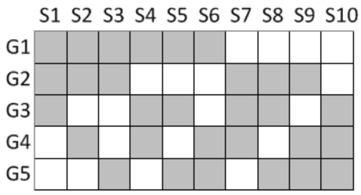
Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 3. posma 2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Funkcijai $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, kas definēta veseliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības, izpildās šādas īpašības:
   a) $f(0) \neq 0$,
   b) $f(-1) = -1$
   c) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ visiem veseliem skaitļiem x un y.
   Aprēķināt $f(27)$ un $f(2017)$.
   Atrisinājums. Izvēloties $x = y = 0$, no c) iegūstam $f^2(0) = 2f(0)$, tad, izmantojot a), iegūstam $f(0) = 2$.
   Izvēloties $x = 0$ un $y = 1$, iegūstam
   $$f(0)f(1) = f(1) + f(-1);$$
   $$f(1) = f(-1);$$
   $$f(1) = -1.$$
   Tālāk izmantosim sakarības, kas ļauj no zināmām $f(x-1)$ un $f(x)$ vērtībām aprēķināt $f(x+1)$ vērtību:
   $$f(x)f(1) = f(x+1) + f(x-1);$$
   $$f(x+1) = -f(x) - f(x-1) = -(f(x-1) + f(x))$$
   Tātad
   $$f(2) = -\big(f(0) + f(1)\big) = -(2-1) = -1;$$
   $$f(3) = -\big(f(1) + f(2)\big) = -(-1-1) = 2;$$
   $$f(4) = -\big(f(2) + f(3)\big) = -(-1+2) = -1;$$
   $$f(5) = -\big(f(3) + f(4)\big) - (2-1) = -1.$$
   Tas nozīmē, ka vērtības „$2, -1, -1$", augot argumenta vērtībai, cikliski atkārtojas: $f(3n) = 2$, bet $f(3n+1) = f(3n+2) = -1$ visām veselām n vērtībām.
   Līdz ar to $f(27) = f(3 \cdot 9) = 2$ un $f(2017) = f(3 \cdot 672 + 1) = -1$.
2. Doti divi nesakrītoši regulāri n-stūri $PA_1A_2 \dots A_{n-1}$ un $PB_1B_2 \dots B_{n-1}$ (virsotnes dotas pulksteņrādītāja virzienā). Pierādīt, ka taisnes $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$ krustojas vienā punktā!
   Atrisinājums. Ja kādi punkti P, A_i un B_i atrodas uz vienas taisnes, tad dotie n-stūri ir homotētiski ar centru punktā P. Šī homotētija attēlo A_i pret B_i, tāpēc taisne A_iB_i iet caur punktu P.
   Varam pieņemt, ka nekādi trīs punkti P, A_i un B_i neatrodas uz vienas taisnes. Aplūkojam divus trijstūrus ΔA_iPB_i un ΔA_jPB_j, kur $i > j$. Tie ir līdzīgi pēc pazīmes $m\ell m$, jo
   - $\sphericalangle A_iPB_i = \sphericalangle A_jPB_j$, jo leņķis starp taisnēmPA_i un PA_j ir vienāds ar leņķi starp taisnēm PB_i un PB_j;
   - $\frac{A_iP}{B_iP} = \frac{A_jP}{B_jP}$, jo dotie n-stūri ir līdzīgi.

   Taisnes A_iB_i un A_jB_j nav paralēlas, jo citādi punkti P, A_i un $B_i$atrastos uz vienas taisnes. Apzīmējam šo divu taišņu krustpunktu ar Q. No ΔA_iPB_i un ΔA_jPB_j līdzības izriet, ka $\sphericalangle PA_iB_i = \sphericalangle PA_jB_j$. To var ekvivalenti pārrakstīt kā $\sphericalangle PA_iQ = \sphericalangle PA_jQ$. Tas nozīmē, ka punkti P, A_i, A_j un Q atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tātad Q pieder daudzstūra $PA_1A_2 \dots A_{n-1}$ apvilktajai riņķa līnijai. Līdzīgi pierāda, ka Q pieder arī daudzstūra $PB_1B_2 \dots B_{n-1}$ apvilktajai riņķa līnijai. Secinām, ka visas taisnes A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$ krustojas doto daudzstūru apvilkto riņķa līniju krustpunktā, kas ir atšķirīgs no P.
3. Atrast visus tādus pirmskaitļu pārus $(a; b)$, ka $a^b b^a + 1$ arī ir pirmskaitlis!
   Atrisinājums. Šādi pāri ir tikai $(2;\ 2), (2;\ 3), (3;\ 2)$.
   Pamatosim, ka citu pāru nav. Apzīmēsim $n = a^b b^a + 1$. Ja gan a, gan b ir nepāra pirmskaitļi, tad n ir pāra skaitlis, turklāt lielāks nekā 2, tātad tas nevar būt pirmskaitlis. Līdz ar to vismaz viens no skaitļiem a un b ir pāra pirmskaitlis, simetrijas dēļ var pieņemt, ka $a = 2$. Tad $a = 2, b = 2$ ir atrisinājums ($n = 17$), arī $a = 2, b = 3$ ir atrisinājums ($n = 73$). Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.
   Pieņemsim, ka b ir pirmskaitlis, kas lielāks nekā 3, un pierādīsim, ka tādā gadījumā n dalās ar 3. Tas izriet no tā, ka $b^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$ un $2^b = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot \left(4^k\right) \equiv 2\ (mod\ 3)$, tātad $n = 2^b b^2 + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 0\ (mod\ 3)$.

4. Katrs no 10 skolēniem nopirka tieši 3 grāmatas. Zināms, ka jebkuriem diviem skolēniem ir vismaz viena grāmata, ko nopirkuši viņi abi. Noteikt mazāko iespējamo skolēnu skaitu, kuri visi nopirkuši vispopulārāko grāmatu! (Vispopulārākā ir tā grāmata, kuru nopirkuši visvairāk skolēnu.)

Atrisinājums. Mazākais skolēnu skaits ir 5, grāmatas tie varēja pirkt, piemēram, tā, kā parādīts 1. att.



1. att.

Vēl jāpierāda, ka skolēnu skaits nevar būt mazāks kā 5.

Ar L apzīmējam skolēnu skaitu, kas visi nopirkuši vienu un to pašu vispopulārāko grāmatu. Tad $L > 3$: pierādījums no pretējā, pieņemsim, ka ir ne vairāk kā 3 skolēni, kas nopirkuši vispopulārāko grāmatu. Ar A apzīmējam vienu no šiem skolēniem. Skolēnam A ir vēl divas grāmatas, katru no tām ir nopirkuši ne vairāk kā vēl divi citi skolēni (pretējā gadījumā kādu grāmatu būtu nopirkuši vismaz 4 skolēni, kas ir pretrunā pieņēmumam $L \leq 4$). Līdz ar to ir ne vairāk kā $3 \cdot 2 = 6$ “citu” skolēnu un kopējais skolēnu skaits ir ne lielāks kā $3 + 6 < 10$ – pretruna.

Atliek pierādīt, ka L nevar būt 4. Vispirms parādīsim, ka tad, ja $L = 4$, katru grāmatu būtu nopirkuši tieši 4 skolēni. Pieņemsim pretējo, ka ir tāda grāmata G, kuru nopirkuši ne vairāk kā 3 skolēni; pieņemsim, ka viens no tiem ir S. Tad grāmata G skolēnam S ir kopīga ar vēl ne vairāk kā 2 skolēniem; tātad pārējās divas skolēna S grāmatas ir kopīgas ar vismaz 7 skolēniem. Taču tad vismaz vienu S grāmatu ir nopirkuši vēl vismaz 4 skolēni, tas ir, $L \geq 5$ – pretruna.

Tātad, ja būtu $L = 4$, katru grāmatu būtu nopirkuši tieši četri skolēni. Apskatīsim, cik kopā grāmatas ir pārdotas. No vienas puses, dots, ka 10 skolēni nopirka katrs tieši 3 grāmatas, tātad kopā pārdotas 30 grāmatas. No otras puses, katru grāmatu nopirkuši tieši četri skolēni, tātad pārdoto grāmatu skaits dalās ar 4 – pretruna. Tātad arī L nevar būt 4.

5. Pierādīt, ka $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{117} + \frac{1}{119} > 2$.

Atrisinājums. Izmantojam sakarību $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{4n}{4n^2-1} > \frac{1}{n}$ un iegūstam

- $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} > \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{61} + \frac{1}{63} > \frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{65} + \frac{1}{67} + \cdots + \frac{1}{125} + \frac{1}{127} > \frac{1}{3}$.

Šādi var pierādīt, ka

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{117} + \frac{1}{119} + \frac{1}{121} + \frac{1}{123} + \frac{1}{125} + \frac{1}{127} > 2,$$

bet uzdevumā dotajā kreisajā pusē ir par četriem saskaitāmajiem mazāk.

Tātad izmantotie novērtējumi ir par „rupju” un nepieciešams izmantot precīzākas nevienādības.

Novērtējot kāda rindas fragmenta summu, piecas reizes tika izmantota nevienādība $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{3}$. Šīs nevienādības vietā izmantosim vienādību: $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{105}$

Tad, pēc būtības nemainot iepriekšējos spriedumus, var pierādīt, ka

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{117} + \frac{1}{119} + \frac{1}{121} + \frac{1}{123} + \frac{1}{125} + \frac{1}{127} > 2 + \frac{5}{105} = 2\frac{1}{21}.$$

Atņemot no abām nevienādības pusēm vienādus skaitļus, iegūstam:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{117} + \frac{1}{119} > 2 + \frac{1}{21} - \left(\frac{1}{121} + \frac{1}{123} + \frac{1}{125} + \frac{1}{127}\right).$$

Atņemot no abām nevienādības pusēm vienādus skaitļus, iegūstam

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{117}+\frac{1}{119}>2+\frac{1}{21}-\left(\frac{1}{121}+\frac{1}{123}+\frac{1}{125}+\frac{1}{127}\right)= \\
&=2+\frac{4}{84}-\left(\frac{1}{121}+\frac{1}{123}+\frac{1}{125}+\frac{1}{127}\right)= \\
&=2+\left(\frac{1}{84}-\frac{1}{121}\right)+\left(\frac{1}{84}-\frac{1}{123}\right)+\left(\frac{1}{84}-\frac{1}{125}\right)+\left(\frac{1}{84}-\frac{1}{127}\right)>2,
\end{aligned}
$$

līdz ar to sākotnējā nevienādība ir pierādīta.