Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma 2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Doti reāli skaitļi a, x, y, z, kuriem ir spēkā vienādības:

$$x+y+z=a,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}.$$

Pierādīt, ka vismaz viens no trim skaitļiem x, y, z ir vienāds ar a.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $(x-a)(y-a)(z-a)=0$. Atverot iekavas, kreisā puse pārveidojas par $xyz-a(xy+yz+zx)+a^2(x+y+z)-a^3$. Bet no pirmās vienādības izriet, ka $a^2(x+y+z)-a^3=0$ un no otrās (vienādojot saucēju kreisajā pusē) – ka $xyz-a(xy+yz+zx)=0$.

2. Pierādīt, ka var atrast 2^{2021} dažādus naturālu skaitļu pārus $(a_i;b_i)$, ka vienlaicīgi izpildās šādas vienādības:

$$\frac{1}{a_1b_1}+\frac{1}{a_2b_2}+\frac{1}{a_3b_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2^{2021}}b_{2^{2021}}}=1,$$

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^{2021}})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2^{2021}})=3^{2022}.$$

Piezīme. Pāri $(a;b)$ un $(c;d)$ ir dažādi, ja $a\neq c$ vai $b\neq d$.

Atrisinājums. Apskatām skaitļu pārus $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;12)$, $(3;4)$. Tiem izpildās vienādības:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 4}=1,$$
$$(1+1+1+3)+(2+3+12+4)=27.$$

Tātad ir 2^2 pāri ar summu 3^3.

Aizstājam pāri $(a;b)$ ar diviem skaitļu pāriem: $(a;a+b)$ un $(b;a+b)$. Tad

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}=\frac{b+a}{ab(b+a)}=\frac{1}{ab},$$

$$a+(a+b)+b+(a+b)=3(a+b),$$

tas ir, apgriezto lielumu summa nemainās, bet skaitļu summa palielinās 3 reizes. Šādā veidā no 2^2 pāriem ar summu 3^3 var iegūt 2^3 pārus ar summu 3^4, pēc tam – 2^4 pārus ar summu 3^5 utt.

Var pierādīt, ka vienādi pāri var rasties tikai no vienādiem. Tādēļ visi iegūtie pāri būs dažādi.

3. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB=AC$. Uz pamata malas BC atzīmēts punkts D tā, ka $BD=2CD$. No B pret AD un AC novilkti perpendikuli – attiecīgi BE un BF. Aprēķināt $\sphericalangle CEF$ lielumu, ja $\sphericalangle BAC=22°$.

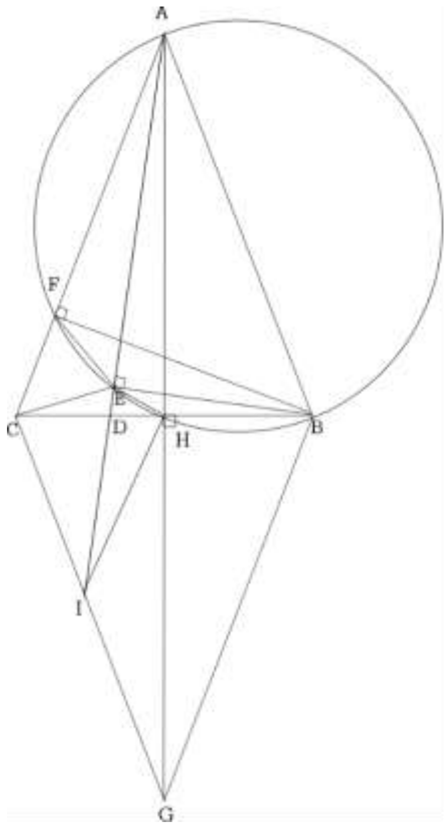
Atrisinājums. Papildināsim trijstūri līdz rombam $ABGC$ (virsotne G ir novietota simetriski A attiecībā pret BC) un novilksim romba diagonāli AG. Diagonāļu krustpunktu apzīmēsim ar H. Vienkāršības pēc, leņķi BAC apzīmēsim ar α.

Tā kā romba diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad $AH=HG$ un $CD=2DH$. Bet tas nozīmē, ka trijstūrī ACG arī AD ir mediāna un tās pagarinājums krusto CG viduspunktā I. Tātad $\Delta ICH\sim\Delta ABC$.

Ievērosim, ka punkti A,B,H,E un F atrodas uz vienas riņķa līnijas ar diametru AB. Tāpēc $\sphericalangle EHB=180°-\sphericalangle EAB$ un $\sphericalangle CHE=180°-\sphericalangle EHB=\sphericalangle EAB$. Aplūkojot ievilktos leņķus, kas balstās uz AF, iegūstam, ka $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABF=90°-\alpha$.

No tā, ka $AB||CG$, šķērsleņķi $\sphericalangle EAB$ un $\sphericalangle EIC$ ir vienādi: $\sphericalangle EAB=\sphericalangle EIC$. Tātad $\sphericalangle EIC=\sphericalangle CHE$, abi šie leņķi balstās uz nogriežņa CE un ap četrstūri $CEHI$ var apvilkt riņķa līniju. Šajā riņķa līnijā $\sphericalangle IHC=\sphericalangle IEC$, jo balstās uz IC. Bet $\sphericalangle IHC=\sphericalangle ACB=\frac{180°-\alpha}{2}$. Tātad $\sphericalangle AEC=\pi 180°-\sphericalangle IEC=\frac{180°+\alpha}{2}$.

No sakarības $\sphericalangle CEF=\sphericalangle AEC-\sphericalangle AEF$ iegūstam, ka $\sphericalangle CEF=\frac{180°+\alpha}{2}-(90°-\alpha)=\frac{3\alpha}{2}=33°$.



4. Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 400. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus, sāk pirmais spēlētājs. Vienā gājienā spēlētājs nodzēš jebkurus 3 skaitļus, kuriem eksistē trijstūris ar šādiem malu garumiem. Spēlētājs, kurš vairs nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – uzvarēs, pareizi spēlējot?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.

Ievērosim, ka skaitli 1 nevar nodzēst nekādā veidā. Parādīsim, ka, ja katrā gājienā pirmais spēlētājs ņems trīs mazākos skaitļus, neskaitot 1, tad viņš vienmēr varēs izdarīt gājienu, kamēr vien būs atlikuši vēl kādi skaitļi, neskaitot 1. Tādā gadījumā spēlē beigsies, kad uz tāfeles būs atlicis viens pats skaitlis 1 (un gājiens būs otrajam spēlētājam) vai arī agrāk pie kāda otrā spēlētāja gājiena.

Pieņemsim, ka kārtējā gājienā mazākie atlikušie skaitļi ir $a < b < c$. Pierādīsim, ka $a + b > c$, tas ir, ka tie ir derīgi. Visus skaitļus $a + 1;\ a + 2;\ \ldots;\ b - 1;\ b + 1;\ b + 2;\ \ldots;\ c - 1$ ir paņēmis otrais spēlētājs kādos savos gājienos, jo pirmais spēlētājs visu laiku ir ņēmis skaitļus, kas ir mazāki nekā a. Šādu skaitļu ir $c - a - 2$. Kamēr otrais spēlētājs ir ņēmis šos skaitļus, pirmais spēlētājs ir ņēmis skaitļus no intervāla 2; ...; $a - 1$, tātad šajā intervālā ir vismaz $c - a - 2$ skaitļi. Tā kā tajā ir tieši $a - 2$ skaitļi, tad $c - a - 2 \leq a - 2$ jeb $c \leq 2a$ un tā kā $a < b$, tad $c \leq a + a < a + b$.

5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $n^3 - 5n + 10 = 2^k$.

Atrisinājums. Ja $n = 1$, tad vienādojumam atrisinājuma nav, ja $n = 2$, tad der atrisinājums $n = 2, k = 3$. Pierādīsim, ka, ja n>2, tad vienādojumam atrisinājumu nav.

Aplūkosim doto vienādojumu pēc moduļa 7. Vienādojuma labā puse pēc moduļa 7 pieņem vērtības 1, 2, 4, bet kreisā – 3, 6, 1, 1, 5, 5, 0. Tātad, ja tās sakrīt, tad tās abas pieņem vērtību 1 pēc moduļa 7. Bet tas nozīmē, ka k dalās ar 3, tātad $n^3 - 5n + 10$ ir kāda naturāla skaitļa kubs.

Parādīsim, ka tas tā nevar būt. Lai to izdarītu atliek pierādīt, ka visiem $n \geq 3$ ir spēkā

$$(n - 1)^3 < n^3 - 5n + 10 < n^3.$$

Labā nevienādība ir acīmredzama, kreisā pēc iekavu atvēršanas un saīsināšanas kļūst par $3n^2 - 8n + 3 > 0$, ko var pārveidot par $3n(n - 3) + n + 3 > 0$, kas ir patiesa visiem $n \geq 3$.