**Profesora Cipariņa klubs**
**2023./2024. mācību gads**
**2. kārtas uzdevumu atrisinājumi**

**1. uzdevums**
Nellija uzrakstīja kāda skaitļa visus dalītājus. Vai var gadīties, ka šim skaitlim ir

- **a)** tieši 8 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 15 un 21;
- **b)** tieši 16 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 44 un 46?

**Atrisinājums. a)** Jā, var gadīties, piemēram, skaitlim 105 ir tieši 8 dažādi dalītāji, tai skaitā dalītāji 15 un 21.
Tā kā $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, tad aplūkosim visus iespējamos skaitļa 105 dalītājus (skat. tabulu)

| *Nr. p. k.* | *Skaitļa 105 dalītāji* |
|---|---|
| 1. | $1$ |
| 2. | $3$ |
| 3. | $5$ |
| 4. | $7$ |
| 5. | $3 \cdot 5 = 15$ |
| 6. | $3 \cdot 7 = 21$ |
| 7. | $5 \cdot 7 = 35$ |
| 8. | $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ |

**b)** Jā, var gadīties, piemēram, skaitlim 2024 ir tieši 16 dalītāji, tai skaitā dalītāji 44 un 46.
Tā kā $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, tad aplūkosim visus iespējamos skaitļa 2024 dalītājus (skat. tabulu).

| *Nr. p. k.* | *Skaitļa 105 dalītāji* |
|---|---|
| 1. | $1$ |
| 2. | $2$ |
| 3. | $11$ |
| 4. | $23$ |
| 5. | $2 \cdot 2 = 4$ |
| 6. | $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ |
| 7. | $2 \cdot 11 = 22$ |
| 8. | $2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$ |
| 9. | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 88$ |
| 10. | $2 \cdot 23 = 46$ |
| 11. | $2 \cdot 2 \cdot 23 = 92$ |
| 12. | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 = 184$ |
| 13. | $11 \cdot 23 = 253$ |
| 14. | $2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$ |
| 15. | $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 1012$ |
| 16. | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$ |

**2. uzdevums**
Katrs no 17 rūķiem uz lapas uzrakstīja savu mīļāko skaitli un nostājās aplī. Izrādījās, ka visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai var gadīties, ka katra rūķa mīļākais skaitlis ir vienāds ar divu blakus esošo rūķu mīļāko skaitļu vidējo aritmētisko?
**Atrisinājums.** Nē, tā nevar gadīties. Ar *M* apzīmējam vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi *M* blakus esošie skaitļi *A* un *B* ir lielāki nekā *M*. Tātad arī skaitļu *A* un *B* vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā *M*. Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar atrast kaimiņus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, tad prasītais nav iespējams.

**3. uzdevums**

Uz galda ir novietotas vairākas vienādas monētas. Mārtiņš spēlē spēli, griežot monētas uz otru pusi – no ģerboņa (Ģ) uz ciparu (C) un otrādi. Katrā spēlē jāveic vismaz viens gājiens, un katrā gājienā var apgriezt otrādi vienu un to pašu skaitu monētu. Katras spēles sākumā tiek pateikts, cik monētas var apgriezt katrā gājienā. Spēles sākumā visām monētām ir redzams cipars.

Piemēram, vienā spēlē Mārtiņš var sākt ar 5 monētām, katrā gājienā apgriezt 2 monētas un veikt trīs gājienus šādi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sākums: | C | C | C | C | C |
| 1. gājiens: | C | Ģ | Ģ | C | C |
| 2. gājiens: | Ģ | Ģ | C | C | C |
| 3. gājiens: | Ģ | Ģ | C | Ģ | Ģ |

**a)** Parādi, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 14 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem tieši 10 monētām būtu redzams ģerbonis!

**b)** Paskaidro, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 154 monētām, katrā gājienā apgriežot 52 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!

**c)** Kāds ir mazākais iespējamais gājienu skaits, lai Mārtiņš izspēlētu spēli ar 26 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai spēles beigās visām monētām būtu redzams ģerbonis?

**d)** Pierādi, ka, sākot spēli ar 154 monētām un katrā gājienā apgriežot nepāra skaita monētas, nevar panākt, ka pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!

**Atrisinājums. a)** Lai no 14 monētām tieši 10 monētām būtu redzams ģerbonis, trīs gājienus var veikt, piemēram, šādi (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sākums: | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C |
| 1. gājiens: | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C |
| 2. gājiens: | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | C | C | C | C | C | C |
| 3. gājiens: | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | Ģ | C | Ģ | Ģ | Ģ | C | C | C |

**b)** Tā kā katrā gājienā tiek apgrieztas 52 monētas, tad trīs gājienu laikā notiks $3 \cdot 52 = 156$ monētu apgriešanas reizes. Spēli sāk ar 154 monētām, kurām redzams cipars un spēles beigās jāredz tikai ģerbonis. To var iegūt, trīs gājienu laikā 153 monētas apgriežot tieši vienu reizi un 1 monētu apgriežot trīs reizes (katrā gājienā apgriež vienu un to pašu monētu). Gājienus var attēlot šādi (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

| | |
|---|---|
| Sākums: | $\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{154}$ |
| 1. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{52}\ \overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{102}$ |
| 2. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{51}\,\text{C}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{51}\,\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{51}$ |
| 3. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{51}\,\text{Ģ}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{51}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{51}$ |

**c)** Mazākais gājienu skaits ir 7. Parādīsim, kā to var izdarīt. Pirmo trīs gājienu laikā 12 monētas tiek apgrieztas vienu reizi, tātad iegūstam 12 monētas ar redzamu ģerboni. Ar atlikušajām 14 monētām trīs gājienu laikā rīkosimies, kā parādīts a) gadījumā, iegūstot vēl 10 monētas ar redzamu ģerboni. Tātad pēc sešiem gājieniem iegūstam, ka 22 monētas ir ar redzamu ģerboni. Pēdējā gājienā atlikušās 4 monētas ar redzamu ciparu apgriežam, un iegūstam visas monētas ar redzamu ģerboni.

Pamatosim, ka mazāk gājienos to nevar izdarīt. Ja sešos vai mazāk gājienos apgriež 4 monētas, tad lielākais apgriezto monētu skaits ir $6 \cdot\ 4 = 24$ monētas, bet kopā ir nepieciešams apgriezt visas 26 monētas, tātad ir nepieciešami vismaz 7 gājieni.

**d)** Ievērosim, ka pāra skaits monētu var būt arī 0 monētu. Attēlosim iespējamos rezultātus pēc trīs gājieniem, sākot spēli ar 154 monētām un katrā gājienā apgriežot nepāra skaita monētas (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

| | |
|---|---|
| Sākums: | $\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{154}$ |
| 1. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\ \ \overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$ |
| 2. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}\ \ \overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$ vai $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}\ \ \overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$,<br>tātad abos gadījumos: $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\ \ \overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$. |
| 3. gājiens: | $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}\ \ \overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$ vai $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}\ \ \overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$,<br>tātad abos gadījumos: $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\ \ \overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$. |

Tā kā pēc trīs gājieniem gan monētas ar redzamu ģerboni, gan ciparu būs nepāra skaitā, tad 154 monētas ar redzamu ģerboni nevar iegūt.

**4. uzdevums**

Kāds rūķis savā dzimšanas dienas ballītē viesiem iedeva tik daudz pilnīgi vienādus, mazus kubiņus, cik gadu viņam todien palika. Viesi no visiem mazajiem kubiņiem salika ļoti lielu kubu bez caurumiem. Zināms, ka lielajā kubā 168 kubiņi bija tādi, kuriem tieši četras skaldnes saskārās ar citu mazo kubu skaldnēm. Cik gadu dzimšanas dienu svinēja rūķis?

**Atrisinājums.** Rūķis svin 4096 gadu dzimšanas dienu. Aplūkosim, cik mazo kubiņu skaldnes varēja saskarties ar citu kubiņu skaldnēm, ņemot vērā to novietojumu lielajā kubā.

- Ja mazais kubiņš bija lielā kuba iekšpusē, tad visas sešas tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba skaldnes, bet ne pie šķautnēm, tad tieši piecas tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba šķautnēm, bet ne pie virsotnes (tas ir, ne kuba stūros), tad tieši četras tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba virsotnēm (kuba stūros), tad tieši trīs tā skaldnes saskārās ar citu kubu skaldnēm.

Tātad 168 kubiņi, kuru četras skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm, noteikti atradās pie lielā kuba šķautnēm, bet ne pie virsotnēm. Tā kā kubam ir 12 šķautnes, tad pie katras lielā kuba šķautnes, izņemot pie virsotnēm, atradās $168 : 12 = 14$ mazie kubiņi. Tādā gadījumā lielā kuba vienu šķautni veido $14 + 2 = 16$ mazie kubiņi un kopā lielajā kubā ir $16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$ mazie kubiņi.

**5. uzdevums**

Fizmatiņu ģimenē ir četri bērni, kuri mācās atbilstoši 5., 6., 9. un 12. klasē. Fizmatiņu tētis ik pēc kāda laika piektdienās saņem bērnu sekmju izrakstus no skolas (neatkarīgi no brīvdienām):

- 5. klases skolēna sekmju izrakstu ik pēc 2 nedēļām;
- 6. klases skolēna – ik pēc 3 nedēļām;
- 9. klases skolēna – ik pēc 5 nedēļām;
- 12. klases skolēna – ik pēc 10 nedēļām.

Skolas gaitas sākās 2023. gada 1. septembrī un ar šo dienu sākas nedēļu uzskaitījums. Vai šajā mācību gadā būs tāda diena, kurā tētis saņems visu četru bērnu sekmju izrakstus?

**Atrisinājums.** Jā, Fizmatiņu tētis visu četru bērnu izrakstus saņems 29. martā. Meklējam skaitļu 2; 3; 5 un 10 mazāko kopīgo dalāmo. Tā kā 10 dalās ar 2 un 5, tad visu četru skaitļu mazākais kopīgais dalāmais sakrīt ar $MKD(3; 10) = 30$. Tātad tētis tieši pēc 30 nedēļām jeb $30 \cdot 7 = 210$ dienām saņems visu četru bērnu sekmju izrakstus.

Tā kā 2023./2024. mācību gadā ir februāris ar 29 dienām, tad 210 dienas, sākot ar 1. septembri, var sadalīt pa mēnešiem šādi: $210 = 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29 + 28$. Tātad tētis šajā mācību gadā visus sekmju izrakstus saņems 29. martā.

**6. uzdevums**

Rūķīšu ciemā notika ūdens balonu mešanas turnīrs. Katrs turnīra dalībnieks spēlēja ar citu tieši vienu reizi. Šajā turnīrā nebija neizšķirtu rezultātu. Pie tam turnīra beigās katrs rūķītis izveidoja sarakstu, kas saturēja:

1) gan to rūķīšu vārdus, kurus viņš uzvarēja,
2) gan to rūķīšu vārdus, kuri zaudēja pret tiem, kurus viņš uzvarēja.

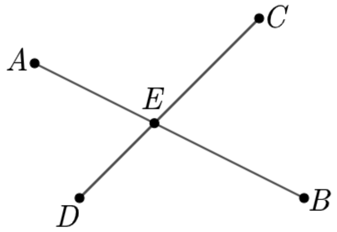
Pamato, ka kāds rūķītis savā sarakstā pieminējis visus pārējos dalībniekus!

**Atrisinājums.** Ar $A$ apzīmēsim kādu no rūķīšiem, kurš uzvarējis visvairāk mačus. Pieņemsim, ka viņa sarakstā neatrodas visu dalībnieku vārdi. Tas nozīmē, ka ir kāds cits rūķītis $B$, kurš nav rūķīša $A$ sarakstā. Tātad rūķītis $B$ uzvarēja $A$ un arī nav zaudējis pret nevienu no rūķīšiem, kurus uzvarējis rūķītis $A$, jo pretējā gadījumā rūķīša $B$ vārds parādītos rūķīša $A$ sarakstā pēc 2. nosacījuma. Tas nozīmē, ka rūķītis $B$ ir uzvarējis tos pašus rūķīšus, kurus uzvarējis rūķītis $A$, bet papildus uzvarējis arī rūķīti $A$. Tātad rūķītis $B$ ir uzvarējis vairāk maču nekā rūķītis $A$, kas ir pretrunā ar to, ka rūķītis $A$ ir viens no rūķīšiem, kas uzvarējis visvairāk maču. Tātad pieņēmums ir aplams un rūķīša $A$ sarakstā ir pieminēti visi pārējie dalībnieki.

**7. uzdevums**

Kad Valta draugi devās trenēties ar ūdens baloniem pikošanās sezonai, viņš diemžēl nevarēja piedalīties, jo bija saslimis. Neskatoties uz to, viņš devās atbalstīt savus draugus. Katrs no tiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam draugam. Lai cik reizes netiktu atkārtoti šādi metieni dažādos izkārtojumos, Valts ievēroja, ka balonu lidojuma trajektorijas nekad nekrustojas. Pamato, kāpēc Valta novērojums ir patiess vienmēr!

**Atrisinājums.** Pieņemsim pretējo, ka pastāv tāda situāciju, ka balonu lidojumu trajektorijas krustojas. Apzīmēsim draugus ar $A, B, C, D$ un metienu trajektoriju krustpunktu ar $E$ (skat. 1. att.).




*1. att.*

No dotā zināms, ka nogrieznis $AB$ ir īsāks nekā nogrieznis $AC$ jeb $AB < AC$. Līdzīgi iegūstam, ka arī $CD < BD$, no kurienes secinām, ka $AB + CD < AC + BD$. Bet no otras puses pēc trīsstūra nevienādības ir zināms, ka $DE + BE > BD$ un $CE + AE > AC$. Tātad $AB + CD = DE + CE + BE + AE > BD + AC$. Iegūta pretruna, jo $AB < AC$ un $CD < BD$, tātad pieņēmums ir aplams un balonu trajektorijas nekad nekrustojas.