Teorijas materiāls 2., 6. un 7. uzdevumam
Ekstremālā elementa metode

Kad sāk risināt uzdevumu, ļoti grūti izdomāt, kam ķerties klāt. Bieži vien uzdevumā jāseko līdzi daudziem (pat iespējams bezgalīgi daudziem) elementiem. Problēmu risinātāji vienmēr cenšas sakārtot šo lielo informācijas masu. Svarīga taktika šim ir **ekstremālā elementa metode**.

Ja iespējams, pieņem, ka problēmas lielumi ir sakārtoti. Pievērs īpašu uzmanību "lielākajam" un "mazākajam" lielumam šajā sakārtojumā, jo tie visticamāk saturēs svarīgāko informāciju!

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu, ka cilvēka patiesās īpašības un raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos. Matemātiski tas nozīmē, ka, pētot īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku u. tml.), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos, proti, tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā visvieglāk ir lietot tad, kad jāpierāda, vai dotā īpašība ir vai nav spēkā visiem kopas elementiem.

Ekstremālais ("īpašais") elements atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, viens vai vairāki lielākie (mazākie) skaitļi, vismazākais attālums, garākā diagonāle, cilvēks, kuram ir vislielākais paziņu skaits, malējā rūtiņa u. tml.

Uzdevumu piemēri

1. Uz galda ir kaut kāds skaits kartīšu (vismaz 4). Uz katras kartītes uzrakstīts naturāls skaitlis, visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai katrām divām no šīm kartītēm a un b var atrast divas citas kartītes c un d tā, lai uz tām uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas $a + b = c + d$?
Atrisinājums. Tā kā uz katras kartītes uzrakstīts naturāls skaitlis, tad varam paņemt tās divas kartītes, uz kurām uzrakstīti mazākie skaitļi. Šo kartīšu summa būs mazākā iespējamā. Tā kā uz pārējām kartītēm ir uzrakstīti lielāki skaitļi, tad jebkuru divu kartīšu summa ir lielāka, un secinām, ka prasīto nevarēs vienmēr izdarīt.

2. Doti naturālie skaitļi no 1 līdz 35. Pierādīt, ka no tiem (tos neatkārtojot) nevar izvēlēties 25 skaitļus tā, lai to summa būtu vienāda ar atlikušo 10 skaitļu summu!
Atrisinājums. 25 mazāko skaitļu summa ir $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = 325$. Tas nozīmē, ka, lai kā arī izvēlētos šos 25 skaitļus, to summa vienmēr būs vismaz 325. Tā kā 10 lielāko skaitļu summa ir $26 + 27 + 28 + \cdots + 35 = 305$, tad jebkuru 10 skaitļu summa nebūs lielāka kā 305. Tā kā šīs summas nekad nesakritīs, prasītos 25 skaitļus nevar izvēlēties.

3. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrā no bezgalīgi daudzajām rūtiņām ierakstīts kāds naturāls skaitlis. Zināms, ka katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar četru tam blakus esošo skaitļu vidējo aritmētisko. Pierādīt, ka visās rūtiņās ierakstītie skaitļi ir vienādi.
Atrisinājums. Starp uzrakstītajiem naturālajiem skaitļiem var atrast vismazāko skaitli, ko apzīmēsim ar m. Aplūkosim kādu rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis m. Tādā gadījumā blakus esošajās četrās rūtiņās ierakstīts skaitlis, kas ir vismaz m un to vidējais aritmētiskais ir m. Varam secināt, ka visās četrās blakus rūtiņās ir ierakstīts viens un tas pats skaitlis m. Tiešām, ja kaut viens no četriem skaitļiem būtu lielāks nekā m, tad aritmētiskais vidējais arī būtu lielāks nekā m, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Līdzīgi turpinot, pakāpeniski apskatot katru rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis m, pierādām, ka jebkurā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis m.

4. Tuvojoties pikošanās sezonai, vairāki draugi izlēma patrenēties ar baloniem, kuros ir iepildīts ūdens. Katrs paņēma balonu un aizgāja nostāties laukā tā, lai attālums starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgs. Pēc signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam draugam. Pierādīt, ka noteikti būs tādi divi draugi, kas meta viens otram!
Atrisinājums. Tā kā attālums starp katriem diviem draugiem ir atšķirīgs, tad apskatīsim to draugu pāri, starp kuriem ir īsākais attālums. Viņi metīs balonus vienam otram, jo, ja tas tā nebūtu, kādam būtu jāstāv tuvāk. Ja kāds stāvētu tuvāk, tad tas būtu pretrunā ar pieņēmumu, ka mēs apskatām draugu pāri, starp kuriem ir īsākais attālums.

Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
2. kārtas uzdevumi

1. uzdevums
Nellija uzrakstīja kāda skaitļa visus dalītājus. Vai var gadīties, ka šim skaitlim ir

a) tieši 8 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 15 un 21;
b) tieši 16 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 44 un 46?

2. uzdevums
Katrs no 17 rūķiem uz lapas uzrakstīja savu mīļāko skaitli un nostājās aplī. Izrādījās, ka visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai var gadīties, ka katra rūķa mīļākais skaitlis ir vienāds ar divu blakus esošo rūķu mīļāko skaitļu vidējo aritmētisko?

3. uzdevums
Uz galda ir novietotas vairākas vienādas monētas. Mārtiņš spēlē spēli, griežot monētas uz otru pusi – no ģerboņa (Ģ) uz ciparu (C) un otrādi. Katrā spēlē jāveic vismaz viens gājiens, un katrā gājienā var apgriezt otrādi vienu un to pašu skaitu monētu. Katras spēles sākumā tiek pateikts, cik monētas var apgriezt katrā gājienā. Spēles sākumā visām monētām ir redzams cipars.
Piemēram, vienā spēlē Mārtiņš var sākt ar 5 monētām, katrā gājienā apgriezt 2 monētas un veikt trīs gājienus šādi:

Sākums:	C	C	C	C	C
1. gājiens:	C	Ģ	Ģ	C	C
2. gājiens:	Ģ	Ģ	C	C	C
3. gājiens:	Ģ	Ģ	C	Ģ	Ģ

a) Parādi, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 14 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem tieši 10 monētām būtu redzams ģerbonis!
b) Paskaidro, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 154 monētām, katrā gājienā apgriežot 52 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!
c) Kāds ir mazākais iespējamais gājienu skaits, lai Mārtiņš izspēlētu spēli ar 26 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai spēles beigās visām monētām būtu redzams ģerbonis?
d) Pierādi, ka, sākot spēli ar 154 monētām un katrā gājienā apgriežot nepāra skaita monētas, nevar panākt, ka pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!

4. uzdevums
Kāds rūķis savā dzimšanas dienas ballītē viesiem iedeva tik daudz pilnīgi vienādus, mazus kubiņus, cik gadu viņam todien palika. Viesi no visiem mazajiem kubiņiem salika ļoti lielu kubu bez caurumiem. Zināms, ka lielajā kubā 168 kubiņi bija tādi, kuriem tieši četras skaldnes saskārās ar citu mazo kubu skaldnēm. Cik gadu dzimšanas dienu svinēja rūķis?

5. uzdevums
Fizmatiņu ģimenē ir četri bērni, kuri mācās atbilstoši 5., 6., 9. un 12. klasē. Fizmatiņu tētis ik pēc kāda laika piektdienās saņem bērnu sekmju izrakstus no skolas (neatkarīgi no brīvdienām):

- 5. klases skolēna sekmju izrakstu ik pēc 2 nedēļām;
- 6. klases skolēna – ik pēc 3 nedēļām;
- 9. klases skolēna – ik pēc 5 nedēļām;
- 12. klases skolēna – ik pēc 10 nedēļām.

Skolas gaitas sākās 2023. gada 1. septembrī un ar šo dienu sākas nedēļu uzskaitījums. Vai šajā mācību gadā būs tāda diena, kurā tētis saņems visu četru bērnu sekmju izrakstus?

6. uzdevums

Rūķīšu ciemā notika ūdens balonu mešanas turnīrs. Katrs turnīra dalībnieks spēlēja ar citu tieši vienu reizi. Šajā turnīrā nebija neizšķirtu rezultātu. Pie tam turnīra beigās katrs rūķītis izveidoja sarakstu, kas saturēja

1) gan to rūķīšu vārdus, kurus viņš uzvarēja,
2) gan to rūķīšu vārdus, kuri zaudēja pret tiem, kurus viņš uzvarēja.

Pamato, ka kāds rūķītis savā sarakstā pieminējis visus pārējos dalībniekus!

7. uzdevums

Kad Valta draugi devās trenēties ar ūdens baloniem pikošanās sezonai, viņš diemžēl nevarēja piedalīties, jo bija saslimis. Neskatoties uz to, viņš devās atbalstīt savus draugus. Katrs no tiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam draugam. Lai cik reizes netiktu atkārtoti šādi metieni dažādos izkārtojumos, Valts ievēroja, ka balonu lidojuma trajektorijas nekad nekrustojas. Pamato, kāpēc Valta novērojums ir patiess vienmēr!