

Teorijas materiāls 2. un 6. uzdevumam

Skaitļa pieraksts

Risinot uzdevumus, jāzina atšķirība starp skaitli un ciparu, jāzina, kas ir naturāls skaitlis, jāprot salīdzināt divus naturālus skaitļus, novērtēt izteiksmes vērtību.

Atceries! Cipari ir simboli, kurus izmantojam skaitļu pierakstīšanai. Ir desmit cipari: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Līdzīgi kā no burtiem mēs veidojam vārdus, tā no cipariem mēs veidojam skaitļus. Piemēram, divciparu skaitlis 14, viencipara skaitlis 7.

Atceries! Naturāli skaitļi ir skaitļi, kas rodas skaitīšanas rezultātā: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; ... Iegaumē, ka mazākais naturālais skaitlis ir 1, skaitlis 0 nav naturāls skaitlis.

Uzdevumu piemēri

1. Atrodi vislielāko piecciparu skaitli, kuram ceturtais cipars (desmitu cipars) ir lielāks nekā piektais cipars (vienu cipars), trešais cipars lielāks nekā ceturtais un piektais cipara summa, otrais cipars ir lielāks nekā trešais, ceturtais un piektais cipara summa, bet pirmais cipars ir lielāks nekā visu pārējo ciparu summa!

Atrisinājums. Meklētais piecciparu skaitlis ir 95210. Pamatotsim, ka vēl lielāku skaitli nevar iegūt. Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, tas ir, 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tūkstošu cipars nevar būt lielāks kā 5, jo jau $8 - 6 = 2$, ko nevar izteikt kā trīs dažādu ciparu summu. Tātad, lai atrastu lielāko piecciparu skaitli, tūkstošu ciparam jābūt 5 un tas nozīmē, ka simtu, desmitu un vienu cipars attiecīgi var būt tikai 2, 1 un 0. Līdz ar to lielākais piecciparu skaitlis, kam izpildās prasītās īpašības, ir 95210.

2. Vai ir tāds naturāls četruciparu skaitlis ar šādu īpašību: ja skaitļa pēdējo ciparu pārceļ uz skaitļa sākumu, tad iegūst četruciparu skaitli, kas ir 6 reizes mazāks nekā sākotnējais skaitlis?

Atrisinājums. Nē, nav tāds skaitlis. Apzīmēsim sākotnējo četruciparu skaitli ar x , bet iegūto četruciparu skaitli ar y . Tādā gadījumā $6 \cdot y = x$. Tā kā vienādojuma kreisajā pusē iegūstam pāra skaitli, tad x ir pāra skaitlis. Tātad x pēdējais cipars ir pāra cipars. Tas nevar būt 0, jo tad y nebūtu četruciparu skaitlis. Tātad četruciparu skaitļa x pēdējais cipars mazākā iespējamā vērtība ir 2 un tas nozīmē, ka y pirmais cipars nav mazāks 2. Pat tādā gadījumā, ja mēs izvēlētos pašu mazāko četruciparu skaitli ar šādu īpašību, tas ir, skaitli 2000, to reizinot ar 6, jau iegūst piecciparu skaitli, bet x ir četruciparu skaitlis, tātad tas nav iespējams.

Ievēro! Ja skaitlī nav zināmi kādi cipari, tos var apzīmēt ar burtiem, taču, lai nerastos pārpratumi, tādā gadījumā virs skaitļa tiek vilkta horizontāla svītra, piemēram, trīsciparu skaitlis \overline{xyz} , četruciparu skaitlis \overline{abcd} .

3. Pierādi, ka, uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā šos pašus divciparu skaitļus sareizinot!

Atrisinājums. Pirmo divciparu skaitli apzīmēsim ar \overline{ab} , bet otro – ar \overline{cd} . Uzrakstot šos skaitļus vienu otram galā, iegūsim skaitli \overline{abcd} , kas ir lielāks nekā četruciparu skaitlis, kuram pēdējie divi cipari ir nulles, tas ir, $\overline{ab00}$. Skaitli, kuram pēdējie divi cipari ir nulles varam izteikt kā $\overline{ab00} = \overline{ab} \cdot 100$, bet divciparu skaitļa reizinājums ar trīsciparu skaitli ir lielāks nekā divu divciparu skaitļu reizinājums $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\overline{abcd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 7.-9. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

levēro! Divciparu skaitli varam izteikt kā $\overline{ab} = 10a + b$, trīsciparu skaitli – kā $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ utt. Piemēram, $2023 = 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 1 \cdot 3$.

4. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un tā ciparu reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodi visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība!

Atrisinājums. Apzīmējot meklētos divciparu skaitļus ar \overline{ab} , iegūstam vienādojumu $(a + b) + ab = 10a + b$ jeb $ab - 9a = 0$. Iznesot a pirms iekavām, iegūstam $a \cdot (b - 9) = 0$. Reizinājums ir vienāds ar 0, ja kāds no reizinātājiem ir vienāds ar 0. Tā kā $a \neq 0$, jo tas ir divciparu skaitļa pirmais cipars, tad $b - 9 = 0$ jeb $b = 9$, bet a var būt jebkurš nenulles cipars. Tātad minētā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, tas ir, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

5. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa iegūtais skaitlis noteikti dalās ar 23?

Atrisinājums. Jā, noteikti dalās. Apzīmējam sākotnējo skaitli ar \overline{abc} . Skaitlim $2 \cdot \overline{abc}$ pierakstīt galā \overline{abc} ir tas pats, kas skaitli $2 \cdot \overline{abc}$ reizināt ar 1000 un tad tam pieskaitīt \overline{abc} . Tātad iegūstam skaitli $2 \cdot \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 2001 \cdot \overline{abc}$. Tā kā reizinātājs 2001 dalās ar 23 ($2001 : 23 = 87$), tātad arī iegūtais skaitlis $2001 \cdot \overline{abc}$ noteikti dalās ar 23.

6. Dots, ka A un B ir naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B ; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A . Zināms, ka $X - Y$ dalās ar 91. Pierādi, ka $A = B$.

Atrisinājums. Apzīmējam $A = \overline{ab}$, $B = \overline{cd}$, tad $X = \overline{abcd}$, bet $Y = \overline{cdab}$. Līdz ar to

$$X - Y = \overline{abcd} - \overline{cdab} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} - \overline{cd} \cdot 100 - \overline{ab} = 99\overline{ab} - 99\overline{cd} = 99 \cdot (\overline{ab} - \overline{cd}).$$

No uzdevumā dotā $99 \cdot (\overline{ab} - \overline{cd})$ dalās ar 91. Tā kā skaitļu 99 un 91 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $(\overline{ab} - \overline{cd})$ dalās ar 91. Ievērojam, ka $\overline{ab} - \overline{cd} \leq 89$ (89 iegūst, ja atņem no lielākā divciparu skaitļa mazāko divciparu skaitli). Tāpēc vienīgā iespēja, ka $\overline{ab} - \overline{cd} = 0$ jeb $\overline{ab} = \overline{cd}$, kas arī bija jāpierāda.

7. Četruciparu skaitlim pārlika ciparus citā secībā. Pierādi, ka sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

Atrisinājums. Apzīmējam četruciparu skaitli ar $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Vienādības labajā pusē sadalām saskaitāmos $\overline{abcd} = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$. Uzrakstām citu četruciparu skaitli, kas sastāv no šiem pašiem cipariem un līdzīgā veidā sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu četru ciparu summa $(a + b + c + d)$. Aprēķinot abu šo skaitļu starpību, ievērojam, ka saskaitāmie $(a + b + c + d)$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās 9, jo katrs saskaitāmais satur kādu no reizinātājiem 9, 99, 999 un, ja viens no reizinātājiem dalās 9, tad arī reizinājums dalās ar 9. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 9, tad arī aprēķinātā starpība dalās ar 9.

Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
1. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

Kādā vējinā rudens dienā Kristīne uzrakstīja divas vienādības. Pēkšņi uzpūta stiprs vējš un visas iekavas tika aizpūstas prom, bet darbību zīmes aizsedza sapūstās kļavu lapas. Saliec darbības zīmes (“+”, “−”, “.” un “:”) un iekavas tā, lai dotās vienādības būtu patiesas!

a) $81 \text{ } \spadesuit \text{ } 113 \text{ } \spadesuit \text{ } 92 \text{ } \spadesuit \text{ } 7 \text{ } \spadesuit \text{ } 12 \text{ } \spadesuit \text{ } 13 \text{ } \spadesuit \text{ } 11 \text{ } \spadesuit \text{ } 61 = 34$

b) $9 \text{ } \spadesuit \text{ } 3 \text{ } \spadesuit \text{ } 7 \text{ } \spadesuit \text{ } 10 \text{ } \spadesuit \text{ } 6 \text{ } \spadesuit \text{ } 6 \text{ } \spadesuit \text{ } 13 \text{ } \spadesuit \text{ } 11 = 24$

2. uzdevums

Profesors Cipariņš iedeva savam vectēvam seifā uzglabāt PCK atrisinājumus. Kad atrisinājumi bija nepieciešami, atklājās, ka vectēvs ir aizmirsis seifa kodu, tomēr dažus faktus viņš atceras:

- 1) seifa kods ir septiņciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir divas reizes mazāks nekā pēdējais cipars;
- 2) koda veidotais skaitlis dalās ar 9;
- 3) nodzēšot pirmo un pēdējo koda ciparu, iegūst piecciparu skaitli, **kuru sadalot reizinātājos, iegūst piecus dažādus pēc kārtas esošus pirmskaitļus.**

Palīdzi Profesoram Cipariņam noskaidrot vectēva seifa kodu!

3. uzdevums

Dagnijai uz galda ir 5×5 rūtiņu lapa, kur katrā rūtiņā ir ierakstīt kāds no burtiem P, C, K (skat. 1. att.). Dagnija katru rītu rūtiņu lapā vienu reizi izlasa frāzi “PCK”, sākot lasīt no centra rūtiņas un pārvietojoties uz rūtiņu, kurai ir kopīga mala vai stūris ar iepriekšējo rūtiņu. Cik rītus Dagnija var izlasīt “PCK” dažādos veidos?

K	K	K	K	K
K	C	C	C	K
K	C	P	C	K
K	C	C	C	K
K	K	K	K	K

1. att.

4. uzdevums

Pirmzemes naudas valūta ir alfoni. Katras monētas vērtība ir pirmskaitlis, kas mazāks nekā 50. Piemēram, monēta ar vismazāko vērtību ir 2 alfoni. Pirmzemē visus maksājumus var samaksāt ar veselu skaitu monētu.

- a) Kāda ir mazākā naudas summa, kuras precīzai samaksāšanai nepieciešamas vismaz 3 monētas?
- b) Maisā ir sešas dažādas vērtības monētas. Katrs no trim draugiem izņem divas monētas no maisa. Kāda ir mazākā iespējamā naudas summa maisā, ja visi trīs draugi ir izņēmuši vienādu naudas daudzumu?
- c) Pierādi, ka ir tikai viens komplekts ar piecām monētām, kuras var sakārtot augošā secībā tā, lai katru divu blakus esošu monētu starpība ir 6 alfoni, pat tad, ja Pirmzemē monētu vērtības būtu arī tādi pirmskaitļi, kas ir lielāki nekā 50!

5. uzdevums

Ezītis meža ielokā iestaigāja taciņu daudzstūra formā. Pēc tam viņš iestaigāja taisnu taciņu pāri daudzstūrim, sadalot to divās daļās – piecstūrī un sešstūrī. Cik malu varēja būt sākotnējo taciņu veidotajam daudzstūrim?

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Kāds var būt četrpārņu skaitlis, kurš kļūst četras reizes lielāks, kad tā ciparus uzraksta pretējā secībā?

7. uzdevums

Kāds var būt mazākais skaitlis, kuram nodzēšot pirmo ciparu, tas kļūst 73 reizes mazāks?