka $1001 \cdot \overline{abc}$ ir $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ dalītāji. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 11 un q = 29. 2.3) viens no skaitļiem p, un q sakrīt ar vienu no skaitļiem 7; 11; 13, bet otrs - ar citu. Kā iepriekš iegūstam, ka $1001 \cdot \overline{abc}$ ir $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ dalītāji. Šāds gadījums iespējams, piemēram, ja p = 11 un q = 13.

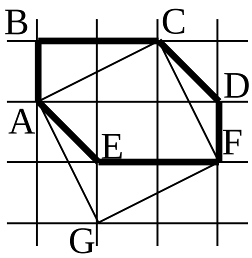
Tātad skaitlim $\overline{abcabc}$ var būt 18; 20; 24; 32 dalītāji.

5.A5. Vienu no iespējām skat. A59. zīm. Rūtiņā ierakstītais numurs norāda, kuras paaudzes baktērija tajā mitinās.

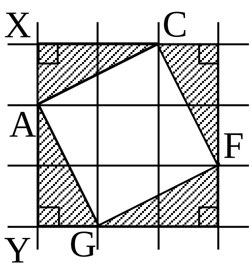


A59. zīm.

5.A6. Skat. A60. zīm., kur daudzstūri iezīmēti kvadrātisku rūtiņu režģī.



A60. zīm.



A61. zīm.

No trijstūru vienādības pazīmēm viegli seko, ka $\Delta ABC = \Delta GEF$ un $\Delta AEG = \Delta CDF$. Tāpēc, sagriežot doto sešstūri ABCDFE pa nogriežņiem AC un CF, no iegūtajām daļām var salikt četrstūri ACFG. Pierādīsim, ka tas ir kvadrāts. Tiešām, (skat. A61. zīm.), iesvītrotie trijstūri ir savā starpā vienādi (pazīme mlm), tāpēc ACFG visas malas ir vienādas. Tālāk, $\angle XAC + \angle YAG = \angle XAC + \angle XCA = 180^\circ - \angle AXC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Tāpēc $\angle CAG = 180^\circ - (\angle XAC + \angle YAG) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Līdzīgi pierāda, ka arī citi ACFG leņķi ir taisni. Tā kā ACFG visas malas ir vienādas un visi leņķi ir taisni, tad tas ir kvadrāts.

B GRUPA

5.B1. Varam griezt sekojoši:

a)

1	2 3	4	5	6 7	8 9

. Ievērosim, ka 1 dalās tikai ar 1, 4 dalās tikai ar 1; 2; 4, bet skaitļi 23; 5; 57; 89 ir pirmskaitļi, tātad dalās tikai ar 1 un paši ar sevi.

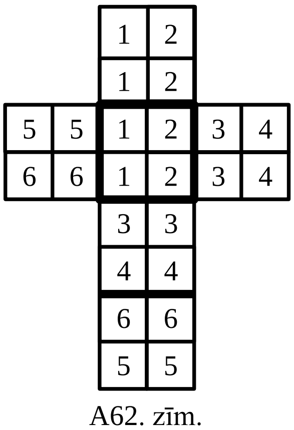
b)

1	2 3	4	5	6	7	8 9

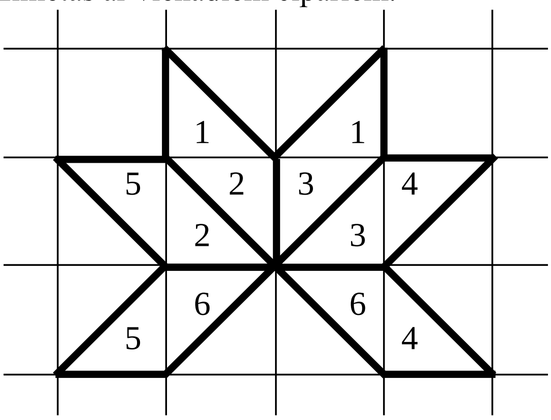
un gabalu ar skaitli "6" apgriežam "ar kājām gaisā", tādējādi iegūstot skaitļus 1; 23; 4; 5; 9; 7; 89. Pierādīsim, ka bez šādiem nestandarta paņēmieniem 7 skaitļi, kas ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, nav iegūstami. Tiešām, lai iegūtu 7 gabalus, jāizdara 6 griezieni. Augstākais četri no tiem var būt aiz nepāra cipariem (aiz 1; 3; 5; 7). Tāpēc vismaz divi griezieni būs aiz pāra cipariem. Bet abi skaitļi, kam pēdējie cipari ir pāra cipari, dalās ar 2, tātad to lielākais kopīgais dalītājs nav 1.

5.B2. Pierādīsim, ka divu ķēdes skaitļu reizinājuma otrais cipars noteikti nav 2. Tad vajadzīgais būs pierādīts. Pieņemsim, ka vienā ķēdes skaitlī A ir a cipari, bet otrā ķēdes skaitlī B ir b cipari. Tad $12\underbrace{00...0}_{a-2} \le A < 13\underbrace{00...0}_{a-2}$ un $12\underbrace{00...0}_{b-2} \le B < 13\underbrace{00...0}_{b-2}$. Tā kā 12×12=144 un 13×13=169, tad no šejienes seko, ka $144\underbrace{00...0}_{a+b-4} \le A \cdot B < 169\underbrace{00...0}_{a+b-4}$. Tātad $A \cdot B$ otrais cipars ir 4; 5 vai 6. Tātad $A \cdot B$ nav ķēdes skaitlis.

5.B3. a) jā, var. Skat. A62. zīm. kuba virsmas izklājumu rūtiņu lapā, kur vienam taisnstūrim piederošās rūtiņas apzīmētas ar vienādiem cipariem.



A62. zīm.



A63. zīm.

b) jā, var. Skat. A63. zīm. kuba virsmas izklājumu rūtiņu lapā. Trijstūrīši, kas nonāk vienā skaldnē, apzīmēti ar vienādiem cipariem.

5.B4. <u>Atbilde:</u> 12 komisijas. a) tas, ka 12 komisijas var izveidot, redzams A64. zīm., kur tabulas kolonnām atbilst dažādas komisijas.

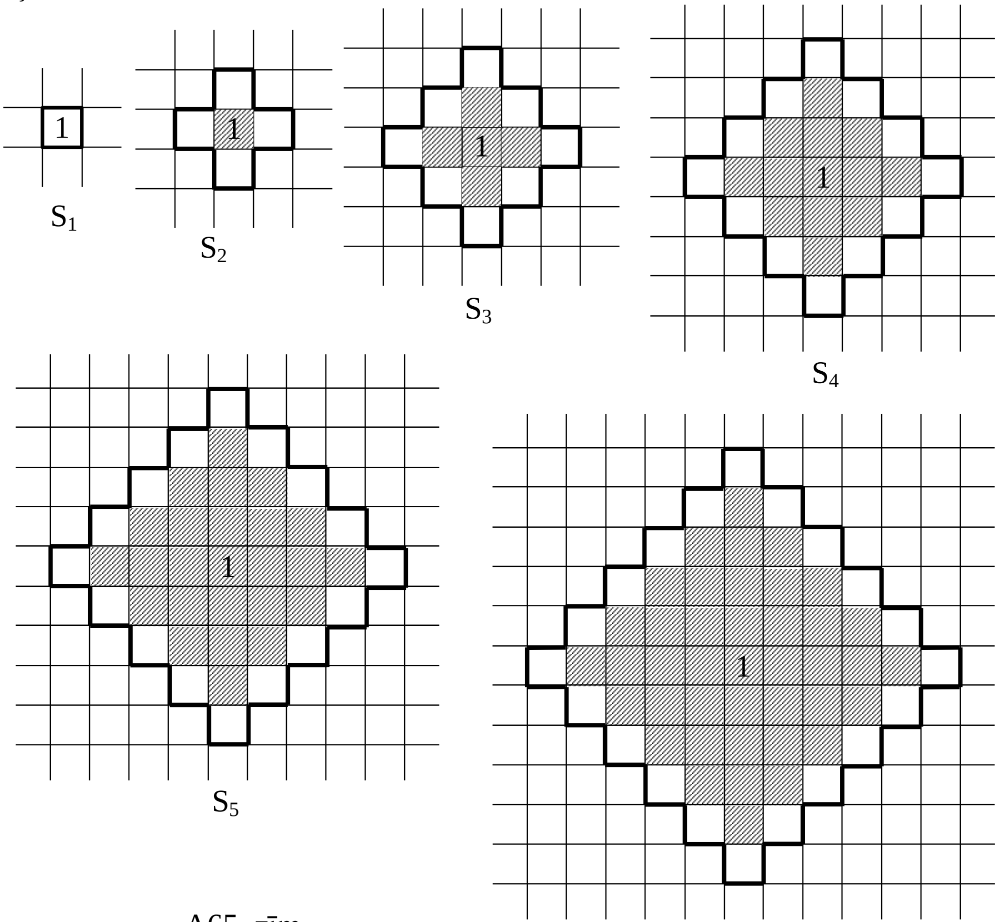
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

A64. zīm.

b) pierādīsim, ka vairāk par 12 komisijām izveidot nevar. No 9 deputātiem var izveidot $9 \cdot 8 : 2 = 36$ dažādus pārus (deputātu kārtība pārī nav svarīga). Katrā komisijā {X; Y; Z} sastopami trīs no šiem pāriem: XY, XZ, YZ. Tā kā neviens no šiem pāriem nedrīkst būt sastopams vairāk nekā vienā komisijā, tad komisiju nav vairāk par $36 : 3 = 12$.

5.B5. Atbilde: nē, nav iespējams.

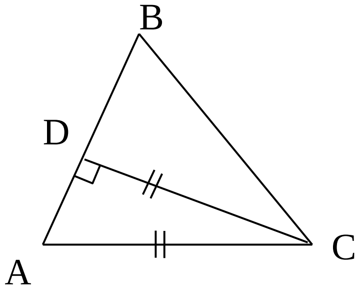
Risinājums. Apzīmēsim apgabalu, kurā vispār var parādīties kāda no pirmo n paaudžu baktērijām, ar S_n. Skaidrs, ka S_{n+1} sastāv no S_n rūtiņām un no tām rūtiņām, kas atrodas blakus kādai no S_n rūtiņām. Apgabali S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6 parādīti A65. zīm., katrs nākošais iegūts no iepriekšējā, pievienojot tam blakus rūtiņas.



A65. zīm.

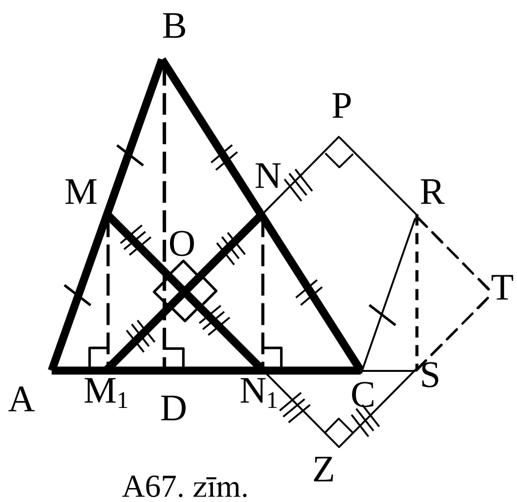
Kā redzams, S_6 satur 61 rūtiņu. Tātad pirmajās 6 paaudzēs kopā nevar būt vairāk nekā 61 baktērija. Bet pirmajās 6 paaudzēs kopā jābūt $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ baktērijām, un $63 > 61$. Tātad 6 paaudzēm vietas nepietiek.

5.B6. Parādīsim, ka prasītajā veidā var sagriezt jebkuru šaurleņķu trijstūri, kam augstums vienāds ar pamatu. (Ne tikai vienādsānu trijstūri). Vispirms atzīmēsim, ka augstums, kas vienāds ar pamatu noteikti vilkts pret pamatu, nevis pret sānu malu. Tiešām, pretējā gadījumā (skat. A66. zīm.)



A66. zīm.

taisnleņķa trijstūrī ADC hipotenūza AC būtu vienāda ar kateti CD – pretruna.



A67. zīm.

Pieņemsim, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris ar augstumu BD, pie tam AC = BD. Apzīmēsim ar M un N attiecīgi malu AB un BC viduspunktus, bet ar M_1 un N_1 - attiecīgi M un N projekcijas uz pamata BC (skat. A67. zīm.) Tad MN = 0,5AC (viduslīnijas īpašība trijstūrī ABC), $M_1M = 0{,}5 \cdot BD$ un $N_1N = 0{,}5 \cdot BD$ (viduslīnijas īpašība trijstūros BAD un BCD).

Tā kā AC = BD, tad $MM_1 = NN_1 = MN$ **(1)**

Tā kā $MN \parallel AC$, $M_1M \parallel BD$ un $N_1N \parallel BD$, tad no tā, ka $BD \perp AC$, seko, ka $MM_1 \perp MN$ un $NN_1 \perp MN$ **(2)**.

No (1) un (2) seko, ka M_1MNN_1 ir kvadrāts. Tāpēc $OM_1 = OM = ON = ON_1$ un

$\angle M_1OM = \angle NOM = \angle NON_1 = \angle N_1OM_1 = 90^O$ **(3)**

Mēs pierādīsim, ka uzdevuma prasības var izpildīt, izdarot griezienus MN_1 un NM_1. Uzzīmējam četrstūri NPRC, kas simetrisks (tātad arī vienāds) četrstūrim NOMB attiecībā pret punktu N, un trijstūri N_1ZS, kas simetrisks (tātad arī vienāds) vienādsānu taisnleņķa trijstūrim N_1OM_1 attiecībā pret punktu N_1. Pēc konstrukcijas O, N, P atrodas uz vienas taisnes; tāpat uz vienas taisnes atrodas O, N_1, Z. Bez tam $OP = 2 \cdot ON$ un $OZ = 2 \cdot ON_1$, tātad $OP = OZ$. Pagarināsim PR un ZS līdz krustpunktam T; iegūstam četrstūri OPTZ. Pēc konstrukcijas $\angle OPT = \angle POM = 90^O$ un $\angle OZT = \angle N_1OM_1 = 90^O$. Tātad OPTZ ir taisnstūris ar vienādām blakus malām OP un OZ; tāpēc tas ir kvadrāts. Ja mēs pratīsim pierādīt, ka $AMOM_1 = CRTS$, uzdevums būs atrisināts. Ērtības labad turpmāk apzīmēsim AC = 2a (tad $M_1N_1 = 0{,}5 \cdot AC = a$) un $OM_1 = OM = ON = ON_1 = b$. Ievērojam, ka $CS = N_1S - N_1C = M_1N_1 - N_1C = a - N_1C$ un

$AM_1 = AC - M_1N_1 - N_1C = 2a – a - N_1C = a - N_1C$.

Tātad $CS = AM_1$ **(4)**

Saskaņā ar konstrukciju CR = BM = AM **(5)**

Saskaņā ar konstrukciju

$$\angle RCS = 180^O - \angle BCR - \angle BCA =$$
$$= 180^O - \angle CBA - \angle BCA = \angle BAC \qquad \mathbf{(6)}$$

No (4), (5) un (6) pēc pazīmes mlm seko, ka

$$\Delta RCS = \Delta MAM_1 \qquad \mathbf{(7)}$$

Mēs jau pierādījām, ka OPTZ ir kvadrāts ar malas garumu 2b. Tāpēc RT = PT – PR = 2b – b = b; tātad RT = MO **(8)**

Līdzīgi TS = TZ – ZS = 2b – b =b; tātad $TS=OM_1$ **(9)**

Ievērojam, ka arī $\angle RTS = 90^{o} = \angle MOM_1$ **(10)**

No (8), (9) un (10) pēc pazīmes mlm seko, ka

$$\Delta RTS = \Delta MOM_1 \quad \textbf{(11)}$$

No (7) un (11) seko, ka $RTSC = MOM_1A$, ko arī vajadzēja pierādīt. Tātad trijstūri sagriežot iegūtās daļas MOM_1A, M_1ON_1, NCN_1O un BNOM var salikt kopā tā, lai iegūtu kvadrātu OPTZ. Uzdevums atrisināts.

6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.A1. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka šillišallu skaits = v. st. šillišallu skaits + n. st. šillišallu skaits = v. st. šillišallu skaits + v. st. votivappu skaits $\geq$ v. st. dalībnieku skaits, pie tam "≥" zīmes vietā ir "=" zīme tad un tikai tad, ja neviens veiksmīgi startējušais dalībnieks nav vienlaikus gan votivappa, gan šillišalla.

(Piezīme: parasti olimpiādēs votivappas ir vienas cilts, bet šillišallas – otras cilts rūķīši, tomēr šoreiz tas nav viennozīmīgi pateikts uzdevuma nosacījumos.)

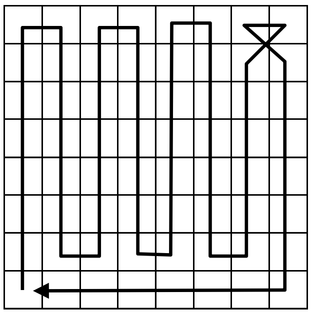
6.A2. Atbilde**:** 45×45×45=91125.

Atrisinājums. Aplūkosim triju vienādu iekavu reizinājumu

$$R = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot$$
$$\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot$$
$$\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9)$$

Atverot iekavas, mēs iegūsim reizinājumu xyz summu, kur x – patvaļīgs skaitlis no 1. iekavas, y – patvaļīgs skaitlis no 2. iekavas, z – patvaļīgs skaitlis no 3. iekavas. Skaidrs, ka katram trīsciparu skaitlim $\overline{xyz}$, starp kura cipariem nav nevienas nulles, apskatāmajā summā atbildīs reizinājums xyz, un otrādi – katram reizinājumam xyz ar x, y un z attiecīgi no 1., 2. un 3. iekavas atbildīs trīsciparu skaitlis $\overline{xyz}$. Tā kā trīsciparu skaitļiem, kam kāds cipars ir 0, ciparu reizinājums arī ir 0, tad uzdevumā meklējamā summa vienāda ar R. Tā kā 1 + 2 + ... + 9 = 45, iegūstam sākumā minēto atbildi.

6.A3. Izdarot gājienu pa horizontāli vai pa vertikāli, karalis nonāk uz pretējas krāsas lauciņa nekā tas, uz kura viņš atradies pirms gājiena; izdarot gājienu pa diagonāli, karalis nonāk uz tās pašas krāsas lauciņa, kā tas, uz kura viņš atradies pirms gājiena. Tā kā karalis beigās atgriezās uz sākotnējā lauciņa, tad viņa ceļojuma laikā notika pāra skaits "krāsu maiņu". Tāpēc nav iespējams, ka karaļa maršrutā bija tieši viens diagonāls gājiens, jo tad būtu izdarīti 63 horizontāli/ vertikāli gājieni un būtu notikušas 63 krāsu maiņas. Tas, ka karaļa maršruts ar tieši diviem diagonāliem gājieniem iespējams, redzams A68. zīm.

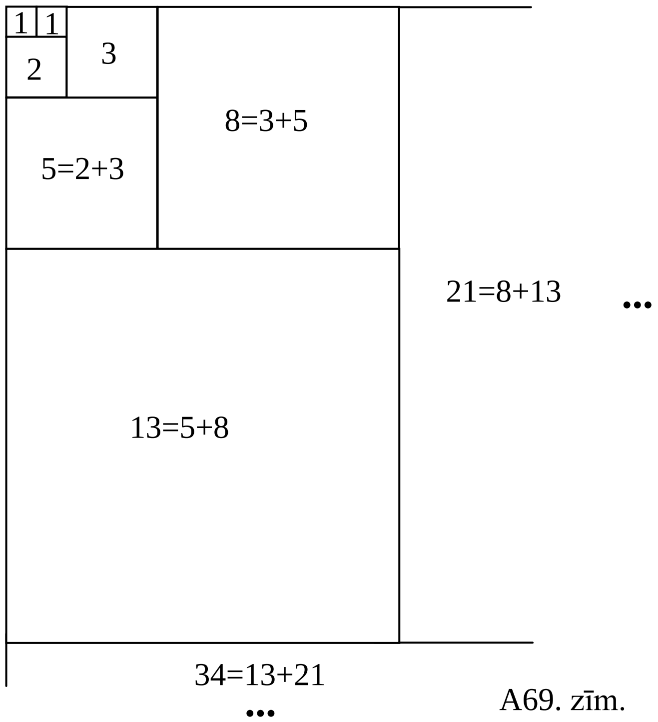


A68. zīm.

Iesakām lasītājam patstāvīgi noskaidrot, vai iespējams uzdevumā aprakstītais karaļa maršruts ar 4; 6; 8; ...; 62; 64 diagonāliem gājieniem.

6.A4. Pieņemsim, ka kvadrāts sagriezts n taisnstūros ar izmēriem $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n$, pie tam $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \ldots, a_n \le b_n$. Skaidrs, ka pie $1 \le i \le n$ pastāv nevienādības $a_i \le 1$ un $b_i \le 1$, tātad $a_i \ge a_i b_i$. Tā kā kvadrāta laukums ir vienāds ar visu taisnstūru laukumu summu, tad $1 = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Tāpēc $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 1$, no kurienes arī seko vajadzīgais.

6.A5. Aplūkosim A69. zīm., kur attēloti vairāki kvadrāti; katra kvadrāta iekšpusē ierakstīts tā malas garums.



A69. zīm.

Iedomāsimies, ka, zīmējumu turpinot, katrs jaunais kvadrāts tiek pievienots visu iepriekšējo kvadrātu veidotajam taisnstūrim pārmaiņus labajā pusē un apakšā. Tad kvadrātu malu garumi ir mūsu aplūkojamās skaitļu virknes locekļi, un uzdevuma apgalvojums izriet no tā, ka kārtējā izveidotā taisnstūra laukums vienāds ar visu tajā ietilpstošo kvadrātu laukumu summu.

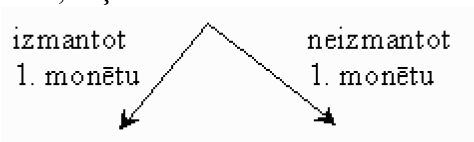
6.A6. Mazākais četrciparu skaitlis ir 1000, lielākais – 9999; tātad četrciparu skaitļu pavisam ir $9999 - 1000 + 1 = 9000$. Aprēķināsim, cik ir četrciparu skaitļu $\overline{abcd}$, kuros visi cipari ir pāra cipari. Cipars a var pieņemt jebkuru no četrām vērtībām 2; 4; 6; 8. Katrs no pārējiem cipariem var pieņemt jebkuru no piecām vērtībām 0; 2; 4; 6; 8. Tāpēc šādu četrciparu skaitļu pavisam ir $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$. Tā kā katrā četrciparu skaitlī vai nu visi cipari ir pāra cipari, vai arī ir kaut viens nepāra cipars, tad mūsu meklējamais skaits ir $9000 - 500 = 8500$.

B GRUPA

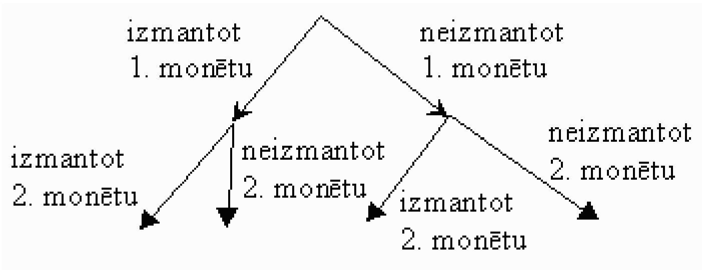
6.B1. Atbilde: 8 monētas. Atrisinājums.

I Pieņemsim, ka Jānim ir sekojošas 8 monētas: 1s, 2s, 2s, 5s, 10s, 20s, 20s, 50s. Vienādības 1 = 1; 2 = 2; 3 = 1 + 2; 4 = 2 + 2; 5 = 5; 6 = 1 + 5; 7 = 2 + 5; 8 = 1 + 2 + 5; 9 = 2 + 2 + 5 parāda, ka, izmantojot tikai pirmās 4 monētas, Jānis var samaksāt jebkuru naudas summu no 1s līdz 9s ieskaitot. Šīs pašas vienādības, pareizinātas ar 10, rāda: izmantojot tikai pēdējās četras monētas, Jānis var

samaksāt jebkuru naudas summu 10s; 20s; 30s; ...; 90s. Tā kā $\overline{xy} = 10x + y$, tad no augšminētā seko: Jānis var samaksāt jebkuru naudus summu no 1s līdz 99s ieskaitot. Tā kā 10 + 20 + 20 + 50 = 100, tad Jānis var samaksāt arī 1 latu.
II Tagad pierādīsim, ka ar 7 monētām mērķis nav sasniedzams. Ļoti svarīgs pierādījumā būs šāds rezultāts.
Lemma. Ar n monētu palīdzību var samaksāt ne vairāk kā 2^n dažādas naudas summas. Lemmu pierādīsim risinājuma beigās. Tagad ar tās palīdzību atrisināsim mūsu uzdevumu. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: ir iespējams tāds 7 monētu komplekts, ar kuru var samaksāt jebkuru naudas summu no 1s līdz 1 latam ieskaitot. Pastāv 2 iespējas: 1) starp Jāņa monētām nav divu vienādu. Tad viņam ir ne vairāk kā 6 monētas, kuru vērtības nepārsniedz 1 latu: 1s, 2s, 5s, 10s, 20s un 50s. Vienīgi šīs monētas Jānis var izmantot, lai samaksātu jebkuru no summām 1s; 2s; 3; ...; 98s; 99s. Tādu summu ir skaitā 99. Bet saskaņā ar lemmu Jānis ar minētajām monētām var samaksāt ne vairāk kā $2^6 = 64$ dažādas summas. Iegūta pretruna. 2) starp Jāņa monētām ir divas vienādas; apzīmēsim tās ar A un B. Izmantojot pārējās 5 monētas, Jānis var samaksāt ne vairāk kā $2^5 = 32$ dažādas summas. Balstoties uz katru no šīm summām, Jānis var samaksāt vēl ne vairāk kā divas citas summas, pievienojot vienu vai abas no monētām A un B. Tātad Jānis noteikti nevar samaksāt vairāk par $32 \cdot 3 = 96$ dažādām summām; bet viņam jāvar samaksāt 100 dažādas summas. Atkal iegūta pretruna. Atliek pierādīt lemmu. Ja Jānim ir tikai viena monēta, viņam ir tieši divas maksāšanas iespējas:



Ja Jānim iedosim vēl otru monētu, katra no šīm iespējām sadalās divās atkarībā no tā, vai viņš 2. monētu izmanto vai neizmanto:



Redzam, ka divu monētu gadījumā Jānim ir 4 maksāšanas iespējas. Pievienojot trešo monētu, katra no šīm 4 iespējām sadalās divās, un mēs pavisam iegūstam 8 iespējas. Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka n monētu gadījumā Jānim ir 2^n iespējas izvēlēties monētas maksāšanai. Pat ja visas šīs iespējas dod dažādas summas, Jānis nevar samaksāt vairāk par 2^n dažādām summām (turklāt viena no tām ir 0s – tā atbilst situācijai, kad Jānis izvēlas maksāšanai neizmantot nevienu monētu.) Līdz ar to lemma pierādīta.

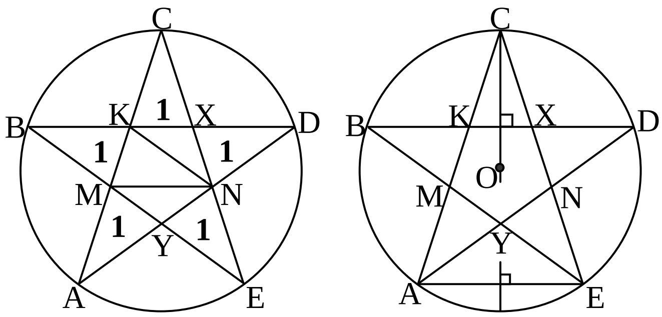
6.B2. Risinot līdzīgi kā A grupas 2. uzdevumu, iegūstam atbildi $45 \cdot 45 \cdot 45 \cdot 45 \cdot 45 = 184528125$.

6.B3. Padomāsim, kā mainītos rūķīšu atbildes, ja katrs rūķītis pēkšņi mainītu savu dabu: meļi kļūtu par patiesiem, bet patiesie - par meļiem.

Pirms pārmaiņām			Pēc pārmaiņām		
A	B	A saka par B	A	B	A saka par B
m	m	"patiess!"	p	p	"patiess!"
m	p	"melis!"	p	m	"melis!"
p	m	"melis!"	m	p	"melis!"
p	p	"patiess!"	m	m	"patiess!"

Mēs redzam, ka visas atbildes paliek tādas pašas. Tāpēc Sprīdītis nevar šīs situācijas atšķirt vienu no otras. Tomēr šādas pārmaiņas rezultātā tā daļa rūķīšu, kas agrāk bija meļi, tagad ir patiesi, un otrādi. Pieņemsim, ka bija m meļu un p patiesu rūķīšu. Tad meļu daļa ir $m/(m+p)$. Situācijā, kuru Sprīdītis nevar atšķirt no šīs, meļu daļa ir $p/(m+p)$. Vienīgā iespēja, kad Sprīdītis var nekļūdīgi noskaidrot meļu daļu, ir tad, ja $m/(m+p) = p/(m+p)$. Tad $m = p$, un meļu ir tieši puse no visiem rūķīšiem. Uzdevumā aprakstītā situācija varēja realizēties, piemēram, tad, ja pavisam bija 2 rūķīši: viens patiess, otrs melis.

6.B4. Iedomāsimies, ka jau pierādīti šādi apgalvojumi: (1) MN || BD un NK || BE, (2) $\Delta KXN = \Delta MYN$, (3) trijstūri, kas A70. zīm. apzīmēti ar ciparu "1", visi ir savā starpā vienādi.



A70. zīm. A71. zīm.

No (1) seko, ka BKNM ir paralelograms. Tāpēc $\Delta BKM = \Delta NMK$. Tātad arī ΔNMK var apzīmēt ar ciparu "1", un joprojām visi ar "1" apzīmētie trijstūri ir vienādi. Tagad skaidrs, ka gan četrstūra BMND laukums, gan zvaigznes pārējās daļas laukums ir $3L_1 + L_2$, kur L_1 ir ar "1" apzīmēta trijstūrīša laukums, bet L_2 ir ΔKXN laukums un vienlaikus arī ΔMYN laukums. Atliek pierādīt augstākminētos apgalvojumus. (1) Novilksim diametru d caur virsotni C. Tā kā šis diametrs dala uz pusēm loku BCD, tad $d \perp BD$. Tā kā loki BA un DE ir vienādi, tad AE||BD; tāpēc $d \perp AE$. Tāpēc d dala hordas BD un AE uz pusēm (A71. zīm.) Tāpēc B un D ir simetriski viens otram attiecībā pret d, un arī A un E ir simetriski viens otram attiecībā pret d. Tāpēc simetriski attiecībā pret d ir AC un EC, kā arī BE un DA. Tāpēc šo simetrisko nogriežņu krustpunkti M un N arī ir simetriski viens otram attiecībā pret d; bet no tā seko, ka $MN \perp d$. Tā kā arī $BD \perp d$, tad MN || BD, k.b.j. To, ka KN || BE, pierāda līdzīgi. (2) Izmantojot simetriju attiecībā pret diametru, kas novilkts caur B, līdzīgi pierāda, ka $\Delta KXN = \Delta MYN$. (3) Viegli aprēķināt, ka loku AB, BC, CD, DE, EA leņķiskie lielumi ir 72^o. Pagriezīsim ABCDE ap riņķa centru O par 72^o pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Tad A pāriet par B, B – par C, ..., E – par A. Tāpēc AC pāriet par BD un BE pāriet par CA. Tāpēc AC un BE krustpunkts M pāriet par BD un CA krustpunktu K. Līdzīgi pierāda, ka Y pāriet par M. Tā kā ΔYAM virsotnes pāriet atbilstoši par ΔMBK virsotnēm, tad $\Delta YAM = \Delta MBK$. Pārējās vajadzīgās trijstūru vienādības pierāda līdzīgi.

6.B5. Atbilde 13 zirdziņus.

Atrisinājums**.** 1) Tas, ka 13 zirdziņus var izvietot, redzams A72. zīm.

X		X		X
	X		X	
X		X		X
	X		X	
X		X		X

A72. zīm.

1	2	5	6	7
3	6	4	2	5
4	1	10	7	9
10	3	8	11	12
	11	12	9	8

A73. zīm.

2) Katras divas rūtiņas, kas A73. zīm. satur vienādus skaitļus, sasniedzamas viena no otras ar vienu šaha zirdziņa gājienu. Tāpēc tajās abās nedrīkst atrasties zirdziņi. Tātad "sanumurētajās" rūtiņās kopā var atrasties ne vairāk par 12 zirdziņiem. Tā kā "nesanumurēta" ir tikai viena rūtiņa (kas varbūt arī satur zirdziņu), tad zirdziņu skaits nepārsniedz 12 + 1 = 13.

6.B6. Apzīmēsim rituļu masas ar $m_1 \le m_2 \le m_3 \le \ldots \le m_{31} \le m_{32} \le m_{33}$. Sadalīsim pirmos 32 rituļus divās daļās:

I daļa	II daļa
m_1	m_2
m_3	m_4
m_5	m_6
…	…
m_{29}	m_{30}
m_{31}	m_{32}

Tā kā $m_2 \ge m_1$, $m_4 \ge m_3$, ..., $m_{32} \ge m_{31}$, tad otrās daļas kopējā masa M_2 nav mazāka par pirmās daļas kopējo masu M_1: $M_2 \ge M_1$.

Novērtēsim, par cik otrās daļas masa pārsniedz pirmās daļas masu: $M_2 - M_1 = (m_2 + m_4 + \ldots + m_{32})$
$- (m_1 + m_3 + \ldots + m_{31}) = m_{32} - m_1 - (m_{31} - m_{30})$
$- (m_{29} - m_{28}) - \ldots - (m_3 - m_2)$.

Tā kā $m_{31} \ge m_{30}$, $m_{29} \ge m_{28}$,..., $m_3 \ge m_2$ un $m_1 > 0$, tad $M_2 - M_1 < m_{32}$. Tātad $0 \le M_2 - M_1 < m_{32}$.

Mums vēl palicis siera gabals ar masu m_{33}. Ja mēs to varētu sagriezt divos gabalos ar masām x un y tā, ka $x - y = M_2 - M_1$, tad $x + M_1 = y + M_2$; tāpēc, pievienojot gabalu ar masu x I daļai un gabalu ar masu y II daļai, siers vajadzīgajā veidā būtu sadalīts. Pierādīsim divos dažādos veidos, ka šāda sagriešana iespējama.

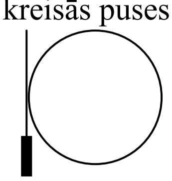
A. Risināsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = m_{33} \\ x - y = M_2 - M_1 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus un rezultātu izdalot ar 2, iegūstam $x = 0{,}5(m_{33} + (M_2 - M_1))$ un tālāk no 1. vienādojuma $y = m_{33} - x = 0{,}5(m_{33} + (M_2 - M_1))$. Lai sagriešana gabalos ar masām x un y būtu iespējama, papildus nosacījumam $x + y = m_{33}$ vēl jāizpildās nosacījumam $x > 0$

un y > 0. Tas, ka x > 0, seko no $m_{33} > 0$ un no $M_2 - M_1 \leq 0$. Tas, ka y > 0, seko no iepriekš pierādītās nevienādības $M_2 - M_1 < m_{32}$ un no nosacījuma $m_{32} \leq m_{33}$.

B. Novietosim nazi ar asmeni augstāk par viena siera rituli tā, ka viss ritulis atrodas pa labi no tā (skat. A74. zīm.) Tad pa kreisi no asmens siera masa ir 0, bet pa labi tā ir m_{33}. Tāpēc labās un kreisās puses masu starpība ir m_{33}.



A74. zīm.

Sāksim vienmērīgi pārvietot nazi virs siera rituļa pa labi, nemainot asmens virzienu. Skaidrs, ka pēc kāda laika abās pusēs no naža būs vienādi siera daudzumi, t. i., starpība būs 0. Tā kā šī starpība mainījusies no m_{33} līdz 0 un $m_{33} \geq m_{32} > M_2 - M_1 > 0$, tad kādā brīdī šī starpība bija tieši $M_2 - M_1$. Šajā brīdī mēs varējām apturēt naža virzīšanos pa labi un izdarīt vajadzīgo griezienu.