Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
I E G U L D Ī J U M S   T A V Ā   N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9.1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka izteiksmes $x^2 - x - y^2 + y$ vērtība ir **a)** 10, **b)** 2023?

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, $x = 4$ un $y = 2$, tad $4^2 - 4 - 2^2 + 2 = 16 - 4 - 4 + 2 = 10$.

b) Nē, tādi naturāli skaitļi x un y neeksistē. Pārveidojot izteiksmi, iegūstam

$$x^2 - x - y^2 + y = x(x-1) - y(y-1).$$

Tā kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums ir pāra skaitlis, tad abi saskaitāmie $x(x-1)$ un $y(y-1)$ ir pāra skaitļi. Divu pāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis, tātad to starpība nevar būt 2023, jo tas ir nepāra skaitlis.

9.2. Doti 8 atsvari, kuru masas attiecīgi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 un 8 kg. Vai šos atsvarus var novietot uz sviru svaru kausiem tā, lai izpildās abi nosacījumi:

- sākumā uz katra svaru kausa būtu 4 atsvari un svari atrastos līdzsvarā;
- atsvarus varētu pārmaiņus noņemt no viena svaru kausa un no otra tā, lai pēc katra atsvara (izņemot pēdējā) noņemšanas tas kauss, no kura noņem atsvaru, kļūtu vieglāks nekā otrs svaru kauss?

Atrisinājums. Jā, var, atsvarus izvietojam šādi: uz viena svaru kausa liekam atsvarus, kuru masa ir 3, 4, 5, 6 kg (kopā 18 kg), bet uz otra – 1, 2, 7, 8 kg (kopā 18 kg). Atsvarus var noņemt šādā secībā: 3; 7; 5; 2; 4; 8; 6; 1 (masas izmaiņa dota tabulā, kur pelēkā krāsā iekrāsots vieglākais svaru kauss).

Noņemtais atsvars	1. kauss	2. kauss	1. kausa atsvaru masa	2. kausa atsvaru masa
sākumā	**3**, 4, 5, 6	1, 2, 7, 8	18	18
3	4, 5, 6	1, 2, **7**, 8	**15**	18
7	4, **5**, 6	1, 2, 8	15	**11**
5	4, 6	1, **2**, 8	**10**	11
2	**4**, 6	1, 8	10	**9**
4	6	1, **8**	**6**	9
8	**6**	1	6	**1**
6		1	**0**	1

9.3. Pa apli uzrakstīti n skaitļi, kur katrs no tiem ir 0 vai 1. Vienā gājienā Māris var izvēlēties kādu skaitli, kuram blakus abās pusēs (pa labi un pa kreisi) uzrakstītie skaitļi ir vienādi, un izvēlētā skaitļa vietā uzrakstīt otru skaitli (tas ir, skaitļa 0 vietā uzrakstīt 1 un otrādi). Vai Māris, atkārtojot šādus gājienus, vienmēr (neatkarīgi no sākotnējām skaitļu vērtībām un izkārtojuma) var panākt, ka visi pa apli uzrakstītie skaitļi ir vienādi, ja: **a)** $n = 72$; **b)** $n = 73$; **c)** $n = 74$?

Atrisinājums. a) Ja $n = 72$, tad Māris ne vienmēr var iegūt prasīto. Piemēram, ja skaitļi pa apli izkārtoti tā, ka 18 reizes pēc kārtas atkārtojas skaitļu četrinieki "$0; 0; 1; 1$", tad nav tāda skaitļa, kam abās pusēs uzrakstīti vienādi skaitļi. Līdz ar to Māris vispār nevar veikt nevienu gājienu un nevar panākt, ka visi aplī esošie skaitļi kļūst vienādi.

b) Pamatosim, ka Māris vienmēr var panākt, ka pa apli uzrakstīti vienādi skaitļi. Ar bloku apzīmēsim vienādu skaitļu virkni, kurai abos galos blakus atrodas pretēji skaitļi virknē esošajiem (piemēram, $\dots; 0; \underbrace{1; 1; \dots; 1; 1}_{bloks}; 0; \dots$). Ievērosim, ka eksistē bloks, kura garums ir nepāra skaitlis. Ja tāds bloks neeksistētu, tad bloku garumu summa būtu pāra skaitlis, kas ir visu skaitļu kopējais skaits. Iegūstam pretrunu, jo pa apli uzrakstīti 73 skaitļi (nepāra skaitlis).

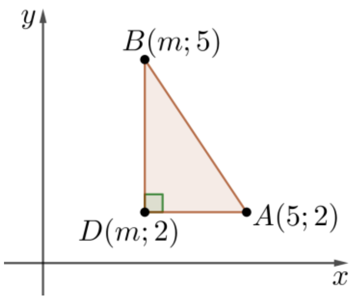
Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka šajā blokā ir $2k+1$ vieninieki (gadījums ar nullēm ir līdzīgs). Katram vieniniekam piešķirsim indeksu a_i pulksteņa rādītāja virzienā. Sākumā Māris veic gājienus ar vieniniekiem, kuriem ir pāra indekss, tas ir, $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$, un pēc tam veic gājienus ar vieniniekiem ar nepāra indeksu, tas ir, $a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}$. Tādā veidā bloks ar vieniniekiem tiek pārveidots par bloku ar nullēm. Tā kā sākotnējam blokam abās pusēs ir divi bloki ar nullēm, tad pēc aprakstīto gājienu veikšanas visi trīs bloki *saplūdīs* kopā. Tātad kopējais bloku skaits samazinās par 2. Šādi Māris turpina darboties – atrod bloku ar garumu, kas ir nepāra skaitlis, un *saplūdina* to kopā ar blakus esošajiem blokiem. Kādā brīdī bloku skaits kļūs vienāds ar 2, jo sākumā bloku skaits ir pāra (nuļļu un vieninieku bloki mainās pārmaiņus). Kad tas būs izdarīts, Māris var veikt gājienu ar to bloku, kura garums ir nepāra skaitlis, un tad visi uzrakstītie skaitļi būs vienādi.

c) Ja $n=74$, tad Māris ne vienmēr var iegūt prasīto. Aplūkosim šādu skaitļu izkārtojumu: skaitļu četriniekam "$1;1;1;1$" no abām pusēm pārmaiņus ir sarakstīti skaitļu pāri "$0;0$" un "$1;1$". Šādā gadījumā "$1;1;1;1$" no abām pusēm būs "$0;0$". Māris var veikt divus iespējamus gājienus: "$1;1;1;1$" pārrakstīt vai nu par "$1;0;1;1$" vai "$1;1;0;1$". Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka "$1;1;1;1$" ir pārtaisīts par "$1;0;1;1$" (otrs gadījums ir līdzīgs). Tādā gadījumā nākamais iespējamais gājiens ir skaitļu bloku "$0;0;1;0;1;1;0;0$" pārrakstīt par "$0;0;0;0;1;1;0;0$" vai "$0;0;1;1;1;1;0;0$. Tas nozīmē, ka Māris iegūs līdzīgu situāciju pirms diviem gājieniem esošajam skaitļu izkārtojumam. Līdz ar to Māris šajā gadījumā nevarēs iegūt uzdevumā prasīto.

9.4. Plaknē atzīmēti punkti $A(5;2), B(m;5)$ un $C(3;m)$. Kādām reālām m vērtībām trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris?

Atrisinājums. Apskatām taisnleņķa trijstūri ADB, kur $D(m;2)$, $AD=|5-m|$ un $BD=|5-2|=3$ (skat. 1. att.). Izmantojot Pitagora teorēmu ΔADB, aprēķinām nogriežņa AB garuma kvadrātu:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (5-m)^2 + (2-5)^2 = m^2 - 10m + 34.$$



1. att.

Līdzīgi, katram nogrieznim konstruējot taisnleņķa trijstūri, iegūstam, ka

$$AC^2 = (5-3)^2 + (2-m)^2 = m^2 - 4m + 8;$$

$$BC^2 = (m-3)^2 + (5-m)^2 = 2m^2 - 16m + 34.$$

Lai trijstūris ABC būtu taisnleņķa, divu malu garumu kvadrātu summai jābūt vienādai ar trešās malas garuma kvadrātu. Aplūkojam trīs iespējamos gadījumus.

1. Ja $AB^2 + AC^2 = BC^2$, tad

$$m^2 - 10m + 34 + m^2 - 4m + 8 = 2m^2 - 16m + 34;$$
$$2m + 8 = 0;$$
$$m = -4.$$

2. Ja $AC^2 + BC^2 = AB^2$, tad

$$m^2 - 4m + 8 + 2m^2 - 16m + 34 = m^2 - 10m + 34;$$
$$m^2 - 5m + 4 = 0;$$
$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 4.$$

3. Ja $AB^2 + BC^2 = AC^2$, tad

$$m^2 - 10m + 34 + 2m^2 - 16m + 34 = m^2 - 4m + 8;$$
$$m^2 - 11m + 30 = 0;$$
$$m_1 = 5, \qquad m_2 = 6.$$

Esam ieguvuši, ka trijstūris ABC ir taisnleņķa ja m ir $-4; 1; 4; 5; 6$.

9.5. Uz tāfeles uzrakstīti dažādi pirmskaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir 25. Kāds vislielākais pirmskaitlis var būt uzrakstīts uz tāfeles?

Atrisinājums. Lielākais uz tāfeles uzrakstītais pirmskaitlis var būt 127. Pamatosim, ka lielāks pirmskaitlis nevar būt uzrakstīts. Ja viens no uzrakstītajiem pirmskaitļiem ir pirmskaitlis 2, tad pārējie uzrakstītie skaitļi ir nepāra skaitļi un iespējami divi gadījumi:

1) visu uzrakstīto skaitļu kopējais skaits ir nepāra skaitlis un skaitļu summa ir pāra skaitlis, tātad vidējais aritmētiskais nevar būt nepāra skaitlis (var būt pāra skaitlis vai daļskaitlis);
2) visu uzrakstīto skaitļu kopējais skaits ir pāra skaitlis un skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tātad vidējais aritmētiskais nav vesels skaitlis.

Abi gadījumi neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tātad uz tāfeles nav uzrakstīts skaitlis 2.

Lielāko uz tāfeles uzrakstīto pirmskaitli apzīmēsim ar p. Varam secināt, ka $p > 25$, jo uzrakstītie skaitļi ir dažādi un to vidējais aritmētiskais ir 25. Uzrakstīsim uz tāfeles visus trūkstošos pirmskaitļus, kas mazāki nekā 25, un nodzēsīsim visus uz tāfeles esošos pirmskaitļus, kas lielāki nekā 25, izņemot p. Šādā gadījumā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais samazināsies. No tā iegūstam, ka

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+23+p}{9} \leq 25.$$

Tātad $p \leq 127$. Tā kā 127 ir pirmskaitlis, tad uz tāfeles var būt uzrakstīti pirmskaitļi 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 127, kuru vidējais aritmētiskais ir 25.

10. klase

10.1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$3(x^2+y^2+z^2+4)-2(xy+yz+zx)-4(x+y+z)=0.$$

Atrisinājums. Atverot iekavas un sagrupējot saskaitāmos, iegūstam

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2xz+x^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4)=0;$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0.$$

Tā kā katrs saskaitāmais ir starpības kvadrāts, tad visi saskaitāmie ir nenegatīvi. Vienīgā iespēja, kā, saskaitot sešus nenegatīvus skaitļus, iegūt 0, ir tad, ja katra saskaitāmā vērtība ir 0. Tātad $x=y=z=2$.

10.2. Doti 8 atsvari, kuru masas attiecīgi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 un 8 kg. Vai šos atsvarus var novietot uz sviru svaru kausiem tā, lai izpildās abi nosacījumi:

- sākumā uz katra svaru kausa būtu 4 atsvari un svari atrastos līdzsvarā;
- atsvarus varētu pārmaiņus noņemt no viena svaru kausa un no otra tā, lai pēc katra atsvara (izņemot pēdējā) noņemšanas tas kauss, no kura noņem atsvaru, kļūtu vieglāks nekā otrs svaru kauss?

Atrisinājums. Jā, var, atsvarus izvietojam šādi: uz viena svaru kausa liekam atsvarus, kuru masa ir 3, 4, 5, 6 kg (kopā 18 kg), bet uz otra – 1, 2, 7, 8 kg (kopā 18 kg). Atsvarus var noņemt šādā secībā: 3; 7; 5; 2; 4; 8; 6; 1 (masas izmaiņa dota tabulā, kur pelēkā krāsā iekrāsots vieglākais svaru kauss).

Noņemtais atsvars	1. kauss	2. kauss	1. kausa atsvaru masa	2. kausa atsvaru masa
sākumā	**3**, 4, 5, 6	1, 2, 7, 8	18	18
3	4, 5, 6	1, 2, **7**, 8	**15**	18
7	4, **5**, 6	1, 2, 8	15	**11**
5	4, 6	1, **2**, 8	**10**	11
2	**4**, 6	1, 8	10	**9**
4	6	1, **8**	**6**	9
8	**6**	1	6	**1**
6		1	**0**	1

10.3. Rindā kaut kādā secībā uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2023. Vienā gājienā tiek sareizināti katri divi blakus esošie skaitļi un zem tiem tiek uzrakstīta šī reizinājuma ciparu summa; šādā veidā tiek iegūta jauna rinda, kurā ir par vienu skaitli mazāk nekā sākotnējā rindā. Pēc pirmā gājiena tiek iegūta jauna rinda, kurā ir 2022 skaitļi, pēc otrā gājiena tiek iegūta jauna rinda, kurā ir 2021 skaitlis utt., līdz pēc 2022. gājiena tiek iegūta pēdējā jaunā rinda, kurā ir tikai viens skaitlis. Atrast visas iespējamās šī pēdējā skaitļa vērtības!

Atrisinājums. Pēdējais skaitlis vienmēr būs 9. Pamatosim, ka uz tāfeles beigās nevar būt uzrakstīts kāds cits skaitlis. Ievērosim, ka, ja skaitlis dalās ar 9, tad arī tā ciparu summa dalās ar 9. Tā kā pirmajā rindā ir skaitļi, kas dalās ar 9, tad, šos skaitļus sareizinot ar kādu citu skaitli un iegūstot reizinājuma ciparu summu, iegūtais skaitlis dalīsies ar 9. Tātad arī otrajā rindā būs skaitļi, kas dalīsies ar 9. Līdzīgi spriežot, iegūstam, ka arī pēdējā rindā esošajam skaitlim ir jādalās ar 9.

Pamatosim vēl vairāk – ka priekšpēdējā rindā abi skaitļi dalās ar 9. Ja mēs katrai rindai atmetam pēdējo locekli, tad priekšpēdējā rinda kļūst par pēdējo. Tā kā sākotnējās rindas kreisajā daļā (bez labā malējā locekļa) noteikti kāds skaitlis dalās ar 9, tad, spriežot kā iepriekš, arī pēdējais loceklis dalās ar 9. Tātad priekšpēdējās rindas kreisais loceklis dalās ar 9. Līdzīgi, atmetot pirmo locekli, secinām, ka arī priekšpēdējās rindas labais loceklis dalās ar 9.

Aplūkosim, cik lieli var būt skaitļi katrā rindā. Pirmajā rindā lielākais skaitlis ir 2023, tātad divu šīs rindas skaitļu reizinājums nepārsniegs $2023^2 = 4\,092\,529$, kas ir septiņciparu skaitlis. Līdz ar to neviens no iegūtajiem skaitļiem otrajā rindā nebūs lielāks kā $9 \cdot 7 = 63$. Līdzīgi varam aplūkot otrās rindas lielāko iespējamo skaitļu reizinājuma vērtību $63 \cdot 63 = 3969$ un secināt, ka trešajā rindā neviens skaitlis nebūs lielāks kā $3 + 9 \cdot 3 = 30$. Līdzīgi secinām, ka trešās rindas divu skaitļu reizinājums nepārsniedz $30 \cdot 30 = 900$, tātad ceturtās rindas skaitļi nepārsniedz $8 + 9 + 9 = 26$. Tā kā $26 \cdot 26 = 676 < 899$, tad katrā nākamajā rindā lielākais skaitlis nepārsniegs 26.

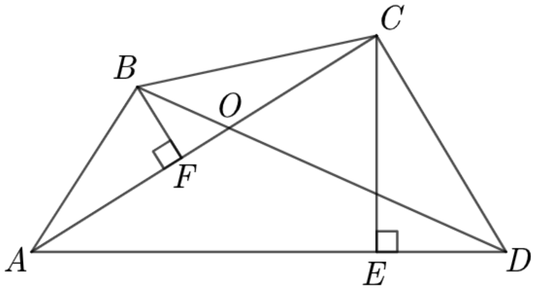
Kā secinājām iepriekš, priekšpēdējās rindas abiem skaitļiem jādalās ar 9. Tā kā šie abi skaitļi nepārsniedz 26, tad vienīgās iespējamās to vērtības ir 9 vai 18. Aplūkosim visus iespējamos gadījumus priekšpēdējās rindas skaitļiem:

- ja abi skaitļi ir 9, tad $9 \cdot 9 = 81$, kura ciparu summa ir 9;
- ja viens skaitlis ir 9, bet otrs ir 18, tad $9 \cdot 18 = 162$, kura ciparu summa ir 9;
- ja abi skaitļi ir 18, tad $18 \cdot 18 = 324$, kura ciparu summa ir 9.

Tātad varam secināt, ka pēdējais uzrakstītais skaitlis var būt tikai 9.

10.4. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunkts ir O. Zināms, ka $\sphericalangle CAD = 30°$, $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle BAD$ un $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ADC$. Aprēķināt $\sphericalangle COD$!

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle BAD = \alpha$ un $\sphericalangle BCD = 2\alpha$. Tad $\sphericalangle BAC = \alpha - 30°$.



2. att.

No izliekta četrstūra iekšējo leņķu summas iegūstam, ka

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle ADC = 360°;$$

$$3\alpha + 3\sphericalangle ADC = 360° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \sphericalangle ADC = 120°.$$

Tad $\sphericalangle ADC = 120° - \alpha$ un $\sphericalangle ABC = 240° - 2\alpha$.

No trijstūra ABC iegūstam, ka

$$\sphericalangle BCA = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC = 180° - (240° - 2\alpha) - (\alpha - 30°) = \alpha - 30° = \sphericalangle BAC.$$

Tātad ΔABC ir vienādsānu un $AB = BC$.

No punkta C pret malu AD novelkam perpendikulu CE. Tad $\sphericalangle ACE = 60°$ un $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA - \sphericalangle ACE = 2\alpha - (\alpha - 30°) - 60° = \alpha - 30°$.

Vienādsānu trijstūrī ABC pret malu AC novelkam augstumu BF, kas ir arī mediāna, tāpēc $AF = \frac{1}{2}AC$. No ΔAEC iegūstam, ka $CE = \frac{1}{2}AC$ kā katete pret $30°$ leņķi. Līdz ar to $\Delta AFB = \Delta CED$ pēc pazīmes "$\ell m \ell$", jo $\sphericalangle BAF = \sphericalangle DCE = \alpha - 30°$, $AF = CE$ un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CED = 90°$. Tātad $AB = CD$ kā atbilstošās malas.

Tā kā $BC = AB = CD$, tad trijstūris BCD ir vienādsānu un $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BCD) = 90° - \alpha$.

Līdz ar to $\sphericalangle COD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle CBD = \alpha - 30° + 90° - \alpha = 60°$ kā ΔBOC ārējais leņķis.

10.5. Pa apli sarakstīti n skaitļi, kur katrs no tiem ir 0 vai 1. Vienā gājienā Kims var izvēlēties kādu skaitli, kuram blakus abās pusēs (pa labi un pa kreisi) uzrakstītie skaitļi ir vienādi, un izvēlētā skaitļa vietā uzrakstīt otru skaitli (tas ir, skaitļa 0 vietā uzrakstīt 1 un otrādi). Kādām n vērtībām Kims, atkārtojot šādus gājienus, vienmēr (neatkarīgi no skaitļu sākotnējām vērtībām un izkārtojuma) var panākt, ka visi pa apli uzrakstītie skaitļi kļūst vienādi?

Atrisinājums. Kims prasīto var panākt visiem nepāra skaitļiem n. Vispirms pierādīsim, ka, ja $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ un $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, tad eksistē skaitļu izkārtojums, no kura Kims nevar iegūt izkārtojumu, kurā visi skaitļi ir vienādi. Aplūkosim abus gadījumus.

- Ja $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ jeb $n = 4k$, tad aplūkojam tādu skaitļu izkārtojumu, kurā ir k pēc kārtas esoši skaitļu četrinieki "$0; 0; 1; 1$". Šādā gadījumā nav tāda skaitļa, kam abās pusēs uzrakstīti vienādi skaitļi, un Kims vispār nevar veikt nevienu gājienu, līdz ar to nevar panākt, ka visi aplī esošie skaitļi kļūst vienādi.
- Ja $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ jeb $n = 4k + 2$, tad aplūkojam šādu skaitļu izkārtojumu: skaitļu četriniekam "$1; 1; 1; 1$" no abām pusēm pārmaiņus rakstīti skaitļu pāri "$0; 0$" un "$1; 1$". Šādā gadījumā "$1; 1; 1; 1$" no abām pusēm būs "$0; 0$". Kims var veikt divus iespējamus gājienus: "$1; 1; 1; 1$" pārrakstīt vai nu par "$1; 0; 1; 1$" vai "$1; 1; 0; 1$". Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka "$1; 1; 1; 1$" ir pārveidots par "$1; 0; 1; 1$" (otrs gadījums ir līdzīgs). Tādā gadījumā nākamais iespējamais gājiens ir skaitļu bloku "$0; 0; 1; 0; 1; 1; 0; 0$" pārveidot par "$0; 0; 0; 0; 1; 1; 0; 0$" vai "$0; 0; 1; 1; 1; 1; 0; 0$. Tas nozīmē, ka Kims iegūs līdzīgu situāciju pirms diviem gājieniem esošajam skaitļu izkārtojumam. Līdz ar to Kims šajā gadījumā nevarēs iegūt uzdevumā prasīto.

Pamatosim, ka gadījumā, ja n ir nepāra skaitlis, tad Kims vienmēr var panākt, ka pa apli uzrakstīti vienādi skaitļi. Ar bloku apzīmēsim vienādu skaitļu virkni, kurai abos galos blakus atrodas pretēji skaitļi virknē esošajiem (piemēram, $\ldots; 0; \underbrace{1; 1; \ldots; 1; 1}_{bloks}; 0; \ldots$). Ievērosim, ka eksistē bloks, kura garums ir nepāra skaitlis. Ja tāds bloks neeksistētu, tad bloku garumu summa būtu pāra skaitlis, kas ir visu skaitļu kopējais skaits. Iegūstam pretrunu, jo pa apli uzrakstīts nepāra skaits skaitļu.

Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka šajā blokā ir $2k + 1$ vieninieki (gadījums ar nullēm ir līdzīgs). Katram vieniniekam piešķirsim indeksu a_i pulksteņa rādītāja virzienā. Sākumā Kims veic gājienus ar vieniniekiem, kuriem ir pāra indekss, tas ir, $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$, un pēc tam veic gājienus ar vieniniekiem ar nepāra indeksu, tas ir, $a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}$. Tādā veidā bloks ar vieniniekiem tiek pārveidots par bloku ar nullēm. Tā kā sākotnējam blokam abās pusēs ir divi bloki ar nullēm, tad pēc aprakstīto gājienu veikšanas visi trīs bloki *saplūdīs* kopā. Tātad kopējais bloku skaits samazinās par 2. Šādi Kims turpina darboties – atrod bloku ar garumu, kas ir nepāra skaitlis, un *saplūdina* to kopā ar blakus esošajiem blokiem. Kādā brīdī bloku skaits kļūs vienāds ar 2, jo sākumā bloku skaits ir pāra (nuļļu un vieninieku bloki mainās pārmaiņus). Kad tas būs izdarīts, Kims var veikt gājienu ar to bloku, kura garums ir nepāra skaitlis, un tad visi uzrakstītie skaitļi būs vienādi.

11. klase

11.1. Doti tādi reāli skaitļi x un y, ka $x + y = 1$ un $x^2 + y^2 = 3$. Pierādīt, ka izteiksmes $x^{11} + y^{11}$ vērtība ir naturāls skaitlis, un atrast šo vērtību!

1. atrisinājums. Lai iegūtu prasīto vērtību, izmantosim šādu vienādību:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Vispirms aprēķinām xy vērtību:

$$2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = 1^2 - 3 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad xy = -1.$$

Ja ar a_n apzīmējam $x^n + y^n$ vērtību, tad šādi esam aprakstījuši rekurences sakarību:

$$a_1 = 1; \qquad a_2 = 3; \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Izmantojot šo sakarību, jāatrod a_{11} jeb $x^{11} + y^{11}$. Pakāpeniski rēķinot, iegūstam, ka

$$a_3 = 4;\ a_4 = 7;\ a_5 = 11;\ a_6 = 18;\ a_7 = 29;\ a_8 = 47; a_9 = 76;\ a_{10} = 123;\ a_{11} = 199.$$

2. atrisinājums. Vispirms noskaidrosim skaitļa xy vērtību:

$$2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2 = 1^2 - 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad xy = -1.$$

Tālāk varam izmantot šādas vienādības, lai pakāpeniski aprēķinātu prasīto vērtību:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \cdot (3+1) = 4;$$

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (xy)^2(x+y) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11;$$

$$x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3 = 4^2 + 2 = 18;$$

$$x^{11} + y^{11} = (x^6 + y^6)(x^5 + y^5) - (xy)^5(x+y) = 18 \cdot 11 + 1 \cdot 1 = 199.$$

11.2. Augoša aritmētiskā progresija sastāv no trīs trīsciparu skaitļiem. Zināms, ka jebkuru no šiem trīsciparu skaitļiem var iegūt no jebkura cita, samainot vietām tā ciparus. Kāda ir mazākā iespējamā šīs aritmētiskās progresijas diference?

Atrisinājums. Mazākā diferences vērtība ir 45, kuru var iegūt, piemēram, ja dota aritmētiskā progresija 127; 172; 217. Pamatosim, ka mazāku diferences vērtību nevar iegūt.

Vispirms pierādīsim, ka trīs doto skaitļu pierakstā ir izmantoti trīs atšķirīgi cipari.

Ja būtu izmantots tikai viens cipars, tad nebūtu iespējams izveidot trīs atšķirīgus skaitļus.

Pieņemsim, ka skaitļi veidoti no diviem atšķirīgiem cipariem a un b ($a < b$). Tad iespējami divi atšķirīgi trīs skaitļu komplekti: $\overline{aab} < \overline{aba} < \overline{baa}$ vai $\overline{abb} < \overline{bab} < \overline{bba}$. Tā kā šie ir vienīgie skaitļi, ko iespējams izveidot, tad skaitļi tieši šādā secībā arī ir aritmētiskās progresijas trīs secīgi locekļi. Aprēķināsim otrā un pirmā locekļa starpību Δ_1 un trešā un otrā locekļa starpību Δ_2. Pēc aritmētiskās progresijas īpašībām $\Delta_1 = \Delta_2$. Apskatām katru gadījumu:

- Ja $\overline{aab} < \overline{aba} < \overline{baa}$, tad $\Delta_1 = 9(b-a)$ un $\Delta_2 = 90(b-a)$. No tā, ka $\Delta_1 = \Delta_2$, izriet, ka $b = a$ (pretruna).
- Ja $\overline{abb} < \overline{bab} < \overline{bba}$, tad $\Delta_1 = 90(b-a)$ un $\Delta_2 = 9(b-a)$. No tā, ka $\Delta_1 = \Delta_2$, izriet, ka $b = a$ (pretruna).

Tātad dotie skaitļi ir veidoti no trīs dažādiem cipariem.

Pieņemsim, ka šie cipari ir a, b un c ($a < b < c$). No šiem cipariem iespējams izveidot sešus skaitļus:

$$\overline{abc} < \overline{acb} < \overline{bac} < \overline{bca} < \overline{cab} < \overline{cba}.$$

Aprēķinām katru divu blakus skaitļu starpību:

$$\Delta_1 = \overline{acb} - \overline{abc} = 9(c-b);$$

$$\Delta_2 = \overline{bac} - \overline{acb} = 90(b-a) - 9(c-b);$$

$$\Delta_3 = \overline{bca} - \overline{bac} = 9(c-a);$$

$$\Delta_4 = \overline{cab} - \overline{bca} = 90(c-b) - 9(b-a);$$

$$\Delta_5 = \overline{cba} - \overline{cab} = 9(b-a).$$

Mazāko iespējamo diferenci iegūsim, ja trīs skaitļi sešu skaitļu virknē būs pēc kārtas. Aplūkosim, kāda var būt trešā un pirmā meklētā skaitļa starpība. Šī starpība ir vienāda ar divu secīgu Δ_i summu:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 90(b-a) \geq 90;$$

$$\Delta_2 + \Delta_3 = 90(b-a) - 9(c-b) + 9(c-a) = 99(b-a) \geq 99;$$

$$\Delta_3 + \Delta_4 = 90(c-b) - 9(b-a) + 9(c-a) = 99(c-b) \geq 99;$$

$$\Delta_4 + \Delta_5 = 90(c-b) \geq 90.$$

Tātad divu diferenču mazākā iespējamā vērtība ir 90. Līdz ar to esam pamatojuši, ka mazākā diference ir $90 : 2 = 45$.

Piezīme. Aplūkosim, kā var atrast tādas a, b un c vērtības, lai $\Delta_1 = \Delta_2$.

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \Rightarrow \quad 9(c-b) = 90(b-a) - 9(c-b) \quad \Rightarrow \quad c - b = 5(b-a)$$

Tātad $b-a=1$ un $c-b=5$, jo a, b un c ir cipari. Derīgas $(a;b;c)$ vērtības ir $(1;2;7)$, $(2;3;8)$ un $(3;4;9)$, bet aritmētiskās progresijas locekļi ir attiecīgi 127, 172, 217; 238, 283, 328; 349, 394, 439.
Līdzīgu rezultātu var iegūt, ja meklē a, b un c vērtības, kurām $\Delta_4 = \Delta_5$.
Tad $c-b=1$ un $b-a=5$ un derīgas $(a;b;c)$ vērtības ir $(1;6;7)$, $(2;7;8)$ un $(3;8;9)$, bet aritmētiskās progresijas locekļi ir attiecīgi 671,716,761; 782, 827, 872; 893, 938, 983.

11.3. Dota vienādsānu trapece $ABCD$, tās pamati ir AB un CD un diagonāles krustojas punktā X. Malas AD viduspunktu apzīmēsim ar M. Caur X vilktā taisne, kas paralēla AB, krusto malu AD punktā Y. Pierādīt, ka punkti B, C, M, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Lai pierādītu, ka ap četrstūri $BCMY$ var apvilkt riņķa līniju, pietiek pierādīt, ka $\sphericalangle MYB + \sphericalangle MCB = 180°$ jeb $\sphericalangle MCB = 180° - \sphericalangle MYB$. Tā kā $\sphericalangle MYB = 180° - \sphericalangle AYB$ (blakusleņķu īpašība), tad jāpierāda, ka $\sphericalangle AYB = \sphericalangle MCB$.
Ar N apzīmēsim malas BC viduspunktu, bet ar T – taišņu AB un DN krustpunktu. Tā kā $\sphericalangle BNT = \sphericalangle CND$ (krustleņķi), $BN = NC$ un $\sphericalangle NBT = \sphericalangle NCD$ (iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un CD), tad $\Delta BNT = \Delta CND$ pēc pazīmes $\ell m \ell$. Tādā gadījumā to atbilstošās malas BT un CD ir vienādas, tātad

$$\frac{AB}{BT} = \frac{AB}{CD}.$$

Ievērojam, ka $\Delta BAX \sim \Delta DCX$ pēc pazīmes $\ell\ell$, tātad

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AX}{CX}.$$

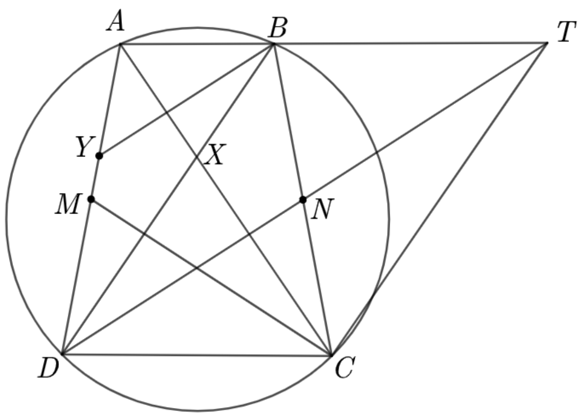
Tā kā $YX \parallel CD$, tad no Talesa teorēmas iegūstam, ka

$$\frac{AX}{XC} = \frac{AY}{YD}.$$

No vienādībām iegūstam, ka

$$\frac{AB}{BT} = \frac{AY}{YD}.$$

Tātad $\Delta YAB \sim \Delta DAT$ pēc pazīmes $m\ell m$ un $YB \parallel DT$, tātad $\sphericalangle AYB = \sphericalangle NDA$ kā kāpšļu leņķi. Tā kā $\sphericalangle NDA = \sphericalangle MCB$ simetrijas dēļ vienādsānu trapecē, tad $\sphericalangle AYB = \sphericalangle NDA = \sphericalangle MCB$. Tātad ap četrstūri $BCMY$ var apvilkt riņķa līniju.



3. att.

11.4. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu četrinieku $(a_1;\ b_1;\ a_2;\ b_2)$, ka $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$ un

$$2^{a_1} - (b_1)^2 = 2^{a_2} - (b_2)^2 > 0.$$

Atrisinājums. Ņemsim patvaļīgu naturālu skaitli $k \geq 2$ un aplūkosim skaitļu četriniekus $(2k;\ 2^k - 1;\ k+1;\ 1)$. Visi šie skaitļu četrinieki atbilst uzdevuma nosacījumiem, jo

$$2^{2k} - \left(2^k - 1\right)^2 = 2^{2k} - \left(2^{2k} - 2 \cdot 2^k + 1\right) = 2^{k+1} - 1 > 0.$$

11.5. Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2023 (katrs tieši vienu reizi). Vienā gājienā Ilmārs var izvēlēties jebkurus divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus, nodzēst tos, un vietā uzrakstīt to vidējo aritmētisko. Pēc 2022 gājieniem uz tāfeles būs palicis tieši viens skaitlis. Kādas ir iespējamās naturālās šī skaitļa vērtības?

Atrisinājums. Uz tāfeles var būt palicis jebkurš naturālais skaitlis no 2 līdz 2022. Tā kā vidējais aritmētiskais no diviem dažādiem skaitļiem ir mazāks nekā lielākais skaitlis un lielāks nekā mazākais skaitlis, tad varam secināt, ka pēdējais uzrakstītais skaitlis nevar būt 1 vai 2023 (vai lielāks).
Aprakstīsim algoritmu, kā pakāpeniski iegūt jebkuru naturālo skaitli $4 \leq n \leq 2020$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka skaitļi uzrakstīti augošā secībā.
Parādīsim, ka var panākt, ka skaitlim n blakus ir uzrakstīti skaitļi $n-2$ un $n+2$ (citu skaitļu uz tāfeles vairs nav). Vispirms parādīsim, kā panākt, ka uz tāfeles no skaitļa n pa kreisi paliek tikai skaitlis $n-2$. Pirmajā solī skaitļi 1 un 3 tiek aizstāti ar 2, katrā nākamajā solī no kreisās puses divi mazākie skaitļi tiek aizstāti ar to aritmētisko vidējo:

$$\mathbf{1};\ 2;\ \mathbf{3};\ 4;\ 5;\ \ldots;n-1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{2};\ \mathbf{2};\ 4;\ 5;\ldots;n-1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{2};\ \mathbf{4};\ 5;\ 6;\ \ldots;n-1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{3};\ \mathbf{5};\ 6;\ \ldots;\ n-1 \quad \rightarrow \cdots \rightarrow \quad \boldsymbol{n-3};\ \boldsymbol{n-1} \quad \rightarrow \quad n-2.$$

Līdzīgi var iegūt, ka uz tāfeles no skaitļa n pa labi var palikt tikai skaitlis $n+2$:

$$n+1;\ n+2;\ldots;2019;2020;\ \mathbf{2021};\ 2022;\mathbf{2023} \quad \rightarrow \quad n+1;\ n+2;\ \ldots;\ 2019;\ 2020;\ \mathbf{2022};\ \mathbf{2022} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad n+1;\ n+2;\ \ldots;\ 2019;\ \mathbf{2020};\ \mathbf{2022} \quad \rightarrow \quad n+1;\ n+2;\ \ldots;\ \mathbf{2019};\ \mathbf{2021} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \quad \boldsymbol{n+1};\ \boldsymbol{n+3} \quad \rightarrow \quad n+2.$$

Līdz ar to uz tāfeles ir uzrakstīti trīs skaitļi $n-2;\ n;\ n+2$. Lai uz tāfeles paliktu skaitlis n, rīkojamies šādi:

$$\boldsymbol{n-2};\ n;\ \boldsymbol{n+2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n} \quad \rightarrow \quad n,$$

kur $4 \leq n \leq 2020$.
Parādīsim, kā iegūt skaitļus 2; 3; 2021 un 2022:

- Pēc iepriekš aprakstītā var panākt, ka skaitlim 2 pa labi ir palicis tikai skaitlis 4, līdz ar to uz tāfeles ir palikuši tikai trīs skaitļi 1; 2; 4, no kuriem skaitli 2 var iegūt šādi: $1;\ \mathbf{2};\ \mathbf{4}\ \rightarrow\ \mathbf{1};\ \mathbf{3} \rightarrow 2$.
- Skaitlim 2022 pa kreisi var iegūt tikai skaitli 2020, līdz ar to uz tāfeles ir palikuši tikai trīs skaitļi 2020; 2022; 2023, no kuriem skaitli 2022 var iegūt šādi: $\mathbf{2020};\ \mathbf{2022};\ 2023\ \rightarrow\ \mathbf{2021};\ \mathbf{2023} \rightarrow 2022$.
- Skaitlim 6 pa labi var iegūt tikai skaitli 8, līdz ar to uz tāfeles ir palikuši tikai septiņi skaitļi $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8$, no kuriem skaitli 3 var iegūt šādi:

$$1;\ \mathbf{2};\ 3;\ 4;\ 5;\ \mathbf{6};\ 8 \rightarrow 1;\ 3;\ \mathbf{4};\ 4;\ 5;\ \mathbf{8} \rightarrow 1;\ 3;\ \mathbf{4};\ 5;\ \mathbf{6} \rightarrow 1;\ 3;\ \mathbf{5};\ \mathbf{5} \rightarrow \mathbf{1};\ 3;\ \mathbf{5} \rightarrow \mathbf{3};\ \mathbf{3} \rightarrow 3.$$

- Skaitlim 2018 pa kreisi var iegūt tikai skaitli 2016, līdz ar to uz tāfeles ir palikuši tikai septiņi skaitļi $2016;\ 2018;\ 2019;\ 2020;\ 2021;\ 2022;2023$, no kuriem skaitli 2021 var iegūt šādi:

$$\mathbf{2016};\ 2018;\ 2019;\ \mathbf{2020};\ 2021;\ 2022;2023\ \rightarrow 2018;\mathbf{2018};2019;2021;\mathbf{2022};2023\ \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{2018};2019;\mathbf{2020};2021;2023\ \rightarrow \mathbf{2019};\mathbf{2019};2021;2023\ \rightarrow\ \mathbf{2019};2021;\mathbf{2023}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{2021};\mathbf{2021}\ \rightarrow \mathbf{2021}.$$

12. klase

12.1. Doti tādi reāli skaitļi x un y, ka $x+y=1$ un $x^3+y^3=4$. Pierādīt, ka izteiksmes $x^{13}+y^{13}$ vērtība ir naturāls skaitlis, un atrast šo vērtību!
Atrisinājums. Izmantojot kubu summas formulu, iegūstam, ka $(x+y)(x^2-xy+y^2)=4$. Tā kā $x+y=1$, tad $x^2-xy+y^2=4$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam, ka $(x+y)^2-3xy=4$, tātad $xy=-1$. Tālāk pakāpeniski iegūstam prasīto:

$$(x+y)^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+2xy+y^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=1-2xy=3;$$

$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)=3\cdot 4-1\cdot 1=11;$$

$$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3=4^2+2=18;$$

$$x^7+y^7=(x^6+y^6)(x+y)-xy(x^5+y^5)=18\cdot 1+1\cdot 11=29;$$

$$x^{13}+y^{13}=(x^7+y^7)(x^6+y^6)-(xy)^6(x+y)=29\cdot 18-1\cdot 1=522-1=521.$$

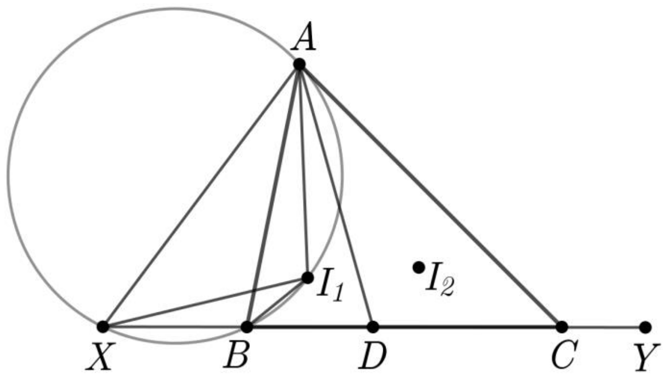
12.2. Uz trijstūra ABC malas BC izvēlēts patvaļīgs punkts D. Punkti I_1 un I_2 ir attiecīgi trijstūros ABD un ACD ievilkto riņķa līniju centri. Trijstūrim AI_1B apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC punktā X, kas nesakrīt ar B, bet trijstūrim AI_2C apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC punktā Y, kas nesakrīt ar C. Pierādīt, ka $DX = DY$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $\sphericalangle DXA = \sphericalangle XAD$ (skat. 4. att.). Tā kā apvilktā četrstūra AI_1BX pretējo leņķu summa ir $180°$, tad $\sphericalangle DXA = 180° - \sphericalangle AI_1B$. Izmantojot trijstūra BAI_1 iekšējo leņķu summu, var izteikt $180° - \sphericalangle AI_1B = \sphericalangle I_1AB + \sphericalangle I_1BA$, tātad $\sphericalangle DXA = \sphericalangle I_1AB + \sphericalangle I_1BA$.

Aplūkojot otrus divus pretējos leņķus apvilktajā četrstūrī AI_1BX, iegūstam, ka $\sphericalangle I_1AX = 180° - \sphericalangle I_1BX$. Izmantojot blakusleņķu īpašību, varam izteikt $180° - \sphericalangle I_1BX = \sphericalangle I_1BD$, tātad $\sphericalangle I_1AX = \sphericalangle I_1BD$. Ievērojam, ka $\sphericalangle DAX = \sphericalangle DAI_1 + \sphericalangle I_1AX = \sphericalangle DAI_1 + \sphericalangle I_1BD$.

Tā kā trijstūra ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā, tad $\sphericalangle DAI_1 = \sphericalangle I_1AB$ un $\sphericalangle I_1BA = \sphericalangle I_1BD$. Tādā gadījumā $\sphericalangle DXA = \sphericalangle I_1AB + \sphericalangle I_1BA = \sphericalangle DAI_1 + \sphericalangle I_1BD = \sphericalangle DAX$, tātad $DX = DA$.

Līdzīgi, aplūkojot ap četrstūri AI_2CY apvilkto riņķa līniju un ar to saistītos leņķus, pierāda, ka $DY = DA$. Tātad $DX = DA = DY$, kas bija jāpierāda.



4. att.

12.3. Uz tāfeles uzrakstīti 100 reāli pozitīvi skaitļi (ne obligāti dažādi). Ja uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi x un y (ne obligāti dažādi), tad uz tās ir uzrakstīts arī skaitlis $\frac{2xy}{x+y}$. Kāda var būt visu 100 uzrakstīto skaitļu summa, ja zināms, ka viens no uzrakstītajiem skaitļiem ir 73?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka visi 100 uzrakstītie skaitļi ir vienādi.

Pieņemsim pretējo, ka uz tāfeles ir atrodami vismaz divi dažādi skaitļi. Sakārtosim visus skaitļus nedilstošā secībā un ņemsim divus ar mazākajām vērtībām $a < b$ (a ir vismazākais skaitlis un b ir otrs mazākais skaitlis). Pēc uzdevuma nosacījuma uz tāfeles ir rakstīts arī skaitlis $\frac{2ab}{a+b}$. Parādīsim, ka $a < \frac{2ab}{a+b} < b$, kas būs pretruna ar to, ka a un b ir divi mazākie skaitļi.

Lai pamatotu, ka $a < \frac{2ab}{a+b}$, reizinām abas nevienādības puses ar $a + b > 0$ un iegūstam, ka $a^2 + ab < 2ab$ jeb $a^2 < ab$, kas ir patiesa nevienādība, jo $a < b$.

Līdzīgi, lai pamatotu, ka $\frac{2ab}{a+b} < b$, reizinām abas nevienādības puses ar $a + b > 0$ un iegūstam nevienādību $2ab < ab + b^2$, kas ir ekvivalenta patiesai nevienādībai $ab < b^2$, jo $a < b$.

Tātad visi uzrakstītie skaitļi ir vienādi un to summa ir $73 \cdot 100 = 7300$.

Piezīme. Skaitlis $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ir skaitļu a un b vidējais harmoniskais.

12.4. Pierādīt, ka nevar atrast tādus pirmskaitļus p un q, kuriem $p^{q-1} + q^{p-1} + 1$ ir vesela skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka p un q abi ir nepāra skaitļi. Tādā gadījumā $p - 1$ un $q - 1$ abi ir pāra skaitļi. Tā kā nepāra skaitļa kvadrāts dod atlikumu 1, dalot ar 4, tad

$$p^{q-1} + q^{p-1} + 1 = \left(p^{\frac{q-1}{2}}\right)^2 + \left(q^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod 4.$$

Taču neeksistē tāds vesela skaitļa kvadrāts, kurš dod atlikumu 3, dalot ar 4. Līdz ar to varam secināt, ka vismaz viens no skaitļiem p vai q ir vienāds ar 2.

Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $p = 2$. Tādā gadījumā $2^{q-1} + q + 1$ ir jābūt vesela skaitļa kvadrātam. Ja $q = 2$, tad izteiksmes vērtība ir 5, kas nav vesela skaitļa kvadrāts. Līdz ar to varam pieņemt, ka q ir nepāra skaitlis. Pierādīsim, ka

$$\left(2^{\frac{q-1}{2}}\right)^2 < 2^{q-1} + q + 1 < \left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)^2.$$

Tā kā $\left(2^{\frac{q-1}{2}}\right)^2 = 2^{q-1} < 2^{q-1} + q + 1$ ir patiesa nevienādība, tad atliek pierādīt, ka

$$\left(2^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)^2 > 2^{q-1} + q + 1$$

$$2^{q-1} + 2 \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} + 1 > 2^{q-1} + q + 1$$

$$2^{\frac{q+1}{2}} > q$$

Tā kā pie $q = 3$ nevienādība ir ekvivalenta ar $2^2 = 4 > 3$ un tā kā eksponentfunkcija aug ātrāk nekā lineāra funkcija, tad varam secināt, ka pēdējā nevienādība ir patiesa. Tas nozīmē, ka skaitlis $2^{q-1} + q + 1$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tāpēc tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

12.5. Kādā valstī ir 100 pilsētas, dažas no tām ir savienotas ar ceļiem. Katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas un ārpus pilsētām ceļi nekrustojas (izmantoti viadukti). Kāds ir pats mazākais kopējais ceļu skaits, pie kura noteikti (neatkarīgi no ceļu izvietojuma) var apgalvot, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu (varbūt arī caur vienu vai vairākām citām pilsētām)?

Atrisinājums. Pats mazākais ceļu skaits ir $\frac{100\cdot 99}{2} - (100-2) = 4852$. Atrisināsim uzdevumu vispārīgajā gadījumā ar n pilsētām un pamatosim, ka mazākais iespējamais ceļu skaits ir $\frac{n(n-1)}{2} - (n-2)$, lai no jebkuras pilsētas noteikti varētu aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

Vispirms pamatosim, ka ar mazāku ceļu skaitu nepietiek. Atliek parādīt vienu piemēru, kā pilsētām jābūt savienotām ar ceļiem, lai uz vienu no pilsētām nevar nokļūt. Aplūkosim gadījumu, kad kopējais ceļu skaits ir par vienu mazāks, tas ir, $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$, un ka ir kāda pilsēta, uz kuru neiet neviens ceļš, bet katras divas atlikušās pilsētas ir savā starpā savienotas ar ceļu. Tādā gadījumā tam vajag tieši $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$ ceļus. Tātad meklētais piemērs ir atrasts un ceļu skaits nevar būt mazāks par $\frac{n(n-1)}{2} - (n-2)$.

Pamatosim, ka ar $\frac{n(n-1)}{2} - (n-2)$ ceļiem pietiek, lai no jebkuras pilsētas noteikti varētu aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu. Uzbūvēsim no sākuma lielāko iespējamo ceļu skaitu starp n pilsētām, tas ir, $\frac{n(n-1)}{2}$. Pēc tam nojauksim $(n-2)$ ceļus. Pamatosim, ka arī pēc to nojaukšanas izpildās uzdevuma nosacījumi. Aplūkosim divas patvaļīgas pilsētas, apzīmēsim tās ar A un B, pārējās $(n-2)$ pilsētas apzīmēsim attiecīgi ar $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$. Aplūkosim $(n-1)$ maršrutu, kā no pilsētas A var nokļūt pilsētā B: maršrutu $A \leftrightarrow B$ un $(n-2)$ maršrutus $A \leftrightarrow X_i \leftrightarrow B$. Ievērojam, ka viena ceļa nojaukšana sabojā ne vairāk kā vienu no šiem maršrutiem, tāpēc pēc $(n-2)$ ceļu nojaukšanas vismaz viens no šiem maršrutiem, pa kuru nokļūt no pilsētas A uz B, vēl paliks. Tātad ar $\frac{n(n-1)}{2} - (n-2)$ ceļiem pietiek, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.