

## Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posms

### 2. kārtā

1. Pierādīt, ka dažādiem reāliem skaitļiem  $a$ ,  $b$  un  $c$  sakarība  $a+b+c=0$  ir spēkā tad un tikai tad, ja  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .
2. Uz trijstūra  $ABC$  malām  $AC$  un  $BC$  uz āru ir konstruēti kvadrāti  $ACA_1A_2$  un  $BCB_1B_2$ . Pierādīt, ka taisnes  $A_1B$ ,  $A_2B_2$  un  $AB_1$  krustojas vienā punktā!
3. Naturālus skaitļus  $x$  un  $y$  sauc par *draudzīgiem*, ja  $xy+1$  ir naturāla skaitļa kvadrāts. Piemēram, skaitļi 2 un 40 ir draudzīgi. Pierādīt: ja skaitļi  $a$  un  $b$  ir *draudzīgi*, tad eksistē tāds naturāls skaitlis  $c$ , ka vienlaikus  $a$  un  $c$  ir *draudzīgi*, un arī  $b$  un  $c$  ir *draudzīgi*.
4. Atrast visas funkcijas, kas definētas veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tādas, ka  $f(1) = f(-1)$  un visiem veseliem  $x$  un  $y$  izpildās
$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy).$$
5. Parlamentā, kurā ir  $n \geq 2$  deputāti, darbojas  $k \geq 0$  komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi  $n$  deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai  $k$  vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas?