Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

11.03.2021.

1. Dots, ka a un b ir kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem

$$x^2+2ax+b=0;$$
$$ax^2+2bx+1=0;$$
$$bx^2+2x+a=0$$

ir atrisinājums.

2. Dots naturāls skaitlis n. Pierādīt, ka $4n\times 4n$ rūtiņu tabulā var aizkrāsot $4n^2$ rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir aizkrāsotas tieši n rūtiņas un nekādām divām aizkrāsotām rūtiņām nav kopīgu punktu (tas ir, iekrāsotās rūtiņas neatrodas blakus un nesaskaras pat ar stūriem).

3. Atrast visus naturālu skaitļu pārus $(m;\ n)$, kuriem ir spēkā vienādība $m^5+5n^4=81m$.

4. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām AB, BC un AC attiecīgi punktos C_1, A_1 un B_1. Taisne, kas vilkta caur punktu A paralēli BC, un taisne A_1C_1 krustojas punktā K. Pierādīt, ka $\sphericalangle KB_1A_1=90°$.

5. Dotas 8 kastes, sākumā tās visas ir tukšas. Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli, pirmais spēlētājs sāk. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuras 7 kastes un katrā no tām ielikt vienu ābolu (āboli ir pieejami pietiekamā daudzumā). Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena kādā no kastēm ir tieši 15 āboli. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – uzvarēs, pareizi spēlējot?

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

11.03.2021.

1. Naturāls skaitlis S ir izsakāms formā $S = 9n^2 + 42n$, kur n ir kāds naturāls skaitlis. Pierādīt, ka, ja S pēdējais cipars ir 6, tad tā priekšpēdējais cipars ir 7.

2. Dota ģeometriskā progresija $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6$, kuras locekļi ir pozitīvi skaitļi. Zināms, ka $x_4 + x_3 - x_2 - x_1 = 3$. Pierādīt, ka $x_5 + x_6 \geq 12$.
Piezīme. Ģeometriskā progresija ir skaitļu virkne, kuras pirmais loceklis ir x_1 un katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējo reizinot ar kādu fiksētu skaitli q, tas ir, $x_2 = qx_1$, $x_3 = qx_2$ utt.

3. Dota taisnleņķa trapece $ABCD$, tās pamati ir AD un BC un $AB \perp AD$. Uz malas AB izvēlēts punkts P tā, ka $\sphericalangle CPD = 90°$. Pierādīt, ka $BP = BC$ vai $BP = AD$, ja zināms, ka $AB = AD + BC$.

4. Uz tāfeles sākumā uzrakstīts vienādojums $2019x^2 + 2020x + 2021 = 0$. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus, pirmais spēlētājs sāk. Vienā gājienā var izvēlēties jebkuru no trim koeficientiem vienādojuma kreisajā pusē (pie x^2, pie x vai brīvo locekli) un no tā atņemt vieninieku. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena uz tāfeles uzrakstītajam vienādojumam ir kāda vesela sakne. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – uzvarēs, pareizi spēlējot?

5. Taisnstūrveida tabulā, kurā ir 19 rindas un 14 kolonnas, ierakstīti kaut kādi reāli skaitļi. Zināms, ka skaitļu summa katrā 1. att. dotajā figūrā ir 1, turklāt šī figūra var būt pagriezta vai apmesta otrādi. Aprēķināt skaitļu summu pirmajā rindā!

1. att.

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

11.03.2021.

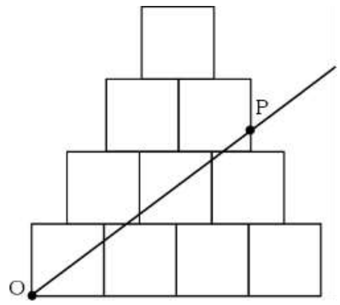
1. Pierādīt, ka $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=2$.

2. Dota ģeometriskā progresija $y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6$, kuras locekļi ir pozitīvi skaitļi. Zināms, ka $y_4+y_3-y_2-y_1=15$. Kāda ir y_5+y_6 mazākā iespējamā vērtība?

3. Naturālu skaitli sauksim par *elegantu*, ja tā decimālajā pierakstā nav nevienas nulles un šis skaitlis dalās ar savu ciparu summu. (*Eleganti* ir visi viencipara skaitļi, kā arī, piemēram, skaitļi 36 un 322.) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz *elegantu* skaitļu!

4. Izliektā četrstūrī $ABCD$ ir spēkā $\sphericalangle CBD=\sphericalangle CAB$ un $\sphericalangle ACD=\sphericalangle ADB$. Pierādīt, ka no nogriežņiem BC, AD, AC var salikt taisnleņķa trijstūri!

5. Dotam naturālam skaitlim $k>1$ *torni* būvē šādi: simetriski attiecībā pret vertikālu simetrijas asi pirmajā rindā blakus saliek k kvadrātus, otrajā rindā saliek $(k-1)$ kvadrātu, trešajā rindā saliek $(k-2)$ kvadrātus utt. līdz k-ajā rindā liek vienu kvadrātu (skat. 2. att., kur parādīts tornis, ja $k=4$). No *torņa* pirmās rindas kreisā malējā kvadrāta kreisās apakšējās virsotnes O novelk staru, kas *torni* sadala divās vienlielās figūrās. Pierādīt, ka bezgalīgi daudzām k vērtībām šis stars iet caur kādas rindas labā malējā kvadrāta labo augšējo virsotni!



2. *att.*

Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

11.03.2021.

1. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt sešos taisnstūros, kuriem visiem īsākās malas attiecība pret garāko ir $2-\sqrt{2}$.

2. Doti reāli pozitīvi skaitļi x, y, z. Pierādīt, ka

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} \geq x+y+z.$$

3. Agita ir iedomājusies naturālu skaitli x, kura ciparu summa ir 2021, un Konstantīns cenšas skaitli uzminēt. Vienā gājienā Konstantīns nosauc patvaļīgu naturālu skaitli a, un Agita viņam pasaka skaitļa $|x-a|$ ciparu summu. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru Konstantīnam noteikti pietiek, lai uzzinātu Agitas iedomāto skaitli?

4. Vienādmalu trijstūra ABC malas garums ir 15. Uz malas AB atlikts punkts D tā, ka $AD=5$, bet uz malas AC – punkts E tā, ka $AE=3$. Pierādīt, ka nogriežņi BE un CD ir perpendikulāri!

5. Atrast visus veselu skaitļu pārus $(a;b)$, kuriem

$$(19a+b)^{18}+(a+b)^{18}+(a+19b)^{18}$$

ir kāda vesela skaitļa kvadrāts.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola