**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**9. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{2}$ ir naturāla skaitļa kubs.
Pierādīt, ka arī $x^{2}y$ ir naturāla skaitļa kubs!

**2.** Trijstūrī $ABC$ novilkta mediāna $AF$, punkts $D$ ir tās viduspunkts. Taisne $CD$ krusto malu $AB$ punktā $E$. Pierādīt: ja $BD=BF$, tad $AE=DE$!

**3.** Vai tabulā, kuras izmēri ir $4×4$ rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus
no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

**4.** Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

**5.** Naturālu skaitļu virkni $(s\_{i})$ pēc parauga „2016” veido šādi:

* virknes pirmais loceklis $s\_{1}$ ir 2;
* virknes otrais loceklis $s\_{2}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{1}$ un tā pierakstā ir cipars 0;
* virknes trešais loceklis $s\_{3}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{2}$ un tā pierakstā ir cipars 1;
* virknes ceturtais loceklis $s\_{4}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{3}$ un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**9. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{2}$ ir naturāla skaitļa kubs.
Pierādīt, ka arī $x^{2}y$ ir naturāla skaitļa kubs!

**2.** Trijstūrī $ABC$ novilkta mediāna $AF$, punkts $D$ ir tās viduspunkts. Taisne $CD$ krusto malu $AB$ punktā $E$. Pierādīt: ja $BD=BF$, tad $AE=DE$!

**3.** Vai tabulā, kuras izmēri ir $4×4$ rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus
no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

**4.** Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

**5.** Naturālu skaitļu virkni $(s\_{i})$ pēc parauga „2016” veido šādi:

* virknes pirmais loceklis $s\_{1}$ ir 2;
* virknes otrais loceklis $s\_{2}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{1}$ un tā pierakstā ir cipars 0;
* virknes trešais loceklis $s\_{3}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{2}$ un tā pierakstā ir cipars 1;
* virknes ceturtais loceklis $s\_{4}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{3}$ un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**10. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{10}$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{10}y$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

**2.** Trijstūra $ABC$ leņķu $∢CAB$ un $∢BCA$ bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos $P$ un $Q$, bet pašas krustojas punktā $I$. Pierādīt, ka $PQ⊥BI$!

**3.** Doti tādi reāli skaitļi $x, y$ un $z$, ka $x+y+z=3$.

Pierādīt, ka $xy+xz+yz\leq 3$.

**4.** Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā
**a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?

*Piezīme.* Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

**5.** Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa,
**b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**10. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{10}$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{10}y$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

**2.** Trijstūra $ABC$ leņķu $∢CAB$ un $∢BCA$ bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos $P$ un $Q$, bet pašas krustojas punktā $I$. Pierādīt, ka $PQ⊥BI$!

**3.** Doti tādi reāli skaitļi $x, y$ un $z$, ka $x+y+z=3$.

Pierādīt, ka $xy+xz+yz\leq 3$.

**4.** Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā
**a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?

*Piezīme.* Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

**5.** Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa,
**b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**11. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y $ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{433}$ ir naturāla skaitļa
2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{433}y$ ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

**2.** Šaurleņķu trijstūrim $ABC$ ($AB>AC$) apvilktās riņķa līnijas centrs ir $O$ un punkts $D$ ir malas $BC$ viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru $AD$ krusto malas $AB$ un $AC$ attiecīgi punktos $E$ un $F$. Uz nogriežņa $EF$ atlikts punkts $M$ tā, ka $DM||AO$. Pierādīt, ka trijstūri $ABD$ un $FDM$ ir līdzīgi!

**3.** Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim $n$ ($n>1$) var atrast tādus naturālus skaitļus $x$ un $y$ ($x\leq y$), ka

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x\left(x+1\right)}+\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}+…+\frac{1}{y\left(y+1\right)}$$

**4.** Naturālu skaitļu virkni $(s\_{i})$ pēc parauga „2016” veido šādi:

$s\_{1}=2$;

$s\_{2}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{1}$ un tā pierakstā ir cipars 0;

$s\_{3}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{2}$ un tā pierakstā ir cipars 1;

$s\_{4}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{3}$ un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

**5.** Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**11. klase**

**1.** Zināms, ka $x$ un $y $ ir tādi naturāli skaitļi, ka $xy^{433}$ ir naturāla skaitļa
2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{433}y$ ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

**2.** Šaurleņķu trijstūrim $ABC$ ($AB>AC$) apvilktās riņķa līnijas centrs ir $O$ un punkts $D$ ir malas $BC$ viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru $AD$ krusto malas $AB$ un $AC$ attiecīgi punktos $E$ un $F$. Uz nogriežņa $EF$ atlikts punkts $M$ tā, ka $DM||AO$. Pierādīt, ka trijstūri $ABD$ un $FDM$ ir līdzīgi!

**3.** Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim $n$ ($n>1$) var atrast tādus naturālus skaitļus $x$ un $y$ ($x\leq y$), ka

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x\left(x+1\right)}+\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}+…+\frac{1}{y\left(y+1\right)}$$

**4.** Naturālu skaitļu virkni $(s\_{i})$ pēc parauga „2016” veido šādi:

$s\_{1}=2$;

$s\_{2}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{1}$ un tā pierakstā ir cipars 0;

$s\_{3}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{2}$ un tā pierakstā ir cipars 1;

$s\_{4}$ – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā $s\_{3}$ un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

**5.** Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**12. klase**

**1.** Zināms, ka $x$, $y$ un $z$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $x^{3}y^{5}z^{6}$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{5}y^{6}z^{3}$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

**2.** Trijstūrī $ABC$ ievilktās riņķa līnijas $ω$ centrs ir $I$. Uz malām $AB$ un $BC$ izvēlēti attiecīgi punkti $P$ un $Q$ tā, ka $PI=QI$ un $PB>QB$. Nogrieznis $QI$ krusto $ω$ punktā $T$. Taisne, kas pieskaras $ω$ punktā $T$, krusto malas $AB$ un $BC$ attiecīgi punktos $U$ un $V$. Pierādīt, ka $PU=UV+VQ$!

**3.** Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

**4.** Divas funkcijas tiek definētas šādi: $f(a)=a^{2}+3a+2$ un
$g(b;c)=b^{2}-b+3c^{2}+3c$. Pierādīt, ka jebkurai naturālai $a$ vērtībai iespējams atrast tādas naturālas $b$ un $c$ vērtības, ka $f(a)=g(b;c)$.

**5.** Aplūko visus tos funkciju $y=x^{2}+px+q$ grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**12. klase**

**1.** Zināms, ka $x$, $y$ un $z$ ir tādi naturāli skaitļi, ka $x^{3}y^{5}z^{6}$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{5}y^{6}z^{3}$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

**2.** Trijstūrī $ABC$ ievilktās riņķa līnijas $ω$ centrs ir $I$. Uz malām $AB$ un $BC$ izvēlēti attiecīgi punkti $P$ un $Q$ tā, ka $PI=QI$ un $PB>QB$. Nogrieznis $QI$ krusto $ω$ punktā $T$. Taisne, kas pieskaras $ω$ punktā $T$, krusto malas $AB$ un $BC$ attiecīgi punktos $U$ un $V$. Pierādīt, ka $PU=UV+VQ$!

**3.** Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

**4.** Divas funkcijas tiek definētas šādi: $f(a)=a^{2}+3a+2$ un
$g(b;c)=b^{2}-b+3c^{2}+3c$. Pierādīt, ka jebkurai naturālai $a$ vērtībai iespējams atrast tādas naturālas $b$ un $c$ vērtības, ka $f(a)=g(b;c)$.

**5.** Aplūko visus tos funkciju $y=x^{2}+px+q$ grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!