Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9.1. Dots, ka a un b ir kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem

$$x^2 + 2ax + b = 0;$$
$$ax^2 + 2bx + 1 = 0;$$
$$bx^2 + 2x + a = 0$$

ir atrisinājums.

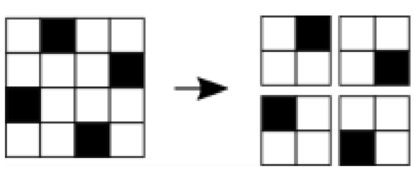
Atrisinājums. Pieņemsim pretējo. Tad visiem diskriminantiem jābūt negatīviem, tas ir,

$$a^2 < b, \quad b^2 < a, \quad 1 < ab.$$

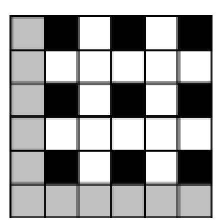
No pirmajām divām nevienādībām izriet, ka $a > 0$ un $b > 0$. Sareizinot pirmās divas nevienādības (to drīkst darīt, jo visas izteiksmes ir pozitīvas), iegūstam $a^2b^2 < ab$. Izdalot abas nevienādības puses ar $ab > 0$, iegūstam $ab < 1$, kas ir pretrunā ar trešo nevienādību. Tātad pieņēmums bija aplams, līdz ar to vismaz vienam vienādojumam ir atrisinājums.

9.2. Dots naturāls skaitlis n. Pierādīt, ka $4n \times 4n$ rūtiņu tabulā var aizkrāsot $4n^2$ rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir aizkrāsotas tieši n rūtiņas un nekādām divām aizkrāsotām rūtiņām nav kopīgu punktu (tas ir, iekrāsotās rūtiņas neatrodas blakus un nesaskaras pat ar stūriem).

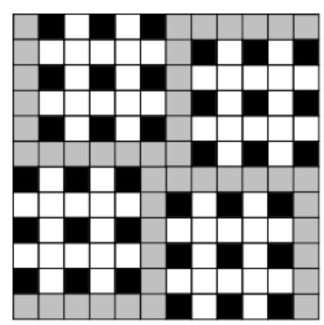
Atrisinājums. Vispirms aplūkosim gadījumu, ja $n = 1$. Tad 4×4 rūtiņu tabulā rūtiņas var aizkrāsot, kā parādīts 1. att. šis tabulas krāsojums atbilst visām prasībām.



1. att.



2. att.



3. att.

Ievērosim, ka, sadalot aizpildīto tabulu 2×2 rūtiņas lielos kvadrātos, iegūsim vienādi aizpildītus 2×2 rūtiņu kvadrātus, kas pagriezti attiecībā viens pret otru. Izmantojot šo ideju, veidosim tabulas aizpildījumu patvaļīgai n vērtībai.

Vispirms izveidosim $2n \times 2n$ rūtiņu tabulu, kurā īpaši izdalīsim $(2n-1) \times (2n-1)$ kvadrātu, kam papildus ir viena tukša rinda un viena tukša kolonna. Šajā $(2n-1) \times (2n-1)$ kvadrātā aizkrāsosim n rūtiņas katrā otrajā rindā un kolonnā, katrā virzienā atstājot pa tukšai rūtiņai starp iekrāsotajām (skat. 2. att., kur parādīts gadījums $n = 3$).

Pagriežot šo kvadrātu un sakombinējot tā, kā 2×2 kvadrāti tika sakombinēti 4×4 tabulā, iegūstam nepieciešamo tabulas aizpildījumu (skat. 3. att.).

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

9.3. Atrast visus naturālu skaitļu pārus $(m;\ n)$, kuriem ir spēkā vienādība $m^5 + 5n^4 = 81m$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto vienādību:

$$5n^4 = 81m - m^5;$$
$$5n^4 = m(9 + m^2)(3 + m)(3 - m).$$

Tā kā m un n ir naturāli skaitļi un iegūtās vienādības kreisās puses izteiksme ir pozitīva, tad $m = 1$ vai $m = 2$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $m = 1$, tad $5n^4 = 1 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2$ jeb $n^4 = 16$, no kā iegūstam, ka $n = 2$ (vērtība $n = -2$ neder, jo nav naturāls skaitlis);
- ja $m = 2$, tad $5n^4 = 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 1$ jeb $n^4 = 26$, no kā iegūstam, ka naturālu atrisinājumu nav.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka vienīgais derīgais skaitļu pāris ir $(1; 2)$.

9.4. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām AB, BC un AC attiecīgi punktos C_1, A_1 un B_1. Taisne, kas vilkta caur punktu A paralēli BC, un taisne A_1C_1 krustojas punktā K. Pierādīt, ka $\sphericalangle KB_1A_1 = 90°$.

Atrisinājums. Trijstūris C_1BA_1 ir vienādsānu trijstūris (jo $BC_1 = BA_1$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no viena punkta), tāpēc $\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle BC_1A_1$ (kā pamata pieleņķi pie vienādajām malām). Līdz ar to

$$\sphericalangle AKC_1 = \sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle AC_1K$$

(pirmajā vienādībā ir iekšējie šķērsleņķi, trešajā – krustleņķi, skat. 4. att.).

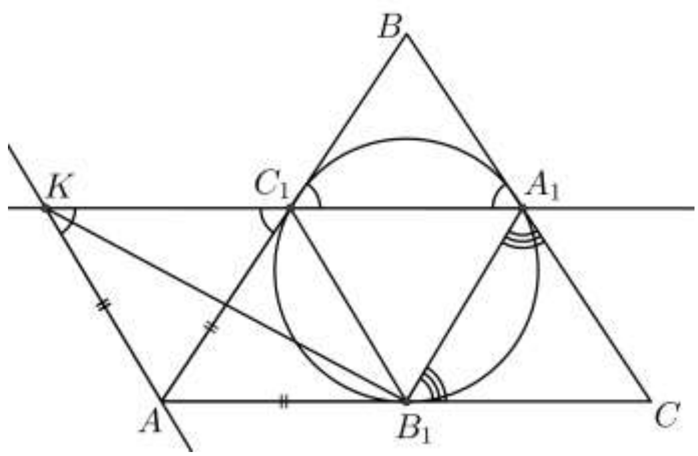
Tātad ΔKAC_1 ir vienādsānu trijstūris (jo pamata pieleņķi ir vienādi) un $KA = AC_1$.

Tā kā $AC_1 = AB_1$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no viena punkta, tad arī $KA = AB_1$. Tātad ΔKAB_1 ir vienādsānu trijstūris un $\sphericalangle KB_1A = \frac{180° - \sphericalangle KAB_1}{2}$. Tā kā $A_1C = CB_1$, tad arī $\sphericalangle CB_1A_1 = \frac{180° - \sphericalangle B_1CA_1}{2}$. Tātad

$$\sphericalangle KB_1A + \sphericalangle CB_1A_1 = \frac{180° - \sphericalangle KAB_1}{2} + \frac{180° - \sphericalangle B_1CA_1}{2} = 180° - \frac{\sphericalangle KAB_1 + \sphericalangle B_1CA_1}{2} = 90°,$$

jo $\sphericalangle KAB_1 + \sphericalangle B_1CA_1 = 180°$ kā iekšējie vienpusleņķi. Līdz ar to

$$\sphericalangle KB_1A_1 = 180° - \sphericalangle KB_1A - \sphericalangle CB_1A_1 = 180° - 90° = 90°.$$



4. att.

9.5. Dotas 8 kastes, sākumā tās visas ir tukšas. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli, pirmais spēlētājs sāk. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuras 7 kastes un katrā no tām ielikt vienu ābolu (āboli ir pieejami pietiekamā daudzumā). Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena kādā no kastēm ir tieši 15 āboli. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – uzvarēs, pareizi spēlējot?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt.

Sanumurēsim kastes ar skaitļiem no 1 līdz 8 un apzīmēsim gājienu ar tās kastes numuru, kurā ābols netiek ielikts. Piemēram, gājiens "3", nozīmē, ka āboli tiek ielikti kastēs ar numuriem 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8.

Simetrijas dēļ pieņemsim, ka savā pirmajā gājienā pirmais spēlētājs veic gājienu "1". Tad otrais spēlētājs savos pirmajos 7 gājienos neatkarīgi no tālākajiem pirmā spēlētāja gājieniem, var paiet gājienus "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8". Aplūkosim situāciju pirms otrā spēlētāja astotā gājiena.

Pirmā spēlētāja pirmais gājiens kopā ar otrā spēlētāja pirmajiem 7 gājieniem dod tieši 7 ābolus katrā kastē. Pirmais spēlētājs vēl ir pagājis 7 gājienus, tātad nevienā kastē nav vairāk kā 14 āboli, bet noteikti ir vismaz viena kaste, kurā ir tieši 14 āboli. Tajā tad savā 8. gājienā 2. spēlētājs var ielikt ābolu (kur likt pārējos 6 ābolus nav svarīgi) un uzvarēt.

10.1. Naturāls skaitlis S ir izsakāms formā $S = 9n^2 + 42n$, kur n ir kāds naturāls skaitlis. Pierādīt, ka, ja S pēdējais cipars ir 6, tad tā priekšpēdējais cipars ir 7.

Atrisinājums. Aplūkosim skaitli $S + 49 = 9n^2 + 42n + 49 = (3n + 7)^2$.

Ja S beidzas ar 6, tad $S + 49$ beidzas ar 5. Vesela skaitļa, kas beidzas ar 5, kvadrāts beidzas ar 25.

Tātad $S + 49 = \cdots 25$ un tas nozīmē, ka S decimālais pieraksts beidzas ar 76.

10.2. Dota ģeometriskā progresija $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6$, kuras locekļi ir pozitīvi skaitļi. Zināms, ka $x_4 + x_3 - x_2 - x_1 = 3$. Pierādīt, ka $x_5 + x_6 \geq 12$.

Piezīme. Ģeometriskā progresija ir skaitļu virkne, kuras pirmais loceklis ir x_1 un katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar kādu fiksētu skaitli q, tas ir, $x_2 = qx_1$, $x_3 = qx_2$ utt.

Atrisinājums. Apzīmēsim ģeometriskās progresijas kvocientu ar q. Ievērojam, ka q ir pozitīvs skaitlis un nav vienāds ar 1 (citādi progresija būtu konstanta un nevarētu izpildīties $x_4 + x_3 - x_2 - x_1 = 3$).

No dotā izriet, ka

$$x_1q^3 + x_1q^2 - x_1q - x_1 = 3;$$
$$x_1 \cdot (q^3 + q^2 - q - 1) = 3;$$
$$x_1\big(q^2(q + 1) - (q + 1)\big) = 3;$$
$$x_1(q + 1)(q^2 - 1) = 3;$$
$$x_1 \cdot (q + 1) = \frac{3}{q^2 - 1} \qquad (1)$$

Mums jāpierāda, ka $x_5 + x_6 = x_1(q^5 + q^4) = x_1(q + 1)q^4 \geq 12$ jeb $q^4 \geq \frac{12}{x_1 \cdot (q+1)}$. Ievietojot šajā nevienādībā (1), iegūstam, ka $q^4 \geq 4 \cdot (q^2 - 1)$, kas ir patiesa nevienādība, jo $q^4 - 4q^2 + 4 = (q^2 - 2)^2 \geq 0$.

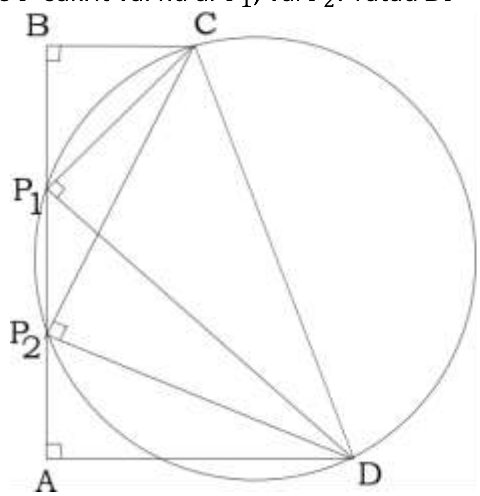
10.3. Dota taisnleņķa trapece $ABCD$, tās pamati ir AD un BC un $AB \perp AD$. Uz malas AB izvēlēts punkts P tā, ka $\sphericalangle CPD = 90°$. Pierādīt, ka $BP = BC$ vai $BP = AD$, ja zināms, ka $AB = AD + BC$.

Atrisinājums. Aplūkosim divus punktus P_1 un P_2 uz malas AB tā, ka $BP_1 = BC$ un $BP_2 = AD$ (skat. 5. att.). Tā kā trapeces pamati pēc definīcijas ir dažāda garuma, tad P_1 un P_2 ir atšķirīgi punkti.

Tad $\sphericalangle CP_1D = 90°$, jo ΔBCP_1 un ΔADP_1 ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri.

$\Delta BCP_2 = \Delta ADP_2$, pēc pazīmes mlm, jo $\sphericalangle CBP_2 = \sphericalangle P_2AD = 90°$, $BP_2 = AD$ un $BC = AP_2$. Tātad arī $\sphericalangle CP_2D = 90°$ un ap četrstūri P_1CDP_2 var apvilkt riņķa līniju, kuras diametrs ir CD.

Bet riņķa līnija nogriezni var šķērsot ne vairāk kā divos punktos, tāpēc uz malas AB nav citu punktu, kam nogriežņi uz C un D veido taisnu leņķi, līdz ar to P sakrīt vai nu ar P_1, vai P_2. Tātad $BP = BC$ vai $BP = AD$.



5. att.

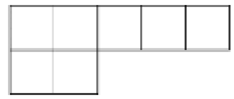
10.4. Uz tāfeles sākumā uzrakstīts vienādojums $2019x^2 + 2020x + 2021 = 0$. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus, pirmais spēlētājs sāk. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuru no trim koeficientiem vienādojuma kreisajā pusē (pie x^2, pie x vai brīvo locekli) un no tā atņemt vieninieku. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena uz tāfeles uzrakstītajam vienādojumam ir kāda vesela sakne. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – uzvarēs, pareizi spēlējot?

Atrisinājums. Pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt. Pierādīsim to.

Vispirms parādīsim, kā pirmais spēlētājs var noteikti nezaudēt. Lai to izdarītu, viņam jānodrošina, ka koeficienti pie x^2 un x ir ar vienādu paritāti, bet brīvais loceklis ir nepāra skaitlis. Tādā gadījumā izteiksmes vērtība vienādojuma kreisajā pusē būs nepāra skaitlis pie jebkādas x vērtības, tātad tā nevarēs būt nulle. Savā pirmajā gājienā pirmais spēlētājs var koeficientu pie x samazināt no 2020 uz 2019 un visos tālākajos gājienos rīkoties šādi: ja otrais spēlētājs samazina koeficientu pie brīvā locekļa, tad to pašu dara arī pirmais spēlētājs, bet, ja otrais samazina koeficientu pie x^2 vai x, tad pirmais – attiecīgi pie x vai x^2.

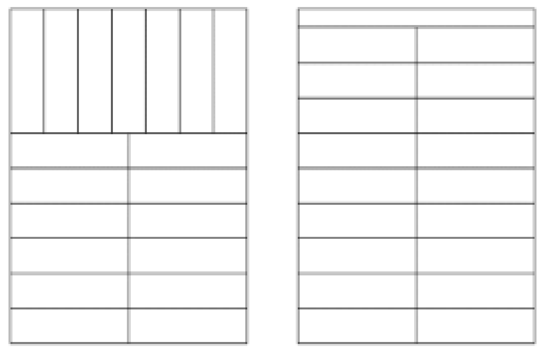
Atliek ievērot, ka spēle nevar turpināties bezgalīgi, jo noteikti pienāks brīdis, kad visu koeficientu summa būs vienāda ar 0, un tātad $x = 1$ būs vienādojuma sakne.

10.5. Taisnstūrveida tabulā, kurā ir 19 rindas un 14 kolonnas, ierakstīti kaut kādi reāli skaitļi. Zināms, ka skaitļu summa katrā 6. att. dotajā figūrā ir 1, turklāt šī figūra var būt pagriezta vai apmesta otrādi. Aprēķināt skaitļu summu pirmajā rindā!



6. att.

Atrisinājums. Ievērosim, ka no divām 6. att. figūrām var salikt 2×7 rūtiņu taisnstūri, skaitļu summa šajā taisnstūrī ir 2. Visu tabulu 19×14 var noklāt ar šādiem 19 šādiem taisnstūriem (pirmās 7 rindas noklāj, liekot tos vertikāli, pārējās 12 rindas noklāj pa pāriem, liekot tos blakus horizontāli, skat. 7. att.), tātad skaitļu summa visā tabulā ir 38. Bet visu tabulu bez pirmās rindas var noklāt ar 18 šādiem taisnstūriem, liekot tos horizontāli (skat. 7. att.), tātad skaitļu summa šajā tabulas daļā ir 36. Tātad pirmās rindas skaitļu summa ir $38 - 36 = 2$.



7. att.

11.1. Pierādīt, ka $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = 2$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $\left(\sqrt{3}+1\right)^3 = 6\sqrt{3}+10$ un $\left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 6\sqrt{3}-10$. Līdz ar to

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = \left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = 2.$$

11.2. Dota ģeometriskā progresija $y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6$, kuras locekļi ir pozitīvi skaitļi. Zināms, ka $y_4 + y_3 - y_2 - y_1 = 15$. Kāda ir $y_5 + y_6$ mazākā iespējamā vērtība?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $y_5 + y_6$ mazākā iespējamā vērtība ir 60.

Vispirms parādīsim, ka $y_5 + y_6 \geq 60$.

Apzīmēsim ģeometriskās progresijas kvocientu ar $q > 1$. No dotā izriet, ka $y_1 \cdot (q^3 + q^2 - q - 1) = 15$ jeb

$$y_1 \cdot (q+1) = \frac{15}{q^2 - 1} \qquad (1)$$

Mums jāpierāda, ka $y_1(q^5 + q^4) \geq 60$ jeb ka $q^4 \geq \frac{60}{x_1 \cdot (q+1)}$. Ievietojot šajā nevienādībā (1), iegūstam, ka $q^4 \geq 4 \cdot (q^2 - 1)$, kas ir patiesa nevienādība, jo $q^4 - 4q^2 + 4 = (q^2 - 2)^2 \geq 0$.

Atliek parādīt, ka vērtība $y_5 + y_6 = 60$ ir iegūstama. Lai tas tā būtu, visām nevienādībām ir jākļūst par vienādībām, tātad $q = \sqrt{2}$ un $y_1 \cdot \left(\sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^2 - \sqrt{2} - 1\right) = 15$ jeb $y_1 = 15\left(\sqrt{2} - 1\right)$. Redzams, ka šajā gadījumā tik tiešām $y_5 + y_6 = y_1(q^5 + q^4) = 15\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(4\sqrt{2} + 4\right) = 60$.

11.3. Naturālu skaitli sauksim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (*Eleganti* ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz *elegantu* skaitļu!

Atrisinājums. Apzīmēsim skaitļa x ciparu summu ar $S(x)$. Pierādīsim, ka, ja A ir *elegants*, tad arī $\overline{AAA}$ (skaitlis, kas sastāv no trim pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem A) ir *elegants*.

Ievērosim, ka, ja A ir n-ciparu skaitlis, tad $\overline{AAA} = A \cdot (1 + 10^n + 10^{2n})$ un $S(\overline{AAA}) = 3S(A)$. Tā kā A dalās ar $S(A)$ pēc pieņēmuma, ka A ir *elegants*, tad atliek pamatot, ka $1 + 10^n + 10^{2n}$ dalās ar 3, bet tas ir acīmredzami, jo tā ciparu summa ir 3.

Šādā veidā, sākot ar jebkuru *elegantu* skaitli (piemēram, 36), mēs varam iegūt bezgalīgu *elegantu* skaitļu virkni (36; 363636; 363636363636363636 utt.).

11.4. Izliektā četrstūrī $ABCD$ ir spēkā $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAB$ un $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADB$. Pierādīt, ka no nogriežņiem BC, AD, AC var salikt taisnleņķa trijstūri!

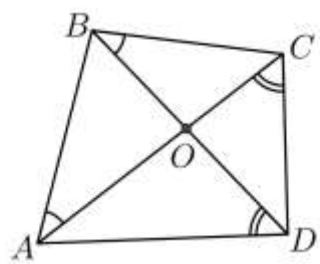
Atrisinājums. Apzīmēsim AC un BD krustpunktu ar O (skat. 8. att.).

Trijstūri CBO un CAB ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$ ($\sphericalangle BCA$ ir kopīgs un $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBO$ pēc dotā), tāpēc $\frac{CO}{BC} = \frac{BC}{AC}$ jeb $BC^2 = CO \cdot AC$.

Tieši tāpat arī $\Delta ADO \sim \Delta ACB$ pēc pazīmes $\ell\ell$ ($\sphericalangle CAD$ ir kopīgs un $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ACD$ pēc dotā), tāpēc $\frac{AO}{AD} = \frac{AD}{AC}$ jeb $AD^2 = AO \cdot AC$. Tāpēc

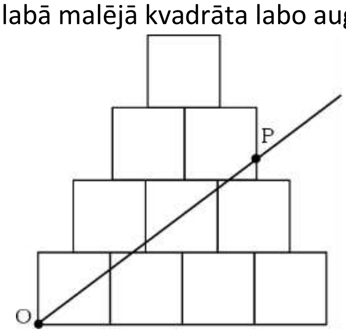
$$BC^2 + AD^2 = CO \cdot AC + AO \cdot AC = AC \cdot (AO + CO) = AC^2$$

un pēc apgrieztās Pitagora teorēmas izriet, ka no malām BC un AD kā katetēm un AC kā hipotenūzas var salikt taisnleņķa trijstūri.



8. att.

11.5. Dotam naturālam skaitlim $k > 1$ *torni* būvē šādi: simetriski attiecībā pret vertikālu simetrijas asi pirmajā rindā blakus saliek k kvadrātus, otrajā rindā saliek $(k-1)$ kvadrātu, trešajā rindā saliek $(k-2)$ kvadrātus utt. līdz k-ajā rindā liek vienu kvadrātu (skat. 9. att., kur parādīts tornis, ja $k = 4$). No *torņa* pirmās rindas kreisā malējā kvadrāta kreisās apakšējās virsotnes O novelk staru, kas *torni* sadala divās vienlielās figūrās. Pierādīt, ka bezgalīgi daudzām k vērtībām šis stars iet caur kādas rindas labā malējā kvadrāta labo augšējo virsotni!



9. *att.*

Atrisinājums. Pierādīsim, ka prasītais izpildās visām nepāra k vērtībām $k = 2n - 1$. Pievērsīsim uzmanību n-tajai kvadrātu rindai pēc kārtas un tās pēdējā kvadrāta labējai augšējai virsotnei.

Pieņemsim, ka kvadrāta malas garums ir viena vienība. Aprēķināsim figūras laukuma daļu, kas atrodas zem stara OP (skat. 10. att.). To veido trijstūra OPR laukums un kvadrātu rindu galu "trepīte" (figūras daļa pa labi no PR):

$$S_{OPR} = \frac{RO \cdot PR}{2} = \frac{\left(2n - 1 - \frac{1}{2}(n-1)\right) \cdot n}{2} = \frac{(3n-1) \cdot n}{4}$$

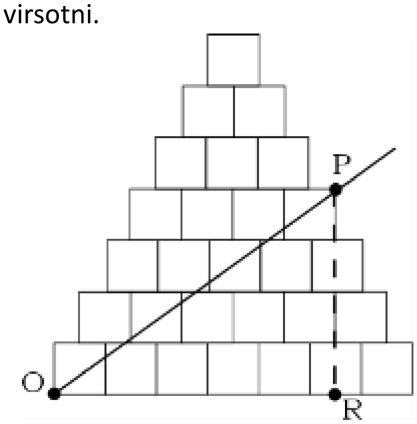
$$S_{trepīte} = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$S_{zemOP} = \frac{(3n-1)n}{4} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(2n-1)}{2}$$

Kopējais visas figūras laukums ir

$$S_{visa} = 1 + 2 + \cdots + (2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

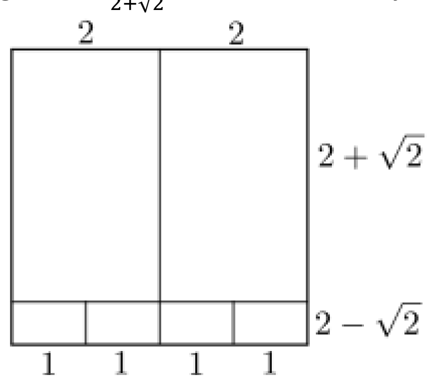
Puse no S_{visa} ir $\frac{n(2n-1)}{2}$, kas sakrīt ar aprēķināto S_{zemOP}. Tātad, ja k ir nepāra skaitlis, tad figūras laukumu vienlielās daļās sadalošais stars iet caur kvadrāta virsotni.



10. att.

12.1. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt sešos taisnstūros, kuriem visiem īsākās malas attiecība pret garāko ir $2 - \sqrt{2}$.

Atrisinājums. Zīmējumā (skat. 11. att.) attēlots, kā var sagriezt kvadrātu, kura malas garums ir 4. Lielākajiem taisnstūriem īsākās malas attiecība pret garāko ir $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$, mazākajiem – arī tāda pati.



11. att.

12.2. Doti reāli pozitīvi skaitļi x, y, z. Pierādīt, ka
$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} \geq x+y+z.$$
Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka patvaļīgiem x un y ir spēkā $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Atverot iekavas un pārnest visu uz kreiso pusi, iegūstam
$$x^2+y^2-\frac{(x+y)^2}{2}=x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)=\frac{(x-y)^2}{2} \geq 0.$$
Pielietojot šo visiem trim daļu skaitītājiem, iegūstam
$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} \geq \frac{(x+y)^2}{2(x+y)}+\frac{(y+z)^2}{2(y+z)}+\frac{(z+x)^2}{2(z+x)}=x+y+z.$$

12.3. Agita ir iedomājusies naturālu skaitli x, kura ciparu summa ir 2021, un Konstantīns cenšas skaitli uzminēt. Vienā gājienā Konstantīns nosauc patvaļīgu naturālu skaitli a, un Agita viņam pasaka skaitļa $|x-a|$ ciparu summu. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru Konstantīnam noteikti pietiek, lai uzzinātu Agitas iedomāto skaitli?

Atrisinājums. Mazākais gājienu skaits ir 2021. Vispirms parādīsim, kā Konstantīns var atrast Agitas skaitli 2021 gājienā.

Pirmajā gājienā Konstantīns nosauc skaitli $a_1=1$. Ja Agitas skaitlis x beidzas ar k nullēm, tad viņa Konstantīnam nosauc skaitli $2020+9k$. Tādā veidā Konstantīns noskaidro, ar cik nullēm beidzas Agitas skaitlis. Apzīmēsim šo skaitu ar k_1 un tālāk aplūkosim skaitli $x_1=x-10^{k_1}$, kura ciparu summa ir 2020.

Otrajā gājienā Konstantīns piemeklē skaitli a_2 tā, lai $x-a_2=x_1-1$ un līdzīgā veidā noskaidro, ar cik nullēm beidzas skaitlis x_1. Apzīmēsim šo skaitu ar k_2 un tālāk aplūkosim skaitli $x_2=x_1-10^{k_2}$, kura ciparu summa ir 2019.

Trešajā gājienā Konstantīns piemeklē skaitli a_3 tā, lai $x-a_3=x_2-1$ un līdzīgā veidā noskaidro, ar cik nullēm beidzas skaitlis x_2. Apzīmēsim šo skaitu ar k_3 un tālāk aplūkosim skaitli $x_3=x_2-10^{k_3}$, kura ciparu summa ir 2018.

Šādi Konstantīns turpina, līdz pēdējā solī tas iegūst, ka skaitlis x_{2020}, kura ciparu summa ir 1, beidzas ar k_{2021} nullēm (tātad tas ir $x_{2020}=10^{k_{2021}}$).

Tātad Agitas iedomātais skaitlis ir $x=10^{k_1}+10^{k_2}+10^{k_3}+\cdots+10^{k_{2021}}$.

Atliek pamatot, ka ar mazāk gājieniem Konstantīns to izdarīt nevar. Pieņemsim, ka Agita ir atzinusies Konstantīnam, ka viņas iedomātais skaitlis sastāv tikai no vieniniekiem un nullēm. Konstantīnam ir jānoskaidro tikai, kurās pozīcijās atrodas vieninieki. Tas ir, Agitas skaitlis ir izteikts formā $x=10^{k_1}+10^{k_2}+10^{k_3}+\cdots+10^{k_{2021}}$, kur $k_1<k_2<k_3<\cdots<k_{2021}$, un Konstantīnam ir jānoskaidro visas vērtības k_i. Bet, ja izrādās, ka $10^{k_1}>a_1$, tad ar savu pirmo minējumu Konstantīns neko nenoskaidro par pārējiem skaitļiem $k_2,\ldots,k_{2021}$. Līdzīgi, ja $10^{k_2}>a_2$, tad ar savu otro minējumu Konstantīns neko nenoskaidro par atlikušajiem skaitļiem $k_3,\ldots,k_{2021}$. Līdzīgi turpinot, redzams, ka pat pēc 2020-ā minējuma Konstantīns vēl neko nevarēs pateikt par skaitli k_1, tas var atrasties jebkurā pozīcijā.

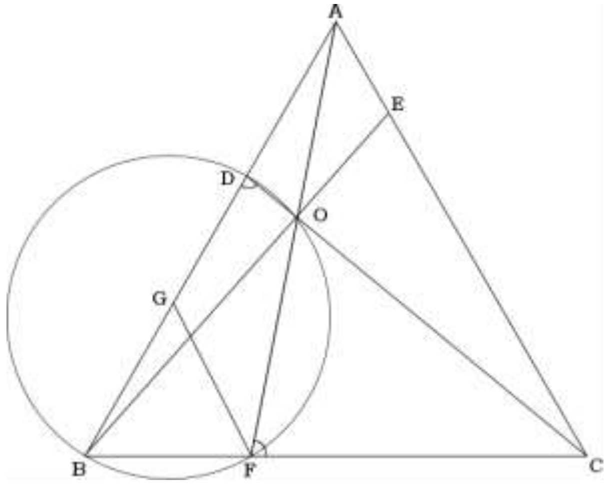
12.4. Vienādmalu trijstūra ABC malas garums ir 15. Uz malas AB atlikts punkts D tā, ka $AD = 5$, bet uz malas AC – punkts E tā, ka $AE = 3$. Pierādīt, ka nogriežņi BE un CD ir perpendikulāri!

Atrisinājums. Caur BE un CD krustpunktu O novelk nogriezni AF, kur F atrodas uz BC (skat. **12**. att.). Pēc Čevas teorēmas $\frac{CF}{BF} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AD}{DB} = 2$ jeb $CF = 10$ un $BF = 5$. Tātad $\Delta BCD = \Delta ACF$ pēc pazīmes $m\ell m$. Attiecīgi $\sphericalangle BDC = \sphericalangle AFC$ un $\sphericalangle BDC + \sphericalangle AFB = 180°$, no kurienes izriet, ka četrstūrim $BDOF$ var apvilkt riņķa līniju.

Aplūkosim trijstūri BDF. Tā malu garumi $BD = 10$, $BF = 5$ un $\sphericalangle DBF = 60°$. Tātad BDF ir taisnleņķa un ap BDF apvilktās riņķa līnijas rādiusi $BG = GD = GF = 5$.

Ap ΔBDF apvilktā riņķa līnija vienlaikus ir arī ap $BDOF$ apvilktā riņķa līnija.

Tā kā $\sphericalangle BOD$ balstās uz diametra, tad $\sphericalangle BOD = 90°$. Tātad $BE \perp CD$.



12. att.

12.5. Atrast visus veselu skaitļu pārus $(a; b)$, kuriem

$$(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (a + 19b)^{18}$$

ir kāda vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Vienīgais šāds pāris ir $(0;\ 0)$, kurš der, jo $0^{18} + 0^{18} + 0^{18} = 0$. Pierādīsim, ka neviens cits pāris neder. Pieņemsim, ka kāds skaitļu pāris $(a;\ b)$ atbilst uzdevuma nosacījumiem. Ja gan a, gan b dalās ar 19^k, tad arī skaitļu pāris $\left(\frac{a}{19^k}\ ;\ \frac{b}{19^k}\right)$ atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tādā veidā mēs varam iegūt jaunu skaitļu pāri $(a; b)$, kurš atbilst uzdevuma nosacījumiem un kurā vismaz viens no skaitļiem nedalās ar 19.

Ievērosim, ka pēc mazās Fermā teorēmas, ja x nedalās ar 19, tad $x^{18} = 1 \pmod{19}$. Tātad katrs no trim summas locekļiem pēc moduļa 19 ir vai nu 0, vai 1. Ievērosim arī, ka, ja vismaz viens no skaitļiem $(a;\ b)$ nedalās ar 19, tad vismaz divi no trim skaitļiem $19a + b$; $a + b$; $a + 19b$ nedalās ar 19. Līdz ar to šīs summas vērtība pēc moduļa 19 ir vai nu 2, vai 3.

Bet ne 2, ne 3 pēc moduļa 19 nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts (pārbaude ar tabulu) – pretruna.

$n \pmod{19}$	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
$n^2 \pmod{19}$	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5