**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**9. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa kubs.   
Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa kubs!

**2.** Trijstūrī novilkta mediāna , punkts ir tās viduspunkts. Taisne krusto malu punktā . Pierādīt: ja , tad !

**3.** Vai tabulā, kuras izmēri ir rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus   
no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

**4.** Atrast skaitļa mazāko pirmreizinātāju!

**5.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi:

* virknes pirmais loceklis ir 2;
* virknes otrais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0;
* virknes trešais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1;
* virknes ceturtais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**9. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa kubs.   
Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa kubs!

**2.** Trijstūrī novilkta mediāna , punkts ir tās viduspunkts. Taisne krusto malu punktā . Pierādīt: ja , tad !

**3.** Vai tabulā, kuras izmēri ir rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus   
no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

**4.** Atrast skaitļa mazāko pirmreizinātāju!

**5.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi:

* virknes pirmais loceklis ir 2;
* virknes otrais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0;
* virknes trešais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1;
* virknes ceturtais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**10. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

**2.** Trijstūra leņķu un bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos un , bet pašas krustojas punktā . Pierādīt, ka !

**3.** Doti tādi reāli skaitļi un , ka .

Pierādīt, ka .

**4.** Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā   
**a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?

*Piezīme.* Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

**5.** Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa,   
**b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**10. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

**2.** Trijstūra leņķu un bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos un , bet pašas krustojas punktā . Pierādīt, ka !

**3.** Doti tādi reāli skaitļi un , ka .

Pierādīt, ka .

**4.** Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā   
**a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?

*Piezīme.* Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

**5.** Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa,   
**b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**11. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa   
2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

**2.** Šaurleņķu trijstūrim () apvilktās riņķa līnijas centrs ir un punkts ir malas viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru krusto malas un attiecīgi punktos un . Uz nogriežņa atlikts punkts tā, ka . Pierādīt, ka trijstūri un ir līdzīgi!

**3.** Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim () var atrast tādus naturālus skaitļus un (), ka

**4.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi:

;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

**5.** Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**11. klase**

**1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa   
2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

**2.** Šaurleņķu trijstūrim () apvilktās riņķa līnijas centrs ir un punkts ir malas viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru krusto malas un attiecīgi punktos un . Uz nogriežņa atlikts punkts tā, ka . Pierādīt, ka trijstūri un ir līdzīgi!

**3.** Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim () var atrast tādus naturālus skaitļus un (), ka

**4.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi:

;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1;

– mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

**5.** Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**12. klase**

**1.** Zināms, ka , un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

**2.** Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs ir . Uz malām un izvēlēti attiecīgi punkti un tā, ka un . Nogrieznis krusto punktā . Taisne, kas pieskaras punktā , krusto malas un attiecīgi punktos un . Pierādīt, ka !

**3.** Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

**4.** Divas funkcijas tiek definētas šādi: un   
. Pierādīt, ka jebkurai naturālai vērtībai iespējams atrast tādas naturālas un vērtības, ka .

**5.** Aplūko visus tos funkciju grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!

**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi**

**12. klase**

**1.** Zināms, ka , un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

**2.** Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs ir . Uz malām un izvēlēti attiecīgi punkti un tā, ka un . Nogrieznis krusto punktā . Taisne, kas pieskaras punktā , krusto malas un attiecīgi punktos un . Pierādīt, ka !

**3.** Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

**4.** Divas funkcijas tiek definētas šādi: un   
. Pierādīt, ka jebkurai naturālai vērtībai iespējams atrast tādas naturālas un vērtības, ka .

**5.** Aplūko visus tos funkciju grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!