1. Atrast visas funkcijas f, kas definētas reālo skaitļu kopā, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem skaitļiem x, y apmierina vienādību

$$f\big(x - f(x-y)\big) = f(x+y) - x.$$

Atrisinājums

Ievietojot $y = -y$, iegūstam

$$f(x - f(x+y)) = f(x-y) - x$$
$$-f(x - f(x+y)) = x - f(x-y)$$
$$f(-f(x - f(x+y))) = f(x - f(x-y)) = f(x+y) - x$$

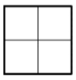
Ievietojot $y = C - f(0)$, $x = f(0) - C$, iegūstam $f\big(f(0) - C - f(2f(0) - 2C)\big) = C$. Līdz ar to funkcija f ir sirjektīva. Tā kā funkcija ir sirjektīva, tad katram x var atrast tādu y, ka $f(x+y) = 0$, ievietojot šo y pēdējā vienādībā, iegūstam

$$f(-f(x)) = -x$$

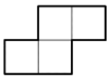
Dotajā vienādībā ievietojot $x = 0$ un $y = -x$, iegūstam $f\big(-f(x)\big) = f(-x)$.

No pēdējām divām vienādībām secinām, ka $f(x) = x$ visiem reāliem x.

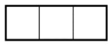
2. Kvadrātu, kura izmēri ir 9×9 rūtiņas, sagrieza tā, ka katra no iegūtajām daļām bija vai nu 1. att., vai 2. att., vai 3. att. redzamā figūra. Kāds ir mazākais skaits 3. att. redzamo figūru, ko varēja iegūt?



1. att.



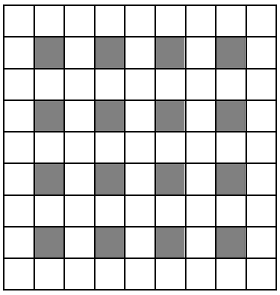
2. att.



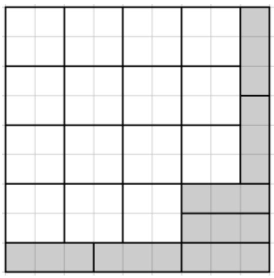
3. att.

Atrisinājums

Nokrāsojam rūtiņas tā, kā parādīts 4. att. Tā kā pavisam ir 16 nokrāsotas rūtiņas un gan 1. att., gan 2. att. redzamā figūra pārklāj tieši vienu nokrāsoto rūtiņu, tad kopā šīs figūras neaizņem vairāk kā $16 \cdot 4 = 64$ rūtiņas. Tas nozīmē, ka pārējās $81 - 64 = 17$ rūtiņas jāpārklāj ar 3. att. dotajām figūrām. Tātad nebūs mazāk kā 6 šādas figūras, bet tā kā atlikušo rūtiņu skaitam $81 - x \cdot 3$ ir jādalās ar 4, tad šādām figūrām jābūt vismaz 7. Skat. 5. att., kurā redzams, ka 7 šādas figūras varēja iegūt.



4. att.



5. att.

3. Atrast visus tādus pirmskaitļus p, ka $3^{p^2-1} + 20$ arī ir pirmskaitlis!

Atrisinājums

Ja $p = 2$, tad skaitlis $3^3 + 20 = 47$ ir pirmskaitlis. Ja $p = 3$, tad skaitlis $3^8 + 20 = 6581$ arī ir pirmskaitlis (noteikt, vai šis skaitlis ir pirmskaitlis, var pārbaudot dalāmību ar visiem pirmskaitļiem līdz $\sqrt{6581} < 82$).

Pieņemsim, ka $p \geq 5$. Tad $p = 3k \pm 1$ un $p^2 - 1 = 9k^2 \pm 6k$ dalās ar 3.

Turklāt p ir nepāra, tātad $p^2 - 1$ ir pāra. Secinām, ka $p^2 - 1 = 6m$ kādam naturālam m.

Taču $3^6 \equiv 729 \equiv 1 \pmod 7$, līdz ar to

$$3^{p^2-1} + 20 \equiv 3^{6m} + 20 \equiv (3^6)^m + 6 \equiv 1^m + 6 \equiv 0 \pmod 7$$

un $3^{p^2-1} + 20$ dalās ar 7, tātad nevar būt pirmskaitlis (jo acīmredzami $3^{p^2-1} + 20 > 7$). Secinām, ka vienīgās derīgās p vērtības ir $p = 2$ un $p = 3$.

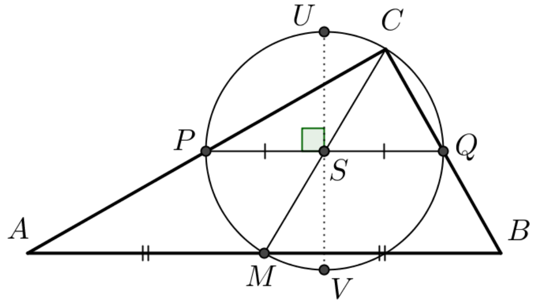
4. Trijstūrī ABC novilkta mediāna CM. Riņķa līnija ar diametru CM krusto nogriežņus AC un BC attiecīgi punktos P un Q. Zināms, ka $AB||PQ$ un $\sphericalangle CAB = \alpha$. Kādas ir $\sphericalangle ACB$ iespējamās vērtības?

Atrisinājums

Ar S apzīmējam CM un PQ krustpunktu (skat. 6. att.). Tā kā $\Delta PCS \sim \Delta ACM$ un $\Delta SCQ \sim \Delta MCB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, tad $\frac{PS}{AM} = \frac{CS}{CM} = \frac{SQ}{MB}$, tāpēc $PS = SQ$.

Riņķa līniju, kuras diametrs ir CM, apzīmējam ar ω. Nogriežņa PQ vidusperpendikula krustpunktus ar ω apzīmējam ar U un V. Tad UV ir diametrs. Šķirojam divus gadījumus.

1. Ja UV sakrīt ar CM, tad $PQ \perp CM$, un līdz ar to $AB \perp CM$. Šajā gadījumā CM ir gan mediāna, gan augstums, tāpēc ΔABC ir vienādsānu ($AC = BC$) un $\sphericalangle ACB = 180° - 2\alpha$.
2. Ja UV un CM ir divi dažādi ω diametri, tad S ir ω centrs. Tā kā PQ satur S, tad arī PQ ir ω diametrs, tāpēc $\sphericalangle PCQ = 90°$ un līdz ar to $\sphericalangle ACB = 90°$.



6. att.

5. Vai eksistē tāda bezgalīga naturālu skaitļu virkne (a_n), ka katram naturālam n, skaitļu $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+a_n}$ vidējais aritmētiskais ir vienāds ar n?

Atrisinājums

Jā, der, piemēram, virkne 1; 1; 2; 2; 4; 4; 4; 4; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 16; 16; 16; ... (divi vieninieki, divi divnieki, četri četrinieki, astoņi astoņnieki, sešpadsmit sešpadsmitnieki utt.). Pamatosim, ka šī virkne apmierina uzdevuma nosacījumus.

Ja $n = 1$, tad $\frac{1+1}{2} = 1$.

Ja $n > 1$, tad $2^k < n \leq 2^{k+1}$. Tādā gadījumā $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{2^{k+1}} = 2^k$ un $a_{2^{k+1}+1} = \ldots = a_{n+2^k} = 2^{k+1}$.

Tad vidējais aritmētiskais ir $\frac{2^k \cdot (2^{k+1} - n) + 2^{k+1} \cdot (n - 2^k)}{2^k} = 2^{k+1} - n + 2n - 2^{k+1} = n$.