# Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

**9.1.** Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem $x$ un $y$ ir spēkā nevienādība $x^2+5y^2+4xy-6y+9\geq 0$.
**Atrisinājums.** Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-6y+9)\geq 0;$$
$$(x+2y)^2+(y-3)^2\geq 0.$$

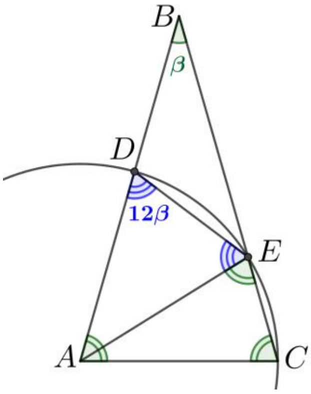
Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem $x$ un $y$.

**9.2.** Vienādsānu trijstūrī $ABC$ virsotnes leņķis $\sphericalangle ABC=\beta$. Ar centru punktā $A$ un rādiusu $AC$ novilkta riņķa līnija, kas krusto malas $AB$ un $BC$ attiecīgi punktos $D$ un $E$. Zināms, ka $\sphericalangle ADE=12\beta$. Aprēķināt $\beta$ lielumu!
**Atrisinājums.** Tā kā $\Delta ABC$ ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BCA=\frac{1}{2}(180°-\sphericalangle ABC)=\frac{1}{2}(180°-\beta)$. Ievērojam, ka $AD=AE=AC$ kā rādiusi (skat. 1. att.), tātad $\Delta DAE$ un $\Delta CAE$ ir vienādsānu trijstūri. Izsakām leņķus:

- $\sphericalangle CAE=180°-2\sphericalangle BCA=180°-2\cdot\frac{1}{2}(180°-\beta)=\beta$ (no $\Delta CAE$);
- $\sphericalangle DAE=\sphericalangle BAC-\sphericalangle CAE=\frac{1}{2}(180°-\beta)-\beta=90°-\frac{3\beta}{2}$;
- $\sphericalangle DAE=180°-2\sphericalangle ADE=180°-2\cdot 12\beta=180°-24\beta$ (no $\Delta DAE$).

Līdz ar to iegūstam vienādojumu:

$$90°-\frac{3\beta}{2}=180°-24\beta;\quad 180°-3\beta=360°-48\beta;\quad 45\beta=180°;\quad \beta=4°.$$

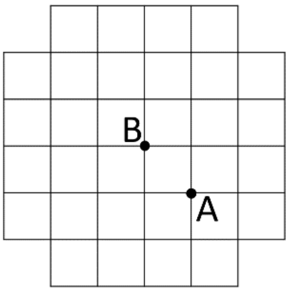



*1. att.*

**9.3.** Pierādīt, ka katram naturālam $K>1$ var atrast tādu naturālu skaitli, kas dalās ar 7 un kura ciparu summa ir $K$.
**Atrisinājums.** Apskatām divus gadījumus.

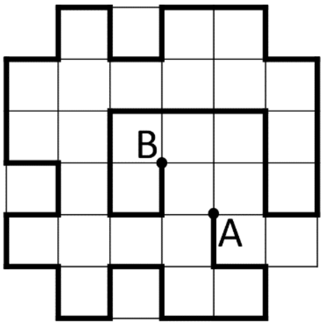
- Ja $K$ ir pāra skaitlis, tas ir, $K=2n$, kur $n\in\mathbb{N}$. Ievērosim, ka 1001 dalās ar 7 (jo $7\cdot 143=1001$) un tā ciparu summa ir 2. Uzrakstot skaitli 1001 rindā aiz sevis $n$ reizes (100110011001...), iegūsim $(4n)$-ciparu skaitli, kura ciparu summa ir $2n$ un kurš dalās ar 7.
- Ja $K$ ir nepāra skaitlis, tas ir, $K=2n+1$, kur $n\in\mathbb{N}$. Papildus ievērosim, ka skaitlis 21 dalās ar 7 un tā ciparu summa ir 3. Aiz skaitļa 21 uzrakstot $(n-1)$ reizi skaitli 1001 (2110011001...), iegūsim $(4n-2)$-ciparu skaitli, kura ciparu summa ir $3+(n-1)\cdot 2=2n+1$ un kurš dalās ar 7.

**9.4.** Ziņkārīgs tūrists vēlas pastaigāties pa pilsētas ielām (plānā attēlotas kā rūtiņu malas) no krustojuma A līdz krustojumam B (skat. 2. att.), veicot pēc iespējas garāku ceļojumu un neatgriežoties nevienā krustojumā vairākas reizes. Kāds ir lielākais iespējamais ceļojuma garums, ja uzskatām, ka vienas rūtiņas mala ir vienu vienību gara?

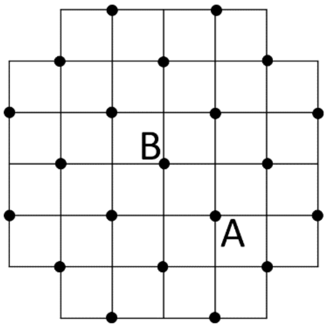



*2. att.*

**Atrisinājums.** Lielākais iespējamais ceļojuma garums ir 40, to var veikt, piemēram, kā parādīts 3. att.
Pierādīsim, ka lielāks ceļojuma garums nav iespējams. Atzīmēsim katru otro krustojumu ar melnu aplīti (skat. 4. att.). Ievērosim, ka ik pēc diviem veiktiem posmiem ceļotājs nonāk atzīmētajā krustpunktā. Tā kā sākumpunkts A ir atzīmēts un atzīmētu krustpunktu kopā ir 21, tad apmeklēšanai atliek vairs tikai 20 atzīmētu krustpunktu (ieskaitot B). Tātad ceļojums beigsies punktā B pēc ne vairāk kā $2 \cdot 20 = 40$ posmiem.




*3. att.*




*4. att.*

**9.5.** Pierādīt, ka trijstūra augstumi nevar būt 19, 37 un 41 vienību gari!
**Atrisinājums.** Pieņemsim, ka šāds trijstūris eksistē un ka tā laukums ir $S$. Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$, izsakām trijstūra malas garumu $a = \frac{2S}{h_a}$. Tad trijstūra malu garumi ir $\frac{2S}{19}$, $\frac{2S}{37}$ un $\frac{2S}{41}$. Bet šiem malu garumiem neizpildās trijstūra nevienādība, jo $\frac{2S}{37} + \frac{2S}{41} < \frac{2S}{19}$. Šī nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $\frac{1}{37} + \frac{1}{41} < \frac{1}{19}$, kuras patiesumu var viegli pārbaudīt, piemēram, ar šādiem ekvivalentiem pārveidojumiem:

$$\frac{1}{37} + \frac{1}{41} < \frac{2}{38}; \qquad \frac{1}{37} - \frac{1}{38} < \frac{1}{38} - \frac{1}{41}; \qquad \frac{1}{37 \cdot 38} < \frac{3}{38 \cdot 41}; \qquad \frac{1}{37} < \frac{3}{41}; \qquad 41 < 3 \cdot 37.$$

---

**10.1.** Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = x + 2 \end{cases}$$

**Atrisinājums.** Atņemot no pirmā vienādojuma otro un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$x^2 - y^2 = y - x;$$
$$(x - y)(x + y) + (x - y) = 0;$$
$$(x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Tātad $x - y = 0$ vai $x + y + 1 = 0$.

- Apskatām gadījumu, kad $x - y = 0$. Izsakām $y = x$ un ievietojam to dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā. Iegūstam kvadrātvienādojumu $x^2 - x - 2 = 0$, kuram ir divas saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 2$. Tad attiecīgi arī $y_1 = -1$ un $y_2 = 2$. Pārbaudot redzam, ka skaitļu pāri $(-1; -1)$ un $(2; 2)$ der.
- Apskatām gadījumu, kad $x + y + 1 = 0$. Izsakām $y = -1 - x$ un ievietojam to dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā. Iegūstam $x^2 + x - 1 = 0$, kuram ir divas saknes $x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ un

$x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Tad attiecīgi $y_3 = -1 - x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ un $y_4 = -1 - x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Pārbaudot redzam, ka $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ un $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ apmierina doto vienādojumu sistēmu.

Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir 4 atrisinājumi:

$$(-1;\ -1);\quad (2;2);\quad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right);\quad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

**10.2.** Uz regulāra trijstūra $ABC$ malas $AB$ kā uz diametra konstruēta pusriņķa līnija ārpus trijstūra. Punkti $D$ un $E$ atrodas uz šīs pusriņķa līnijas un dala to trīs vienādos lokos. Pierādīt, ka nogriežņi $CD$ un $CE$ sadala malu $AB$ trīs vienāda garuma nogriežņos!

**Atrisinājums.** Nogriežņu $CD$ un $CE$ krustpunktus ar $AB$ apzīmējam attiecīgi ar $M$ un $N$ (skat. 5. att.) un apzīmējam $AB = AC = CB = a$. No simetrijas izriet, ka $AM = NB$, tātad prasītais būs pierādīts, ja pierādīsim, ka $AM = \frac{a}{3}$.

Novelkam $CO \perp AB$ un $DK \perp AB$. Tā kā loki $AD, DE$ un $EB$ ir vienādi, tad katrs no tiem ir 60° un $\sphericalangle BAD = 60°$ kā ievilktais leņķis, kas balstās uz loku $DB$.

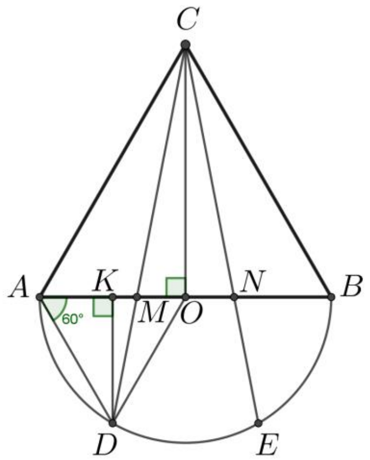
Ievērojam, ka $O$ ir gan regulārā trijstūra $ABC$ augstuma pamats, gan pusriņķa līnijas centrs. Iegūstam, ka $AO = OB = OD = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. Ievērojam, ka trijstūris $AOD$ ir regulārs, jo tas ir vienādsānu trijstūris, kam leņķis pie pamata ir 60°. Tā kā punkts $K$ ir šī regulārā trijstūra augstuma pamats, tad $AK = KO = \frac{AO}{2} = \frac{a}{4}$.

Regulārie trijstūri $ABC$ un $AOD$ ir līdzīgi ar līdzības koeficientu $\frac{AB}{AO} = 2$. Tas nozīmē, ka $\frac{CO}{KD} = 2$.

Trijstūri $MOC$ un $MKD$ ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$ (vienādi taisnie leņķi un krustleņķi). Tā kā līdzīgos trijstūros atbilstošās malas ir proporcionālas un $\frac{CO}{KD} = 2$, tad arī $\frac{OM}{MK} = 2$ jeb $OM = 2MK$.

Ievērojam, ka $KO = OM + MK = 3MK = \frac{a}{4}$, no kurienes $MK = \frac{a}{12}$.

Tātad $AM = AK + MK = \frac{a}{4} + \frac{a}{12} = \frac{a}{3}$.




5. att.

**10.3.** Pierādīt, ka katram naturālam $K > 1$ var atrast tādu naturālu skaitli, kas dalās ar 13 un kura ciparu summa ir $K$.

**Atrisinājums.** Apskatām divus gadījumus.

- Ja $K$ ir pāra skaitlis, tas ir, $K = 2n$, kur $n \in \mathbb{N}$. Ievērojam, ka 1001 dalās ar 13 (jo $1001 = 13 \cdot 77$) un tā ciparu summa ir 2. Uzrakstot skaitli 1001 rindā aiz sevis $n$ reizes (100110011001...), iegūsim $(4n)$-ciparu skaitli, kura ciparu summa ir $2n$ un kurš dalās ar 13.
- Ja $K$ ir nepāra skaitlis, tas ir, $K = 2n + 1$, kur $n \in \mathbb{N}$. Papildus ievērosim, ka skaitlis 10101 dalās ar 13 (jo $10101 = 13 \cdot 777$) un tā ciparu summa ir 3. Aiz skaitļa 10101 uzrakstot $(n-1)$ reizi skaitli 1001 (1010110011001...), iegūsim $(4n+1)$-ciparu skaitli, kura ciparu summa ir $3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$ un kurš dalās ar 7.

**10.4.** Vienādojuma $x^3-40x^2+511x-2040=0$ saknes ir trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

**1. atrisinājums.** Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar $a, b, c$ un vienādojumu pārrakstām formā:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0. \tag{1}$$

Atverot iekavas, iegūstam

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0. \tag{2}$$

Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka

$$a+b+c=40;$$
$$ab+ac+bc=511;$$
$$abc=2040.$$

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur $a$, $b$ un $c$ – trijstūra malu garumi, bet $p$ – pusperimetrs. Tā kā $a, b, c$ ir trijstūra malu garumi un $a+b+c=40$, tad pusperimetrs $p=20$.

Analoģiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka

$$(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc$$

Tātad trijstūra laukums ir

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{p(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc)}=\\&=\sqrt{20\cdot(20^3-40\cdot20^2+511\cdot20-2040)}=\\&=20\sqrt{20^2-2\cdot20^2+511-102}=\\&20\sqrt{409-400}=60\ (\mathrm{cm}^2).\end{aligned}$$

**2. atrisinājums.** Atradīsim trijstūra malu garumus. Ja tie ir naturāli skaitļi, tad tiem jābūt brīvā locekļa 2040 dalītājiem. Ievērojot, ka $2040=2^3\cdot3\cdot5\cdot17$, var uzminēt sakni, piemēram, $x=17$.

Sagrupējot vienādojuma locekļus, iegūstam arī pārējās saknes:

$$\begin{aligned}x^3-40x^2+511x-2040&=x^3-17x^2-23x^2+391x+120x-2040=\\&=x^2(x-17)-23x(x-17)+120(x-17)=(x-17)(x^2-23x+120)=\\&=(x-17)(x-15)(x-8).\end{aligned}$$

Tātad dotā vienādojuma saknes un attiecīgi arī trijstūra malu garumi ir 8, 15, 17. Tā kā $8^2+15^2=17^2$, tad dotais trijstūris ir taisnleņķa trijstūris un tā laukums ir $\frac{1}{2}\cdot8\cdot15=60\ (\mathrm{cm}^2)$.

**10.5.** Holivudas diētā katrās septiņās secīgās dienās kopā jāapēd tieši trīs sieriņi "Kārums", bet Bolivudas diētā – katrās vienpadsmit secīgās dienās kopā jāapēd tieši pieci sieriņi "Kārums". Kādu lielāko secīgu dienu skaitu var ievērot abas diētas vienlaicīgi?

*Piezīme.* Katru dienu var ēst veselu nenegatīvu skaitu sieriņu.

**Atrisinājums.** Abas diētas vienlaicīgi var ievērot lielākais 15 dienas pēc kārtas. Lai to izdarītu viens sieriņš "Kārums" jāēd 1., 4., 5., 8., 11., 12., 15. dienā. Viegli pārbaudīt, ka abu diētu nosacījumi izpildās.

| Diena | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sieriņš | K | | | K | K | | | K | | | K | K | | | K |

Pierādīsim, ka 16 (vai vairāk) dienas abas diētas vienlaicīgi ievērot nevar. Pieņemsim pretējo, ka to var izdarīt, un apzīmēsim $i$-ajā dienā apēsto sieriņu skaitu ar $a_i$. No Holivudas diētas nosacījuma izriet, ka $a_i=a_{i+7}$ visiem $1\le i\le 9$, bet no Bolivudas diētas nosacījuma izriet, ka $a_i=a_{i+11}$ visiem $1\le i\le 5$. Apvienojot šos nosacījumus, iegūstam divas vienādību virknes (pirmās vienādības locekļus apzīmējam ar $x$, bet otrās – ar $y$):

$$a_6=a_{13}=a_2=a_9=a_{16}=a_5=a_{12}=a_1=a_8=a_{15}=a_4=a_{11}=x;$$
$$a_7=a_{14}=a_3=a_{10}=y.$$

Pirmajās septiņās dienās apēsto sieriņu skaits ir $a_1+a_2+\cdots+a_7=5x+2y$, bet pirmajās 11 dienās apēsto sieriņu skaits ir $a_1+a_2+\cdots+a_{11}=8x+3y$. No diētu nosacījumiem iegūstam vienādojumu sistēmu: $\begin{cases}5x+2y=3\\8x+3y=5\end{cases}$, kuru atrisinot, iegūstam, ka $x=1$ un $y=-1$, kas nav iespējams (apēsto sieriņu skaits nevar būt negatīvs).

**11.1.** Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kuram vienlaikus izpildās šādas trīs īpašības:

- to reizinot ar 2, iegūst naturāla skaitļa kvadrātu;
- to reizinot ar 3, iegūst naturāla skaitļa kubu;
- to reizinot ar 5, iegūst naturāla skaitļa piekto pakāpi?

**Atrisinājums.** Jā, piemēram, der skaitlis $2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$, jo

$$2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \cdot 2 = (2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12})^2,$$
$$2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \cdot 3 = (2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8)^3,$$
$$2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \cdot 5 = (2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5)^5.$$

**11.2.** Četrstūra $ABCD$ malu $AB$ un $CD$ viduspunkti ir attiecīgi $M$ un $N$. Nogriežņu $AD$, $BC$ un $MN$ vidusperpendikuli krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka $AB = CD$.

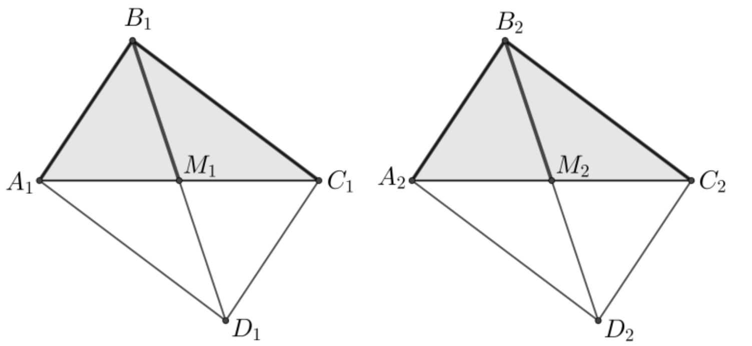
**Atrisinājums.** Vispirms pierādīsim lemmu: ja diviem trijstūriem ir vienādas divas malas un mediānas pret trešo malu, tad šie trijstūri ir vienādi.

*Pierādījums*. Pieņemsim, ka ir doti divi trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$, kuros novilktas mediānas $B_1M_1$ un $B_2M_2$ un kuros $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ un $B_1M_1 = B_2M_2$. Papildinām trijstūri $A_1B_1C_1$ līdz paralelogramam: uz taisnes $B_1M_1$ atliekam punktu $D_1$ tā, ka $B_1D_1 = 2B_1M_1$ (skat. 6. att.). Tā kā četrstūra $A_1B_1C_1D_1$ diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad šis četrstūris ir paralelograms. Analogi izdarām arī ar trijstūri $A_2B_2C_2$.

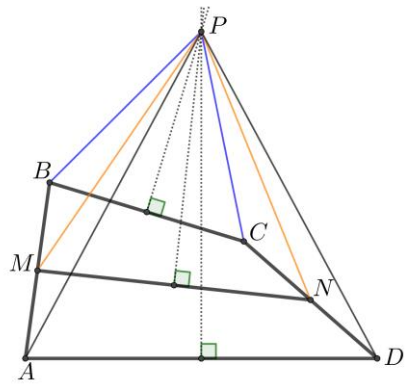
Trijstūri $A_1B_1D_1$ un $A_2B_2D_2$ ir vienādi pēc pazīmes $mmm$, jo $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1D_1 = B_1C_1 = B_2C_2 = A_2D_2$ un $B_1D_1 = 2B_1M_1 = 2B_2M_2 = B_2D_2$. Tātad $\sphericalangle A_1B_1M_1 = \sphericalangle A_2B_2M_2$ (vienādos trijstūros attiecīgie leņķi ir vienādi). Analogi no trijstūru $B_1C_1D_1$ un $B_2C_2D_2$ vienādības izriet, ka $\sphericalangle M_1B_1C_1 = \sphericalangle M_2B_2C_2$.

Tātad $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1M_1 + \sphericalangle M_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2M_2 + \sphericalangle M_2B_2C_2 = \sphericalangle A_2B_2C_2$, no kā izriet, ka trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$. Lemma pierādīta.

Tagad dotajā uzdevumā vidusperpendikulu krustpunktu apzīmēsim ar $P$ (skat. 7. att.). Trijstūri $PBA$ un $PCD$ ir vienādi pēc iepriekš pierādītās lemmas, jo no vidusperpendikulu īpašībām vienādas ir to divas malas $PB = PC$ un $PA = PD$, un vienādas ir to mediānas $PM = PN$. Tā kā vienādos trijstūros atbilstošie elementi ir vienādi, tad $AB = CD$.



*6. att.*



*7. att.*

**11.3.** Sākumā uz papīra lapas uzrakstīts skaitlis 16. Ja uz lapas ir

- uzrakstīts skaitlis $x$, tad uz tās atļauts uzrakstīt arī skaitli $x^2$;
- uzrakstīti skaitļi $x$ un $y$, tad uz tās atļauts uzrakstīt arī skaitli $|x - y| + 1$.

Vai var panākt, lai uz lapas būtu uzrakstīts skaitlis 2022 (neviens uzrakstītais skaitlis netiek nodzēsts)?

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka nevar panākt, lai uz lapas būtu uzrakstīts skaitlis 2022.

Sākumā uzrakstītais skaitlis 16, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

- Ja skaitlis $x$ dod atlikumu 1, dalot ar 3, tad arī skaitlis $x^2$, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo $1^2 \equiv 1 \pmod 3$.
- Ja skaitļi $x$ un $y$, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad arī skaitlis $|x - y| + 1$ dod atlikumu 1, dalot ar 3, jo $1 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod 3$.

Tas nozīmē, ka uz lapas var iegūt tikai tādus skaitļus, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tā kā 2022 dalās ar 3 (bez atlikuma), tad aprakstītajā veidā šo skaitli uz lapas iegūt nevar.

*Piezīme.* Uzdevumu var risināt arī pēc moduļa 5 vai pēc moduļa 15.

**11.4.** Vienādojuma $x^3 - 54x^2 + 865x - 3480 = 0$ saknes ir trijstūra malu garumi, izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

**1. atrisinājums.** Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar $a, b, c$ un vienādojumu pārrakstām formā:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0. \qquad (1)$$

Atverot iekavas, iegūstam

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0. \qquad (2)$$

Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka

$$a+b+c = 54;$$
$$ab+ac+bc = 865;$$
$$abc = 3480.$$

Pēc Hērona formulas trijstūra laukums $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur $a$, $b$ un $c$ – trijstūra malu garumi, bet $p$ – pusperimetrs. Tā kā $a, b, c$ ir trijstūra malu garumi un $a+b+c = 54$, tad pusperimetrs $p = 27$.

Analoģiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka

$$(p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+ac+bc)p - abc$$

Tātad trijstūra laukums ir

$$S = \sqrt{p(p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+ac+bc)p - abc)} =$$
$$= \sqrt{27 \cdot (27^3 - 54 \cdot 27^2 + 865 \cdot 27 - 3480)} =$$
$$= \sqrt{27 \cdot 3 \cdot (9 \cdot 27^2 - 18 \cdot 27^2 + 865 \cdot 9 - 1160)}$$
$$= 9\sqrt{-9 \cdot 27^2 + 7785 - 1160} = 9\sqrt{64} = 72 \ (\mathrm{cm}^2).$$

**2. atrisinājums.** Atradīsim trijstūra malu garumus. Ja kāds no tiem ir racionāls skaitlis, tad tas ir skaitļa 3480 dalītājs. Ievērojot, ka $3480 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$, uzminam vienu sakni $x = 24$.

Sagrupējot vienādojuma locekļus, iegūstam:

$$x^3 - 54x^2 + 865x - 3480 = x^3 - 24x^2 - 30x^2 + 720x + 145x - 3480 =$$
$$= x^2(x-24) - 30x(x-24) + 145(x-24) = (x-24)(x^2 - 30x + 145).$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu $x^2 - 30x + 145 = 0$, iegūstam, ka tā saknes ir $15 - \sqrt{80}$ un $15 + \sqrt{80}$. Tātad trijstūra malu garumi ir 24, $15 + \sqrt{80}$ un $15 - \sqrt{80}$. Lai aprēķinātu trijstūra laukumu, izmantosim Hērona formulu. Trijstūra pusperimetrs ir $\frac{1}{2}\left(24 + 15 + \sqrt{80} + 15 - \sqrt{80}\right) = 27$ un tātad tā laukums ir

$$S = \sqrt{27(27-24)\left(27 - 15 - \sqrt{80}\right)\left(27 - 15 + \sqrt{80}\right)} =$$
$$= \sqrt{27 \cdot 3 \cdot \left(12 - \sqrt{80}\right)\left(12 + \sqrt{80}\right)} = \sqrt{27 \cdot 3 \cdot 64} = 72 \ (\mathrm{cm}^2).$$

**11.5.** Naturālu skaitli $N$ sauksim par *amizantu*, ja katru $N$ secīgu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar $N^2$. Kuri skaitļi nav amizanti?

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka amizanti nav visi pirmskaitļi, kā arī skaitlis 4.

Ja $p$ ir pirmskaitlis, tad pirmo $p$ skaitļu reizinājums $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p$ nedalās ar $p^2$, jo neviens no pirmajiem $p-1$ skaitļiem nedalās ar $p$.

Pirmo 4 skaitļu reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ nedalās ar $4^2$, tātad skaitlis 4 nav amizants.

Pierādīsim, ka visi pārējie skaitļi ir amizanti. Ja $N$ ir salikts skaitlis, kas ir lielāks nekā 4, tad to var izteikt kā reizinājumu $N = a \cdot b$, kur $a \geq 2$ un $b \geq 3$. Tātad $N \geq 2b$ un $N \geq 3a$. No $N$ pēc kārtas sekojošiem skaitļiem viens noteikti dalās ar $N$. Tā kā $2b \leq N$, tad vēl vismaz viens cits no šiem $N$ pēc kārtas sekojošiem skaitļiem dalās ar $b$. Tā kā $3a \leq N$, tad vēl vismaz divi citi no šiem $N$ pēc kārtas sekojošiem skaitļiem dalās ar $a$ (tas nozīmē, ka kāds no šiem diviem skaitļiem, kas dalās ar $a$, noteikti nesakrīt ar to skaitli, kas dalās ar $b$). Tātad $N$ pēc kārtas sekojošu skaitļu reizinājums dalās ar $N \cdot b \cdot a = N^2$.

---

**12.1.** Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $x^2 - \cos x + 1 = 0$.

**Atrisinājums.** Der vērtība $x = 0$, jo $0^2 - 1 + 1 = 0$. Ja $x \neq 0$, tad $x^2 + 1 > 1 \geq \cos x$, tātad vienādība nevar pastāvēt.

**12.2.** Trapeces $ABCD$ pamati ir $AD$ un $BC$. Leņķu $BAD$ un $ABC$ bisektrises krustojas punktā $E$, bet leņķu $BCD$ un $CDA$ bisektrises – punktā $F$. Pierādīt, ka $EF = \frac{|AD+BC-AB-CD|}{2}$.

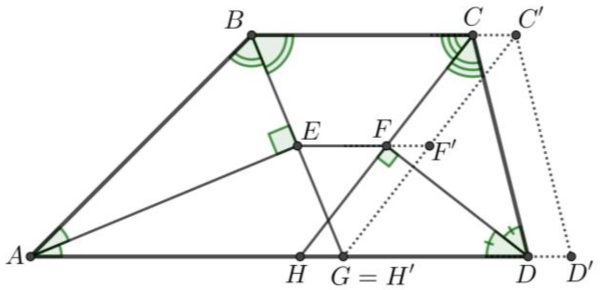
**1. atrisinājums.** Taisnes $BE$ un $AD$ krustpunktu apzīmēsim ar $G$, bet taisnes $CH$ krustpunktu ar $AD$ – ar $H$ (skat. 8. att.).

Tā kā $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, tad $\sphericalangle BAE + \sphericalangle ABE = 90°$ un no trijstūra $ABE$ iegūstam, ka $\sphericalangle AEB = 180° - 90° = 90°$. Tad $\Delta AEB = \Delta AEG$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ un $AB = AG$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Analoģiski pierāda, ka $DC = DH$.

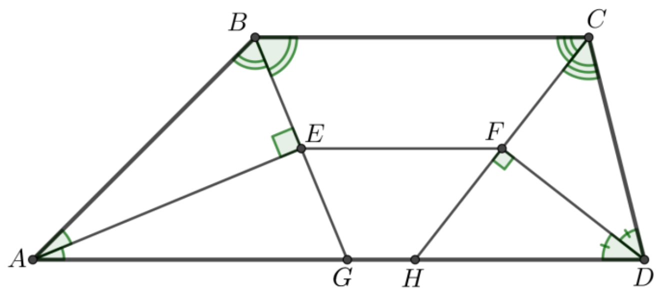
No tā, ka $BE = EG$ un $CF = FG$ izriet, ka $EF||BC$ un $EF||AD$ (caur punktu $E$ novelk taisni paralēli $AD$ un $BC$, pēc Talesa teorēmas šī taisne sadala nogriezni $CH$ uz pusēm, tātad tā iet caur punktu $F$).

Apskatīsim divus gadījumus, kādā secībā var būt izkārtoti punkti uz taisnes $AD$.

- Skat. 8. att. Trijstūri $HCD$ paralēli pārnesam par $\overrightarrow{HG}$. Tad $CC' = DD' = FF' = HH' = HG$. Tā kā $EF'$ ir trijstūra $GBC'$ viduslīnija, tad $EF' = \frac{BC'}{2} = \frac{BC+HG}{2}$. Iegūstam, ka $EF = EF' - FF' = \frac{BC+HG}{2} - HG = \frac{BC-HG}{2}$. Ievērojam, ka $HG = AG + DH - AD = AB + DC - AD$. Tātad $EF = \frac{AD+BC-AB-CD}{2}$.
- Skat. 9. att. Iegūstam, ka $EF = \frac{BC+HG}{2} = \frac{BC+AD-AG-DH}{2} = \frac{AD+BC-AB-CD}{2}$.



8. att.



9. att.

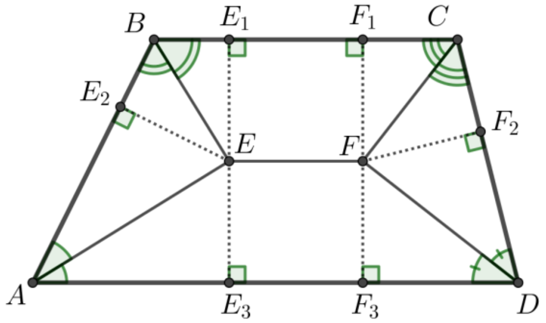
**2. atrisinājums.** No punkta $E$ novelkam perpendikulus pret malām $BC$, $AB$ un $AD$, to pamatus attiecīgi apzīmējam ar $E_1$, $E_2$, $E_3$ (skat. 10. att.). Līdzīgi no punkta $F$ novelkam perpendikulus pret malām $BC$, $CD$, $AD$ un to pamatus attiecīgi apzīmējam ar $F_1$, $F_2$, $F_3$.

Tā kā katrs leņķa bisektrises punkts atrodas vienādā attālumā no leņķa malām, tad $EE_1 = EE_2$ un $EE_2 = EE_3$. Līdzīgi iegūstam, ka $FF_1 = FF_2 = FF_3$.

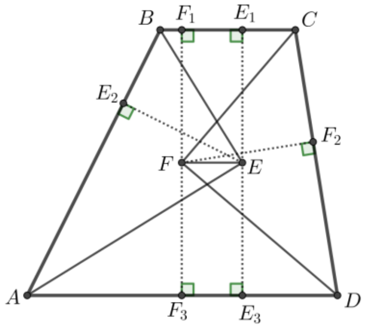
Taisnleņķa trijstūri $EE_1B$ un $EE_2B$ ir vienādi (jo ir vienāda katete un hipotenūza), tāpēc $E_1B = E_2B$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Līdzīgi iegūstam, ka $E_2A = E_3A$, $F_1C = F_2C$ un $F_2D = F_3D$.

Četrstūris $E_1F_1F_3E_3$ ir taisnstūris un $EF$ ir tā viduslīnija tāpēc $E_1F_1 = E_3F_3 = EF$.

- Ja uz nogriežņa $BC$ punkti atrodas secībā $B$, $E_1$, $F_1$, $C$ (skat. 10. att.; attiecīgi uz $AD$ tad punkti atrodas secībā $A$, $E_3$, $F_3$, $D$), tad
$$\frac{BC+AD-AB-CD}{2} = \frac{BE_1+E_1F_1+F_1C+AE_3+E_3F_3+F_3D-BE_2-E_2A-CF_2-F_2D}{2} = \frac{E_1F_1+E_3F_3}{2} = EF.$$
- Ja uz nogriežņa $BC$ punkti atrodas secībā $B$, $F_1$, $E_1$, $C$ (skat. 11. att.; attiecīgi uz $AD$ tad punkti ir šādā secībā: $A$, $F_3$, $E_3$, $D$), tad
$$\frac{BC+AD-AB-CD}{2} = \frac{BE_1-E_1F_1+F_1C+AE_3-E_3F_3+F_3D-BE_2-E_2A-CF_2-F_2D}{2} = \frac{E_1F_1+E_3F_3}{2} = EF.$$



10. att.



11. att.

**12.3.** Pierādīt, ka divu vai vairāku secīgu naturālu skaitļu kubu summa nevar būt pirmskaitlis!

**Atrisinājums.** No kubu summas formulas $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ redzams, ka $a^3+b^3$ dalās ar $(a+b)$. Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

- Ja ir pāra skaits secīgu naturālu skaitļu, tas ir, $2k$ secīgi naturāli skaitļi, kur $k=1,2,\ldots$, tad šo skaitļu summu var uzrakstīt kā
$$S=(n-k+1)^3+(n-k+2)^3+\cdots+(n+k-1)^3+(n+k)^3.$$
Sagrupējot pirmo saskaitāmo ar pēdējo, otro saskaitāmo – ar pirmspēdējo utt., iegūstam, ka
$$(n-k+1)^3+(n+k)^3 \text{ dalās ar } n-k+1+n+k=2n+1,$$
$$(n-k+2)^3+(n+k-1)^3 \text{ dalās ar } n-k+2+n+k-1=2n+1,$$
$$\ldots$$
Tā kā visas šīs $k$ summas dalās ar $(2n+1)$, tad arī visu $2k$ kubu summa dalās ar $(2n+1)$, līdz ar to nav pirmskaitlis.
- Ja ir nepāra skaits secīgu naturālu skaitļu, tas ir, $(2k+1)$ secīgi naturāli skaitļi, kur $k=1,2,\ldots$, tad šo skaitļu summu var uzrakstīt kā
$$S=(n-k)^3+\big(n-(k-1)\big)^3+\ldots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3+\ldots+\big(n+(k-1)\big)^3+(n+k)^3.$$
Ievērojam, ka pašā vidū šiem saskaitāmajiem atrodas skaitlis $n^3$, kas dalās ar $n$. Pārējos saskaitāmos sagrupējam tāpat kā iepriekš, tas ir, sagrupējam pirmo saskaitāmo ar pēdējo, otro saskaitāmo – ar pirmspēdējo utt., iegūstam, ka
$$(n-k)^3+(n+k)^3 \text{ dalās ar } n-k+n+k=2n$$
$$\big(n-(k-1)\big)^3+\big(n+(k-1)\big)^3 \text{ dalās ar } n-k+1+n+k-1=2n$$
$$\ldots$$
Tā kā visas šīs summas dalās ar $2n$, un vidējais saskaitāmais $n^3$ dalās ar $n$, tad arī visu $(2k+1)$ kubu summa dalās ar $n$, līdz ar to nav pirmskaitlis.

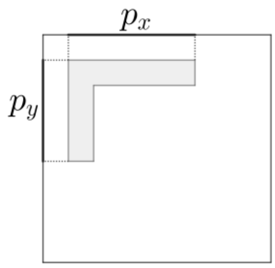
*Piezīme.* Uzdevumu var atrisināt arī ar matemātiskās indukcijas metodi.

**12.4.** Vienādojuma $x^3-14x^2+63x-91=0$ saknes ir trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

**Atrisinājums.** Dotā vienādojuma saknes apzīmējam ar $a,b,c$ un vienādojumu pārrakstām formā:
$$(x-a)(x-b)(x-c)=0. \qquad (1)$$
Atverot iekavas, iegūstam
$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0. \qquad (2)$$
Dotajā vienādojumā un vienādojumā (2), pielīdzinot koeficientus pie vienādām pakāpēm, iegūstam, ka
$$a+b+c=14;$$
$$ab+ac+bc=63;$$
$$abc=91.$$
Pēc Hērona formulas trijstūra laukums $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur $a$, $b$ un $c$ – trijstūra malu garumi, bet $p$ – pusperimetrs. Tā kā $a,b,c$ ir trijstūra malu garumi un $a+b+c=14$, tad pusperimetrs $p=7$.
Analoģiski kā no (1) tika iegūts (2), iegūstam, ka
$$(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc.$$
Tātad trijstūra laukums ir
$$S=\sqrt{p(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p-abc)}=$$
$$=\sqrt{7\cdot(7^3-14\cdot7^2+63\cdot7-91)}=$$
$$=\sqrt{7\cdot7\cdot(49-98+63-13)}=7\ (\mathrm{cm}^2).$$

**12.5.** Kvadrātu ar izmēriem $9 \times 9$ rūtiņas pa rūtiņu līnijām sadalīja deviņos daudzstūros, kas katrs satur tieši 9 rūtiņas, un katru no tiem nokrāsoja citā krāsā. Katrā dotā kvadrāta rindā un katrā kolonnā atrodas tieši trīs dažādu krāsu rūtiņas. Pierādīt, ka visi iegūtie daudzstūri ir kvadrāti ar izmēriem $3 \times 3$ rūtiņas!

**Atrisinājums.** Aplūkosim, cik garas var būt katra daudzstūra projekcijas uz divām dotā kvadrāta perpendikulārajām malām. Abas projekcijas ir nogriežņi, tās apzīmēsim ar $p_x$ un $p_y$ (skat. 12. att.).




*12. att.*

Tā kā katrs daudzstūris satur 9 rūtiņas, tad projekciju garumu reizinājums būs vismaz 9 rūtiņas, tas ir, $p_x \cdot p_y \geq 9$.

Noteiksim, kāda ir mazākā iespējamā projekciju garumu summa. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam, ka

$$\frac{p_x + p_y}{2} \geq \sqrt{p_x \cdot p_y} \geq \sqrt{9} = 3.$$

Tātad $p_x + p_y \geq 6$, pie tam vienādība izpildās tikai tad, ja $p_x = p_y = 3$.

Tā kā katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši trīs dažādu krāsu rūtiņas, tad katrā rindā projekciju summa ir $1 + 1 + 1 = 3$ un arī katrā kolonnā projekciju summa ir $1 + 1 + 1 = 3$. Tātad visu projekciju garumu kopsumma ir $3 \cdot 9\ (rindas) + 3 \cdot 9 (kolonnas) = 54$. Līdz ar to katrai no deviņu daudzstūru projekciju garumu summām jābūt 6 (pretējā gadījumā, ja kaut viena daudzstūra projekciju garumu summa pārsniegtu 6, tad visu projekciju garumu summa pārsniegtu $9 \cdot 6 = 54$). Tātad visi daudzstūri ir kvadrāti ar izmēriem $3 \times 3$ rūtiņas.