Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

Kādā vējainā rudens dienā Kristīne uzrakstīja divas vienādības. Pēkšņi uzpūta stiprs vējš un visas iekavas tika aizpūstas prom, bet darbību zīmes aizsedza sapūstās kļavu lapas. Saliec darbības zīmes (“+”, “–”, “·” un “:”) un iekavas tā, lai dotās vienādības būtu patiesas!

a) 81 🍁 113 🍁 92 🍁 7 🍁 12 🍁 13 🍁 11 🍁 61 = 34

b) 9 🍁 3 🍁 7 🍁 10 🍁 6 🍁 6 🍁 13 🍁 11 = 24

Atrisinājums. Darbību zīmes un iekavas var salikt, piemēram, šādi:

a) $81 + 113 - 92 + 7 - 12 - 13 + 11 - 61 = 34$
b) $(9 : 3 + 7 - 10 + 6 + 6) \cdot (13 - 11) = 24$

2. uzdevums

Profesors Cipariņš iedeva savam vectēvam seifā uzglabāt PCK atrisinājumus. Kad atrisinājumi bija nepieciešami, atklājās, ka vectēvs ir aizmirsis seifa kodu, tomēr dažus faktus viņš atceras:

1) seifa kods ir septiņciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir divas reizes mazāks nekā pēdējais cipars;
2) koda veidotais skaitlis dalās ar 9;
3) nodzēšot pirmo un pēdējo koda ciparu, iegūst piecciparu skaitli, kuru sadalot reizinātājos, iegūst piecus dažādus pēc kārtas esošus pirmskaitļus.

Palīdzi Profesoram Cipariņam noskaidrot vectēva seifa kodu!

Atrisinājums. Vectēva seifa kods ir 2150154. Pamatosim, ka citu iespēju nav. Sāksim risinājumu ar 3) nosacījumu. Aplūkosim dažus pirmo piecu mazāko pirmskaitļu reizinājumus: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ (neder, jo 4 cipari), $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$ un $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 85085$. Tā kā nākamo piecu pēc kārtas esošu pirmskaitļu reizinājums $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 323323$ ir sešciparu skaitlis, tad vairāk iespēju nav. Tādā gadījumā meklēto septiņciparu kodu varam pierakstīt kā $\overline{a15015b}$ vai $\overline{a85085b}$. Ievērojot 2) nosacījumu, skaitlim jādalās ar 9. Aplūkosim abas iespējas.

1. Lai skaitlis $\overline{a15015b}$ dalītos ar 9, tā ciparu summai $a + 1 + 5 + 0 + 1 + 5 + b = 12 + a + b$ jādalās ar 9. No 1) nosacījuma $b = 2 \cdot a$, tātad skaitļa ciparu summai $12 + a + 2 \cdot a = 12 + 3 \cdot a$ jādalās ar 9, turklāt a jābūt mazākam nekā 5, lai b būtu cipars. Ja cipars a ir 0; 1; 3 vai 4, tad $12 + 3 \cdot a$ nedalās ar 9. Ja $a = 2$, tad $12 + 3 \cdot a = 18$, kas dalās ar 9, un $b = 2 \cdot 2 = 4$. Tātad seifa kods var būt 2150154.
2. Lai skaitlis $\overline{a85085b}$ dalītos ar 9, tā ciparu summai $a + 8 + 5 + 0 + 8 + 5 + b = 26 + a + b$ jādalās ar 9. Līdzīgi kā iepriekš $b = 2 \cdot a$, turklāt a ir mazāks nekā 5, tātad ciparu summai $26 + 3 \cdot a$ jādalās ar 9. Ievietojot a vietā visus iespējamos gadījumus (0; 1; 2; 3 un 4), ciparu summa nedalās ar 9, tātad kods nevar būt pierakstīts kā $\overline{a85085b}$.

3. uzdevums

Dagnijai uz galda ir 5×5 rūtiņu lapa, kur katrā rūtiņā ir ierakstīt kāds no burtiem P, C, K (skat. 1. att.). Dagnija katru rītu rūtiņu lapā vienu reizi izlasa frāzi “PCK”, sākot lasīt no centra rūtiņas un pārvietojoties uz rūtiņu, kurai ir kopīga mala vai stūris ar iepriekšējo rūtiņu. Cik rītus Dagnija var izlasīt “PCK” dažādos veidos?

K	K	K	K	K
K	C	C	C	K
K	C	P	C	K
K	C	C	C	K
K	K	K	K	K

1. att.

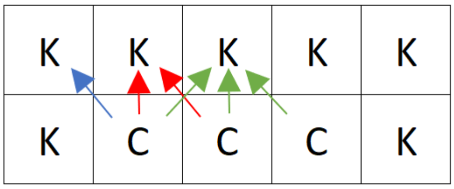
Atrisinājums. Katrā rūtiņā ierakstīsim, cik dažādos veidos tajā var nonākt (skat. 2. att.). Uz katru rūtiņu ar burtu C var nonākt tikai vienā veidā – no centra rūtiņas ar burtu P. Uz rūtiņām ar burtu K var nonākt 1; 2; 3; 2 un 1 veidā, sākot skaitīt no kādas stūra rūtiņas (skat. 3. att.). Tā kā frāze "PCK" beidzas kādā no rūtiņām ar burtu K, tad to var izlasīt

$$1+2+3+2+1+2+3+1+2+3+2+1+2+3+1+2+3+2=32$$

veidos jeb Dagnija 32 rītus varēs izlasīt "PCK" neatkārtojoties.

1	2	3	2	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
2	1	1	1	2
1	2	3	2	1

2. att.



3. att.

4. uzdevums

Pirmzemes naudas valūta ir alfoni. Katras monētas vērtība ir pirmskaitlis, kas mazāks nekā 50. Piemēram, monēta ar vismazāko vērtību ir 2 alfoni. Pirmzemē visus maksājumus var samaksāt ar veselu skaitu monētu.

a) Kāda ir mazākā naudas summa, kuras precīzai samaksāšanai nepieciešamas vismaz 3 monētas?

b) Maisā ir sešas dažādas vērtības monētas. Katrs no trim draugiem izņem divas monētas no maisa. Kāda ir mazākā iespējamā naudas summa maisā, ja visi trīs draugi ir izņēmuši vienādu naudas daudzumu?

c) Pierādi, ka ir tikai viens komplekts ar piecām monētām, kuras var sakārtot augošā secībā tā, lai katru divu blakus esošu monētu starpība ir 6 alfoni, pat tad, ja Pirmzemē monētu vērtības būtu arī tādi pirmskaitļi, kas ir lielāki nekā 50!

Atrisinājums. a) Mazākā naudas summa ir 27 alfoni. Parādīsim, ka jebkuru mazāku naudas summu var samaksāt ar 2 vai mazāk monētām. Pirmzemē monētas vērtība var būt 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43 un 47 alfoni. Jebkuru naudas summu no 2 līdz 26 alfoniem var samaksāt ar 2 vai mazāk monētām, kā parādīts tabulā.

$2=2$	$7=7$	$12=5+7$	$17=17$	$22=3+19$
$3=3$	$8=3+5$	$13=13$	$18=5+13$	$23=23$
$4=2+2$	$9=2+7$	$14=3+11$	$19=19$	$24=5+19$
$5=5$	$10=3+7$	$15=2+13$	$20=3+17$	$25=2+23$
$6=3+3$	$11=11$	$16=3+13$	$21=2+19$	$26=3+23$

Pamatosim, ka 27 alfonu apmaksāšanai noteikti ir nepieciešamas vismaz 3 monētas. Pieņemsim, ka 27 alfonus var apmaksāt ar 2 monētām. Tā kā divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad vienas monētas vērtībai jābūt pāra skaitlim. Vienīgā iespēja ir 2 alfoni, tātad otras monētas vērtībai jābūt 25 alfoni, bet 25 nav pirmskaitlis. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka 27 alfonus var apmaksāt ar 2 monētām, tātad to apmaksai nepieciešamas vismaz 3 monētas.

b) Mazākā iespējamā naudas summa maisā ir 72 alfoni. Pamatosim, ka mazāka vērtība nav iespējama. Tā kā pāra un nepāra skaitļu summa ir nepāra, tad maisā nevar atrasties 2 alfonu monēta, jo jebkuru citu divu monētu summa ir pāra skaitlis. Tādā gadījumā visu maisā esošo monētu vērtības ir nepāra skaitļi un kopējā naudas summa ir pāra skaitlis, tātad tas dalās ar 2. Tā kā trīs draugu izņemto divu monētu summas ir vienādas, tad kopējai naudas summai ir jādalās arī ar 3. Ja kopējā naudas summa dalās ar 2 un ar 3, tad tā dalās ar 6. Sešu mazāko monētu summa ir vismaz $3+5+7+11+13+17=56$, bet 56 ar 6 nedalās. Aplūkosim nākamās mazākās vērtības, kas dalās ar 6, un kā katra drauga izvilkto naudas daudzumu var izteikt ar 2 monētām.

Kopējais naudas daudzums	*2 monētu summa*	*Iespējamās 2 monētas*
60	20	3 un 17; 7 un 13
66	22	3 un 19; 5 un 17
72	24	5 un 19; 7 un 17; 11 un 13

Tā kā 60 un 66 alfonus var izteikt tikai 2 dažādos veidos, tad 72 alfoni ir mazākā iespējamā summa.

c) Pamatosim, ka vienīgie 5 pirmskaitļi, kurus var sakārtot augošā secībā tā, ka blakus esošo skaitļu starpība ir 6, ir 5; 11; 17; 23 un 29. Tā kā 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis, tad 2 nevar būt viens no meklētajiem pirmskaitļiem, citādi visu pārējo monētu vērtībām būtu jābūt pāra. Tātad visi meklētie pirmskaitļi ir nepāra un to pēdējie cipari var būt: 1; 3; 5; 7 un 9. Pamatosim, ka visu 5 meklēto pirmskaitļu pēdējiem cipariem jābūt dažādiem. Aplūkosim visas iespējas, kāds var būt pirmā skaitļa pēdējais cipars un attiecīgi pārējo skaitļu pēdējie cipari, ja tiem pieskaita 6:

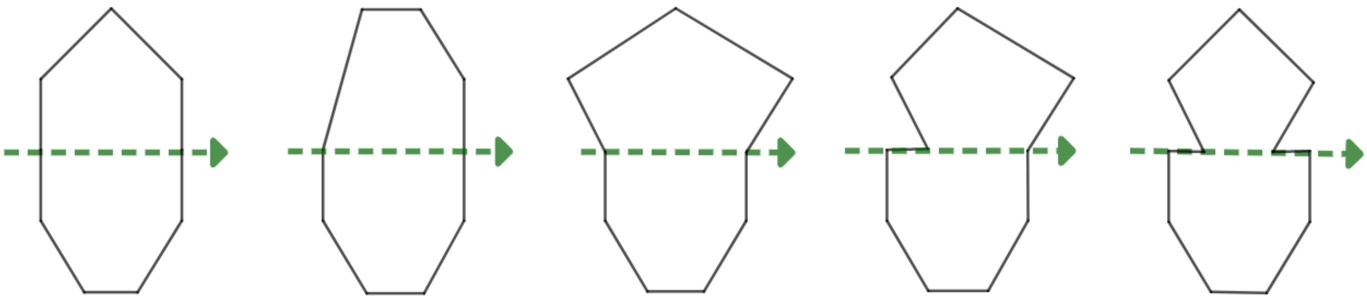
- 1; 7; 3; 9; 5;
- 3; 9; 5; 1; 7;
- 5; 1; 7; 3; 9;
- 7; 3; 9; 5; 1;
- 9; 5; 1; 7; 3.

Kā redzams, meklēto skaitļu pēdējiem cipariem jābūt dažādiem, tas ir, 1; 3; 5; 7 un 9. Vienīgais pirmskaitlis, kura pēdējais cipars ir 5, ir skaitlis 5. Tātad vienīgā iespēja ir, ka vienam no meklētajiem pirmskaitļiem jābūt 5 un eksistē tikai viens pirmskaitļu (monētu) komplekts: 5; 11; 17; 23 un 29.

5. uzdevums

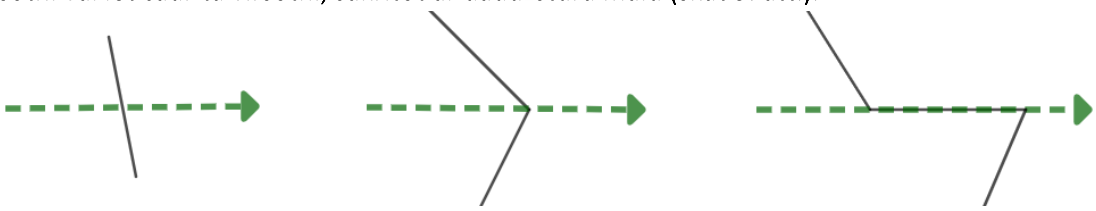
Ezītis meža ielokā iestaigāja taciņu daudzstūra formā. Pēc tam viņš iestaigāja taisnu taciņu pāri daudzstūrim, sadalot to divās daļās – piecstūrī un sešstūrī. Cik malu varēja būt sākotnējo taciņu veidotajam daudzstūrim?

Atrisinājums. Sākotnējam daudzstūrim varēja būt 7; 8; 9; 10 vai 11 malas (skat. 4. att., kurā ar zaļu pārtrauktu bultu attēlota ezīša taisnā taciņa).



4. att.

Pamatosim, ka citu iespēju nav. Ezīša taisnajai taciņai ir divi gali. Taisnās taciņas viens gals var krustot daudzstūra malu, iet caur tā virsotni vai iet caur tā virsotni, sakrītot ar daudzstūra malu (skat 5. att.).



5. att.

Visvairāk jaunu malu rodas, ja taciņa krustos daudzstūra malas. Tā kā daudzstūri sadalīja 2 figūrās (piecstūrī un sešstūrī), tad taciņa var krustot tikai 2 malas, tātad vairāk kā 4 jaunas malas nevar veidoties un mazākais iespējamais malu skaits ir 7. Ja nerodas neviena jauna mala, tad lielākais iespējamais malu skaits ir $5 + 6 = 11$.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums
Kāds var būt četrciparu skaitlis, kurš kļūst četras reizes lielāks, kad tā ciparus uzraksta pretējā secībā?
Atrisinājums. Uzdevumā prasīts atrast skaitli $\overline{abcd}$, lai $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$. Varam secināt, ka $a < 3$, jo citādi $3000 \cdot 4 = 12000$ un mēs iegūtu piecciparu skaitli. Skaitlis $\overline{dcba}$ ir pāra skaitlis, tāpēc ciparam a jābūt pāra, no kurienes secinām, ka $a = 2$. No $\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}$ iegūstam, ka $d \geq 8$, bet $d \cdot 4$ beidzas ar ciparu 2, tāpēc $d = 8$. Rezultātā esam ieguvuši, ka $\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}$ jeb

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2.$$

Savelkot līdzīgos saskaitāmos un abas puses izdalot ar 30, iegūstam

$$390b + 30 = 60c;$$

$$13b + 1 = 2c.$$

Izteiksmes labā puse ir pāra skaitlis, tāpēc b jābūt nepāra ciparam un mazākam nekā 2. Iegūstam, ka $b = 1$ un $c = 7$. Prasītais skaitlis ir 2178.

7. uzdevums
Kāds var būt mazākais skaitlis, kuram nodzēšot pirmo ciparu, tas kļūst 73 reizes mazāks?
Atrisinājums. Ar x apzīmēsim skaitļa pirmo ciparu, bet ar y skaitli, kas izveidojas, nodzēšot x no sākotnējā skaitļa. Pēc uzdevuma nosacījumiem iegūstam, ka $10^n \cdot x + y = 73y$ jeb $10^n \cdot x = 72y$. Skaitlis 72 satur reizinātāju 9, tāpēc $10^n \cdot x$ arī jādalās ar 9. Tā kā 10^n nedalās ar 9, tad x jādalās ar 9. Tā kā x ir cipars, tad $x = 9$. Varam vienkāršot izteiksmi un iegūt, ka $10^n = 8y$. Tātad $y = \frac{10^n}{8}$. Tā kā y ir vesels skaitlis, tad jāatrod mazākais n, lai dalījums būtu vesels skaitlis. Tas notiek ja $n = 3$, jo tad $y = \frac{1000}{8} = 125$. Secinām, ka meklētais skaitlis ir

$$10^3 \cdot 9 + 125 = 9125 = 73 \cdot 125.$$