**Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 3. posma 1. kārtas
uzdevumi un atrisinājumi**

**9. klase**

**9.1.** Zināms, ka un ir pozitīvi skaitļi, un kvadrātfunkciju un minimālo vērtību summa ir nulle. Pierādīt, ka katrai no šīm kvadrātfunkcijām minimālā vērtība ir nulle!

**1. atrisinājums.** Abām dotajām kvadrātfunkcijām ir vienāds sakņu skaits, jo tām ir vienāds diskrimintants . Ja tām abām būtu divas saknes, tad to minimālās vērtības būtu negatīvas un to summa arī būtu negatīva. Ja tām abām nebūtu sakņu, tad to minimālās vērtības būtu pozitīvas un summa arī pozitīva. Tātad tām abām ir tieši viena sakne, kas nozīmē, ka to minimālā vērtība ir nulle.

**2. atrisinājums.** Tā kā un ir pozitīvi skaitļi, tad abu parabolu zari ir vērsti uz augšu un kvadrātfunkciju minimālā vērtība sakrīt ar parabolas virsotnes koordinātu. Parabolas virsotnes koordinātas ir

 un ,

bet parabolas virsotnes koordinātas ir

 un .

Tā kā abu kvadrātfunkciju minimālo vērtību summa ir nulle, tad

;

Tā kā , tad jeb . Tātad un . Līdzīgi iegūst, ka .

*Piezīme*. Kvadrātfunkcijas minimālo vērtību var atrast arī atdalot pilno kvadrātu:

Tā kā , tad kvadrātfunkcijas minimālā vērtība .

**9.2.** Izvēlēti trīs dažādi naturāli skaitļi un aprēķināti to reizinājumi pa pāriem, iegūstot trīs reizinājumus. Pierādīt, ka šos reizinājumus, dalot ar 4, vismaz divi dod vienādus atlikumus!

**Atrisinājums.** Katru naturālu skaitli var izteikt formā , kur un ir skaitļa atlikums, dalot ar 4. Iespējamās atlikuma vērtības ir 0, 1, 2 vai 3. Apskatām visus iespējamos gadījumus, kādus atlikumus var dot trīs izvēlētie skaitļi.

1. Ja kāds no skaitļiem dalās ar 4 (jeb dod atlikumu 0), tad šī skaitļa reizinājums ar pārējiem diviem skaitļiem arī dalās ar 4 jeb šie divi reizinājumi dod atlikumu 0.
2. Ja neviens no skaitļiem nedalās ar 4, tad iespējami divi gadījumi.
	1. Ja vismaz diviem skaitļiem atlikums, dalot ar 4, ir vienāds, tas ir, skaitļus varam izteikt formā
	; un , tad reizinājumiem un
	 atlikums ir vienāds ar atlikumu, dalot ar 4.
	2. Ja visi atlikumi ir dažādi, tad viena skaitļa atlikums, dalot ar 4, ir 1, otra – 2, trešā – 3, tas ir, skaitļus varam izteikt formā un . Tad reizinājuma
	 atlikums ir vienāds ar reizinājuma
	 atlikumu, tas ir, ir vienāds ar 2.

Esam aplūkojuši visus gadījumus un prasītais pierādīts.

**9.3.** Rūtiņu tabulas ar izmēriem katrā rūtiņā sēž tieši viena muša. Visas mušas pārlido uz citu tabulu ar izmēriem rūtiņas tā, ka katrā rūtiņā atkal ir tieši viena muša. Vai iespējams, ka visas mušas, kas bija kaimiņi sākotnējā izvietojumā (tas ir, atradās blakus rūtiņās ar kopīgu malu), būs kaimiņi arī jaunajā izvietojumā?

**1. atrisinājums.** Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Pieņemsim, ka mušas ir pārlidojušas tā, ka visas, kas bija kaimiņos pirms pārlidošanas, ir kaimiņos arī pēc tās. Ievērojam, ka stūra rūtiņā (skat. 1. att. melnās rūtiņas) sēdošai mušai ir tieši 2 kaimiņi, malējā rūtiņā (pelēkās rūtiņas) – tieši 3 kaimiņi un vidējā rūtiņā (baltās rūtiņas) – tieši 4 kaimiņi. Skaidrs, ka katrai mušai kaimiņu skaits nemainās vai palielinās (ja tas samazinātos, tad kādu no kaimiņiem tā būtu pazaudējusi). Tātad stūra rūtiņās, kurās mušām ir tikai divi kaimiņi, var ielidot tikai mušas, kas arī pirms tam bijušas stūros. Tabulā ar izmēriem rūtiņas ir 36 malējās rūtiņas, bet tabulai ar izmēriem ir 38 malējās rūtiņas. Tā kā abās tabulās ir vienāds rūtiņu skaits, tad divas malējās rūtiņas būs jāaizņem mušām, kuras atradās sākotnējās tabulas vidējās rūtiņās, bet tad tās būtu pazaudējušas vismaz vienu kaimiņu, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

**2. atrisinājums.** Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Saskaitīsim, cik mušu pāri bija kaimiņi pirms un pēc pārlidošanas. Kaimiņu katrā tabulā ir tieši tik, cik ir iekšējo līniju, katra iekšējā līnija atdala divas kaimiņu mušas. Tātad pirms pārlidošanas kaimiņu skaits bija , bet pēc pārlidošanas tas ir
, tātad ir vismaz viens mušu pāris, kas bija kaimiņi pirms pārlidošanas, bet nav kaimiņi pēc.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. att.

**9.4.** Dots vienādsānu trijstūris , kuram un . Uz malas atlikts tāds punkts , ka
, un uz malas atlikts tāds punkts , ka . Nogriežņi un krustojas punktā . Aprēķināt trijstūra laukumu!

**1. atrisinājums.** Novelkam trijstūrī augstumu (skat. 2. att.). Tā kā ir arī mediāna, tad
, un pēc Pitagora teorēmas aprēķinām . Tad
. Tā kā trijstūriem un ir kopīgs augstums no virsotnes , tad
 un . Iegūstam, ka , kur ir no virsotnes vilktais augstums. Aprēķinām . Tātad . Tas nozīmē, ka augstums no pret ir vienāds ar augstumu no pret , no kā izriet, ka trijstūru un laukumi ir vienādi.
Tātad .



2. att.



3. att.



4. att.

**2. atrisinājums.** Novelkam trijstūrī augstumu (skat. 3. att.). Tā kā ir arī mediāna, tad
, un pēc Pitagora teorēmas aprēķinām . Tad . Novelkam , kur punkts atrodas uz (skat. 4. att.). Tad , jo . Tad jeb no kā izriet, ka . Tā kā un kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm un , tad pēc pazīmes . Tā kā kā atbilstošās malas vienādos trijstūros un trijstūriem un sakrīt augstums,
tad .

**9.5.** Rindā izvietotas 2018 monētas. Vienā gājienā drīkst paņemt vienu monētu, pārcelt to pāri tieši divām monētām un uzlikt to uz nākamās monētas. Vai 1009 gājienos visas monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē?



5. att.

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka prasītais ir iespējams. Ja ir 10 monētas vai 8 monētas, tad attiecīgi ar 5 vai 4 gājieniem tās var savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē, skat., piemēram, 6. att. un 7. att. Tā kā , tad ar gājieniem monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē.



6. att.



7. att.

**10. klase**

**10.1.** Atrast visus tādus veselu skaitļu pārus , kas apmierina nevienādību sistēmu

**Atrisinājums.** Pārveidojam sistēmas pirmo nevienādību

Skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs. Ja divu nenegatīvu veselu skaitļu summa ir mazāka nekā , tad šie skaitļi var būt tikai (0; 0), (1; 0) vai (0; 1).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 |  |  |  | neder |
| 0 | 1 |  | 8 |  | neder |
| 0 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 0 |  |  |  | neder |
| 1 | 0 |  |  |  |  |

Līdz ar to dotajai sistēmai ir divi atrisinājumi un .

**10.2.** Paralelograma malu un viduspunkti attiecīgi ir un . Aprēķināt garumu, ja , un .

**Atrisinājums.** Novelkam , un ar apzīmējam un krustpunktu (skat. 8. att.).Uz stara atliekam tādu punktu , ka , tad ir vienādmalu trijstūris, jo tas ir vienādsānu trijstūris, kura virsotnes leņķis ir , tātad abi pamata pieleņķi arī ir . Tāpēc tā mediāna ir arī augstums, tātad
. Pēc Pitagora teorēmas iegūstam, ka.

Nogrieznis ir trijstūra viduslīnija, tāpēc un .

Tā kā kā krustleņķi un kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm, tad pēc pazīmes un , no kā iegūstam un .

Pēc Pitagora teorēmas , iegūstam .



8. att.

*Piezīme*. Malas garumu var aprēķināt arī izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī :

Pamatot, ka , var arī izmantojot Pitagora teorēmas apgriezto teorēmu, tas ir, tā kā
, tad trijstūris ir taisnleņķa.

**10.3.** Skaitļus sauksim par *skaistu trijnieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:

* tie ir trīs pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
* katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists trijnieks* ir 8, 9, 10.

**a)** Atrast tādu *skaistu trijnieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

**b)** Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu trijnieku*!

**Atrisinājums.** **a)** *Skaists trijnieks* ir, piemēram, 110 (dalās ar 2), 111 (dalās ar 3), 112 (dalās ar 4).

**b)** Aplūkosim skaitļus, ko iegūst no skaitļiem 110, 111 un 112, aiz pirmā cipara ievietojot nuļļu grupu:

Iegūtie skaitļi joprojām ir secīgi. Pirmā skaitļa ciparu summa ir 2, un tas dalās ar 2. Otrā skaitļa ciparu summa ir 3, tātad tas dalās ar 3. Trešā skaitļa ciparu summa ir 4, un tas dalās ar 4, jo tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. Tā kā var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad *skaistu trijnieku* ir bezgalīgi daudz.

**10.4.** Desmit šahisti katrs ar katru izspēlēja vienu šaha partiju, dažas no tām beidzās neizšķirti. Ir zināms, ka bija tieši viens šahists, kas neizšķirti nospēlēja tieši vienu partiju, divi šahisti – kas nospēlēja divas, trīs šahisti – kas nospēlēja trīs, un četri šahisti, kas neizšķirti nospēlēja tieši četras partijas. Šos pēdējos četrus šahistus (kas katrs četras partijas nospēlēja neizšķirti) sauksim par *neizšķirtu karaļiem*, bet par *karalisku neizšķirtu* sauksim partiju, kurā neizšķirtu izcīnīja divi *neizšķirtu karaļi*. Vai var apgalvot, ka tika izspēlēts **a)** vismaz viens *karaliskais neizšķirts*, **b)** *vismaz divi karaliskie neizšķirti*?

**Atrisinājums.** Šahistus apzīmējam ar punktiem. Ja divi šahisti spēlējuši neizšķirti viens ar otru, tad atbilstošos punktus savienojam ar līniju. Tad, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, no katra punkta iziet tik līniju, cik parādīts 9. att.

**a)** No punktiem un (skat. 9. att.) kopā iziet 16 līniju gali, bet no sešiem atlikušajiem punktiem kopā iziet 14 līniju gali. Tātad nevar būt tā, ka punkti un ir savienoti tikai ar atlikušajiem sešiem punktiem un nav savienoti savā starpā. Tātad esam ieguvuši, ka no tiem šahistiem, kas neizšķirti spēlējuši tieši četras reizes, noteikti ir tādi divi, kas spēlējuši viens ar otru, tas ir, noteikti tika izspēlēts vismaz viens *karaliskais neizšķirts*.

**b)** Nē, skat., piemēram, 10. att.



9. att.



10. att.

**10.5.** Izvēlēti 12 dažādi naturāli skaitļi, neviens no tiem nepārsniedz 35. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem iespējams izvēlēties trīs atšķirīgus skaitļu pārus tā, ka visiem trīs pāriem lielākā un mazākā skaitļa starpība ir vienāda! Viens skaitlis var ietilpt arī divos pāros (vienreiz kā lielākais, otrreiz – kā mazākais).

**Atrisinājums.** Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds 12 skaitļu komplekts, kur visas starpības starp skaitļiem atkārtojas ne vairāk kā divas reizes.

Ievērojam, ka 12 skaitļi kopā veido starpības, tām iespējamas 34 dažādas vērtības: no 1 līdz 34. Ja kādu no vērtībām starpības vispār nepieņem, tad katrai no pārējām starpībām jāparādās tieši divas reizes. Tāpat redzams, ja kādas divas vērtības tiek pieņemtas tikai vienu reizi, tad visas pārējās jāpieņem tieši divas reizes. Nav iespējams, ka trīs vērtības tiek pieņemtas tikai vienu reizi, tāpat nav iespējams, ka kāda vērtība netiek pieņemta un kāda cita tiek pieņemta tikai vienu reizi.

Ievērosim, ja mēs katru no tiem (apzīmēsim ar ) aizstājam ar tad arī šis jauniegūtais skaitļu komplekts atbilst visām prasībām: visi skaitļi ir intervālā [1; 35] un to starpības ir tieši tās pašas. Šo simetrijas īpašību izmantosim, lai samazinātu aplūkojamo gadījumu skaitu.

Ievērojam, ka starpību

* 34 var iegūt tikai vienā veidā ;
* 33 var iegūt tikai 2 veidos ;
* 32 var iegūt tikai 3 veidos ;
* 31 var iegūt tikai 4 veidos .

Pieņemsim, ka šādi 12 skaitļi ir atrasti.

Starpību 34 var iegūt tikai no skaitļiem 1 un 35, starpību 33 tikai no skaitļu pāriem (2; 35) un (1; 34). Tas nozīmē, ja nav izvēlēts 1 vai 35, tad mums nav neviena starpība 34 un ir lielākais viena starpība 33, kas nav iespējams. Tātad noteikti ir izvēlēti abi skaitļi 1 un 35. Ja nav izvēlēts ne 2, ne 34, tad mums ir viena starpība 34 un neviena starpība 33, kas nav iespējams. Tātad viens no skaitļiem 2 vai 34 noteikti ir izvēlēts, augstākminētās simetrijas pēc pieņemsim, ka tas ir 2. Tālāk aplūkojam iespējamos gadījumus.

1. Skaitlis 3 ir izvēlēts (kopā ar 35; 1 un 2). Tad 34 noteikti nav izvēlēts, citādi mums būtu trīs starpības 1
(). Tad 33 noteikti ir izvēlēts, citādi mums būtu tikai viena starpība 34, viena 33 un viena 32 (ko var iegūt tikai 3 veidos ).

Ja mums ir izvēlēti skaitļi 1, 2, 3, 33, 35, tad noteikti nav izvēlēti 4 un 32, jo citādi mums būtu vairāk nekā divas starpības 1. Tas nozīmē, ka mums ir tikai viena starpība 31 (jo nav ne 2, ne 4, ne 32), kas kopā ar to, ka mums ir tikai viena starpība 33 un viena starpība 34 dod pretrunu.

2. Skaitlis 3 nav izvēlēts. Tad 34 ir izvēlēts, jo pretējā gadījumā mums būtu tikai viena starpība 32 (ja ne 3, ne 34 nav) viena 33 un viena 34. Tātad mums ir izvēlēti skaitļi 1, 2, 34, 35, kas nozīmē, ka nav ne 3, ne 33, lai nebūtu vairāk kā divas starpības 1. Tas nozīmē, ka mums jau ir tikai viena starpība 34 un tikai viena starpība 32, kas nozīmē, ka visām pārējām starpībām jābūt pieņemtām tieši divreiz. Tātad 4 un 32 noteikti ir izvēlēti, lai varētu iegūt divas starpības 31. No tā, ka mums ir izvēlēti 1, 2, 4, 32, 34, 35 (un nav 3 un 33) seko, ka mums noteikti nav izvēlēti 5, 6, 30 un 31, lai nebūtu par daudz starpību 1 vai 2. Bet tas savukārt nozīmē, ka mums nav nevienas starpības 29 (ko var iegūt tikai 6 veidos: kā ), kas kopā ar to, ka mums ir tikai viena starpība 34 dod pretrunu.

**11. klase**

**11.1.** Atrisināt nevienādību .

**1. atrisinājums.** Tā kā moduļa vērtība ir mazāka nekā 5, tad

 jeb .

Iespējami divi gadījumi:

1. jeb un atkal iespējami divi gadījumi
	1. jeb ;
	2. jeb ;
2. jeb un tā kā modulis ir nenegatīvs, tad jeb .

**2. atrisinājums.** Doto nevienādību var atrisināt, pakāpeniski veidojot funkciju , ,
, , grafikus, ievērojot, ka funkcijas

* , kur , grafiku iegūst, funkcijas grafiku pārbīdot paralēli asij par vienībām uz leju;
* grafiku iegūst, nemainot to grafika daļu, kur , un to grafika daļu, kur , attēlojot simetriski attiecībā pret asi.

Rezultātā iegūst 11. att. doto grafiku. Atbildi nolasa no grafika, atrodot krustpunktus ar taisni un izvēloties tos intervālus, kur grafiks atrodas zem taisnes . Līdz ar to .



11. att.

**11.2.** Vienādsānu trijstūrī no pamata viduspunkta novilkts perpendikuls pret sānu malu , punkts ir nogriežņa viduspunkts. Pierādīt, ka !



12. att.

**Atrisinājums.** Vienādsānu trijstūrī mediāna, kas vilkta no virsotnes, ir arī augstums un bisektrise. Tāpēc un , no kā izriet, ka pēc pazīmes (skat. 12. att.). Trijstūrī novelkam mediānu . No sakarībām līdzīgos trijstūros ( un ir atbilstošās mediānas) secinām, ka
 un . Tā kā , tad pēc pazīmes . Tātad . Bet , jo ir viduslīnija. Tāpēc .

**11.3.** Skaitļus sauksim par *skaistu piecinieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:

* tie ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
* katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists piecinieks* ir 6, 7, 8, 9, 10.

**a)** Atrast tādu *skaistu piecinieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

**b)** Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu piecinieku*!

**Atrisinājums.** **a)** *Skaists piecinieks* ir, piemēram,

* 27027024 – ciparu summa ir 24; tā kā šis skaitlis dalās ar 3 (jo ciparu summa dalās ar 3) un 8 (jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8), tad tas dalās ar 24;
* 27027025 – ciparu summa ir 25; tā kā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 25, tad arī pats skaitlis dalās ar 25;
* 27027026 – ciparu summa ir 26 un ;
* 27027027 – ciparu summa ir 27 un ;
* 27027028 – ciparu summa ir 28 un .

**b)** Aplūkosim skaitļus, ko iegūst no skaitļiem 27027024, 27027025, 27027026, 27027027 un 27027028, pirms pēdējiem diviem cipariem ievietojot nuļļu grupu:

Iegūtie skaitļi joprojām ir secīgi un tā kā tika pievienotas tikai nulles, tad ciparu summa nemainās, tas ir, ciparu summas attiecīgi ir 24, 25, 26, 27 un 28. Katru no šiem skaitļiem var uzrakstīt formā , kur
. Pamatosim, ka šie skaitļi dalās ar savu ciparu summu. Ievērojam, ka
 un ka pirmais saskaitāmais dalās ar visām iespējamām vērtībām, tas ir, ar 24, 25, 26, 27 un 28. Tā kā abi saskaitāmie dalās ar , tad arī pats skaitlis dalās ar .

Tā kā var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad *skaistu piecinieku* ir bezgalīgi daudz.

**11.4.** Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos

**Atrisinājums.** Dotās sistēmas atrisinājumi ir un . Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgo rotāciju, tad nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka un . Funkcija ir stingri augoša visā savā definīcijas apgabalā, kā divu augošu funkciju summa ( un ), tātad, ja , tad no sistēmas pirmā un otrā vienādojuma iegūst, ka
 jeb , no kā izriet, ka . Savukārt no tieši tādā pašā veidā, izmantojot sistēmas otro un trešo vienādojumu, iegūst, ka . Tātad , no kā seko, ka . Ievietojot šo sistēmas pirmajā vienādojumā, iegūst jeb , tātad Pārbaude apstiprina, ka un patiešām der kā šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

**11.5.** Trīs 500 litru mucās atrodas attiecīgi 100, 107 un 113 litri ūdens. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā ) tik daudz ūdens, cik mucā jau atrodas. Vai, veicot šādus gājienus, iespējams iztukšot **a)** vienu mucu, **b)** divas mucas?

**Atrisinājums. a)** Vienu mucu ir iespējams iztukšot, skat., piemēram, tālāk dotajā tabulā

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**b)** Pamatosim, ka divas mucas nav iespējams iztukšot. Ievērojam, ka kopējais ūdens daudzums ir 320 litru, tātad pēdējā gājiena rezultātam (ar precizitāti līdz mucu sakārtojumam), jābūt (320; 0; 0), tātad beigās katrā mucā esošajam ūdens daudzums būtu jādalās ar 5.

Aplūkosim patvaļīgu soli, pēc kura ūdens daudzums visās mucās dalās ar 5, simetrijas pēc pieņemsim, ka šajā solī no pirmās mucas ūdens tika pārliets otrajā, tātad tas bija un visi trīs
skaitļi , un dalās ar 5. No tā, ka dalās ar 5, izriet, ka dalās ar 5 (jo 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi) un no tā, ka dalās ar 5 un dalās ar 5, izriet, ka dalās ar 5. Tātad gan , gan , gan dalās ar 5, tātad, ja pēc kāda soļa visās mucās ūdens daudzums dalās ar 5, tad arī pirms šī soļa tas ir dalījies ar 5. Tā kā sākotnējais ūdens daudzums ne visās mucās dalās ar 5, tad skaidrs, ka no tā nav iespējams iegūt situāciju, kad visās mucās ūdens daudzums dalās ar 5.

**12. klase**

**12.1.** Apzīmēsim un . Aprēķināt izteiksmes
 vērtību!

**Atrisinājums.** Izmantojot logaritmu īpašību , iegūstam, ka , tāpēc (šeit un ). Līdz ar to

**12.2.** Uz trijstūra malas atlikti punkti un tā, ka , uz malas – punkti un tā, ka , uz malas – punkts tā, ka . Nogrieznis krusto nogriežņus un attiecīgi punktos un Pierādīt, ka .

**Atrisinājums.** Nogriežņi un ir trijstūra mediānas (skat. 13. att.). Mediānas krustojoties tiek sadalītas attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes, tāpēc .

Novelkam , tas krusto punktā un punktā . Ievērojam, ka ir trijstūra mediāna (jo iet caur mediānu krustpunktu). Tā kā trijstūri un ir līdzīgi pēc pazīmes , tad un
, tātad . Tā kā trijstūri un ir līdzīgi pēc pazīmes , tātad , no kā varam secināt, ka , tātad ir trijstūra mediāna. Tā kā trijstūri un ir līdzīgi pēc pazīmes , tad un tātad . Pēc Talesa teorēmas secinām, ka

Tā kā un , tad .



13. att.

**12.3.** Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu .

**Atrisinājums.** Der skaitļu pāri un Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Apzīmējam , tad .

Ja , tad , tātad arī , redzams, ka (kas ir naturāla skaitļa kvadrāts) atrodas starp divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu kvadrātiem – pretruna.

Ja , tad , tātad arī un, tieši tāpat kā iepriekš, iegūstam pretrunu, ka atrodas starp diviem pēc kārtas esošu skaitļu kvadrātiem.

Tātad . Tā kā , tad vai .

Ja , tad , no kā izriet, ka . Ja , tad , un iegūstam, ka , kam atrisinājuma nav. Tātad dotajam vienādojumam ir tikai divi atrisinājumi un

**12.4.** Taisnstūris, kura izmēri ir rūtiņas, griežot par rūtiņu līnijām, sagriezts rūtiņas lielos taisnstūros. Pierādīt, ka vai dalās ar 6.

**Atrisinājums.** Sākotnējo rūtiņu laukumu šaha veidā izkrāsosim rūtiņas lielos melnos un baltos kvadrātos (skat. 14. att.).



14. att.



15. att.

Katrs rūtiņu taisnstūris, neatkarīgi no novietojuma laukumā, satur tieši trīs melnas un trīs baltas rūtiņas. Tātad visi šādi taisnstūri kopā satur vienādu skaitu melno un balto rūtiņu.

Pamatosim, ja ne , ne nedalās ar 6, tad taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds, tas ir, šādu taisnstūri nevar sagriezt taisnstūros rūtiņas. Sadalām taisnstūri slejās, kuru platums ir 6 rūtiņas
(skat. 15. att.), tajās melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Labajā pusē noteikti atliek sleja, kuras platums ir mazāks nekā 6 rūtiņas. Šo sleju sadalām joslās, kuru augstums ir 6 rūtiņas, tajās melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Labā apakšējā stūrī paliek taisnstūris, kura augstums ir mazāks nekā 6 rūtiņas. Līdz ar to nesadalīts paliek taisnstūris , kura malu garumi var būt no 1 līdz 5 rūtiņām. Tā kā taisnstūris ir sagriezts taisnstūros , tad dalās ar 6 un iespējami divi gadījumi vai . Nevienā no šiem abiem taisnstūriem melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds (skat. 16. att.). Tātad sākotnējā taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds un to nevar sadalīt taisnstūros rūtiņas.



16. att.

**12.5.** Trīs mucās attiecīgi ir un litri ūdens, kur ir naturāli skaitļi. Katras mucas tilpums ir lielāks nekā
 litri. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā ) tik daudz ūdens, cik mucā jau atrodas. Pierādīt, ka, veicot šādus gājienus, vienmēr iespējams iztukšot vienu no mucām!

**Atrisinājums.** Apskatām mucu, kurā ir vismazāk ūdens. Parādīsim, kā kādā no pārējām mucām iegūt mazāk ūdens nekā šajā mucā. Tad skaidrs, ka, atkārtojot šo procesu, agrāk vai vēlāk kāda no mucām būs tukša.

Apzīmējam mucas ar (sākumā tajā ir litri), ( litri) un ( litri) un, nezaudējot vispārīgumu, pieņemam, ka . Aplūkojam mucas un .

Izsakām , kur , bet izsakām binārā formā:

kur ir vai nu 0, vai 1 visiem .

Veiksim pārliešanas uz mucu , izdarot gājienu (gājienus numurēsim no 0 līdz ):

* ja , tad -tajā gājienā pārlejam ūdeni no mucas mucā
* ja , tad -tajā gājienā pārlejam ūdeni no mucas mucā

Katrā gājienā ūdens daudzums mucā dubultojas un -tajā gājienā mucā tiek ielieti litri ūdens. Tā kā katram naturālam izpildās nevienādība , tad mucā pietiks ūdens, lai veiktu kārtējo gājienu neatkarīgi no tā, cik reizes veikta liešana no uz .

Pat, ja no uz būs jāveic tikai viena – pēdējā liešana, no pārlietais ūdens daudzums nepārsniedz , tātad mucā pietiks ūdens, lai veiktu nepieciešamos gājienus.

Ar aprakstītajiem gājieniem tiks panākts, ka mucā paliek litri ūdens, bet, tā kā , tad tagad mucā ir mazāk ūdens nekā sākotnēji bija mucā (tas ir, tagad mucā ir vismazākais ūdens daudzums). Atkārtojot līdzīgas gājienu virknes, panāksim, ka kādā no mucām ūdens vairs nebūs.