**Latvijas 69. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi**

**9.-12. klase**

**9.1.** Reālus skaitļus un saista sakarība . Kāda var būt vērtība?

**Atrisinājums.** Pārveidojot doto izteiksmi, iegūstam

Apskatām katru gadījumu.

1. Ja jeb un , tad
2. Ja jeb , tad

Tātad izteiksmes vērtība ir vai nu (ja ), vai (ja ).

*Piezīme*. Sakarību starp un var iegūt arī, dotās vienādības kreisās puses izteiksmes skaitītāja katru saskaitāmo izdalot ar , apzīmējot un atrisinot iegūto vienādojumu jeb .

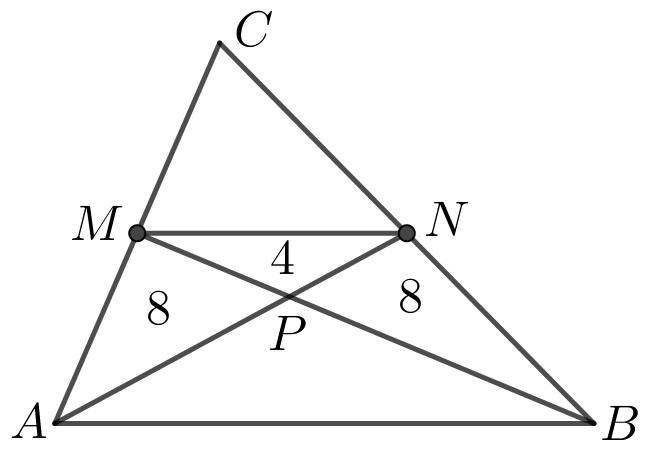
**9.2.** Uz trijstūra malām un attiecīgi atlikti punkti un . Nogriežņi un krustojas punktā . Aprēķināt trijstūra laukumu, ja un .

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka (skat. 1. att.) un šiem trijstūriem ir kopīga mala , tāpēc augstumi, kas no virsotnēm un novilkti pret šo malu , ir vienādi jeb punkti un atrodas vienādā attālumā no nogriežņa . Tātad . Apskatām attiecību

Ievērojot, ka , iegūstam .

Trijstūri un ir līdzīgi pēc pazīmes , jo kā krustleņķi kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm un . Tad , no kā izriet, ka . Esam ieguvuši, ka .

Tā kā , tad un jeb   
. Izsakām trijstūra laukumu:

****

1. att.

**9.3.** Vai naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa var būt **a)** 19, **b)** 2019?

**Atrisinājums. a)** Jā, var, piemēram, un .

*Piezīme*. Tā kā , tad jāmeklē skaitļi, kuru kvadrāts ir kongruents ar , tātad paši skaitļi ir . Der arī skaitļi 26, 28, 37, 44, 53, 62, 64, 73, 82, 89, 91, utt.

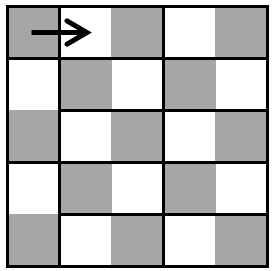
**b)** Nē, nevar. Naturālā skaitļa kvadrāta ciparu summa 2019 dalās ar 3, tātad arī dalās ar 3. Tā kā naturāla skaitļa kvadrāts dalās ar 3, tad arī pats skaitlis dalās ar 3, bet tādā gadījumā ir jādalās ar 9. Bet skaitļa ciparu summa ir 2019, kas nedalās ar 9 nedalās, tātad 2019 nevar būt naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa.

**9.4.** Sākotnēji katrā kvadrāta rūtiņā atradās tieši viena skudra. Tad katra skudra pārvietojās uz kādu blakus rūtiņu (tas ir, uz rūtiņu, kam ar esošo ir kopīga mala). Kāds tagad ir **a)** mazākais; **b)** lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits?

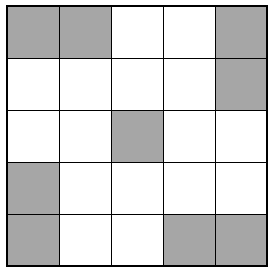
**Atrisinājums. a)** Mazākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits ir 1. Iekrāsojam doto kvadrātu kā šaha galdiņu (skat. 2.att.). Tad ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas. Tās 13 skudras, kas atrodas 13 melnajās rūtiņās, ir pārvietojušās uz baltajām rūtiņām. Tā kā balto rūtiņu skaits ir 12, tad vismaz vienā rūtiņā nonāks vairāk nekā viena skudra. Tātad vismaz viena rūtiņa paliks tukša. Skat., piemēram, 2.att., kur skudra no augšējās kreisās rūtiņas pārvietojas bultiņas norādītajā virzienā, bet pārējās skudras ar biezāku līniju izceltajos divu rūtiņu laukumos samainās vietām.

**b)** Lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits ir 16. Viens no šādiem pārvietojumiem parādīts 4. att.

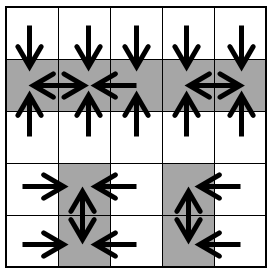
Pamatosim, ka 16 ir lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits. Skudras, kas atrodas 3. att. iekrāsotajās rūtiņās pēc pārvietošanās uz blakus rūtiņām atkal kopā aizņems 9 rūtiņas, jo nekādas divas no šīm skudrām nevar nonākt vienā un tajā pašā rūtiņā. Tātad var palikt ne vairāk kā tukšas rūtiņas.



2.att.



3. att.



4. att.

**9.5.** Hokeja turnīrā piedalījās 16 komandas. Katra komanda ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Apzīmēsim katras komandas uzvaru un zaudējumu skaitu attiecīgi ar un , . Pierādīt, ka

**Atrisinājums.** Tā kā turnīrā piedalījās 16 komandas un katra komanda spēlēja ar katru citu, tad katra komanda ir piedalījusies tieši 15 spēlēs.

Tā kā komanda jebkurā spēlē vai nu uzvarēja, vai zaudēja (neizšķirtu nav), tad skaidrs, ka -tās komandas uzvaru skaitu var izteikt ar zaudējumu skaitu, tas ir, . Tad

Pavisam kopā tika izspēlētas spēles, tāpēc zaudējumu kopskaits . Līdz ar to , no kā izriet prasītais, tas ir,   
.

**10.1.** Pierādīt, ka visus naturālos skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā pirmskaitļa un salikta skaitļa summu!

**Atrisinājums.** Visus pāra skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā summu (, kur ir pāra skaitlis, kas lielāks nekā 100, tātad ir salikts skaitlis. Visus nepāra skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā summu  
, kur ir pāra skaitlis, kas lielāks nekā 98, tātad ir salikts skaitlis. Saskaitāmie 2 un attiecīgi 3 ir pirmskaitļi.

*Piezīme*. Minētā īpašība ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, kas lielāki nekā 5.

**10.2.** Izliekta četrstūra diagonāle ir leņķa bisektrise, un . Trijstūrī novilkts augstums . Pierādīt, ka taisne sadala nogriezni uz pusēm!

**Atrisinājums.** Taisnes krustpunktu ar apzīmējam ar (skat. 5. att.). Tātad jāpierāda, ka .

Apzīmējam (jo ir leņķa bisektrise). Tā kā trijstūris ir taisnleņķa, tad

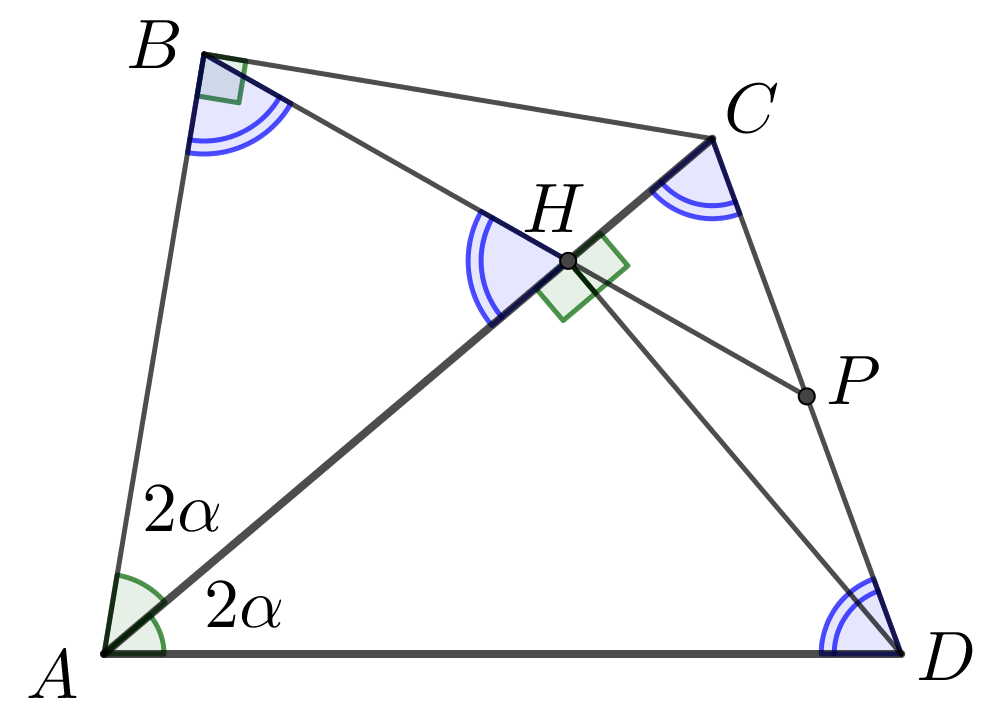
Tā kā pēc dotā , tad trijstūris ir vienādsānu un

Aprēķinām

Taisnleņķa trijstūri un ir vienādi pēc pazīmes , jo un . Tātad kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Līdz ar to trijstūris ir vienādsānu un

Ievērojam, ka (krustleņķi) un .

Tā kā , tad trijstūris ir vienādsānu un . Tā kā , tad trijstūris ir vienādsānu un . Līdz ar to



5. att.

**10.3.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka naturālu skaitli , dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja dala ar 3:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

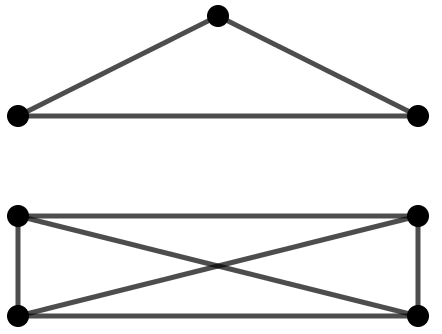
Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 3, iegūstam . Tātad dotā izteiksme, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

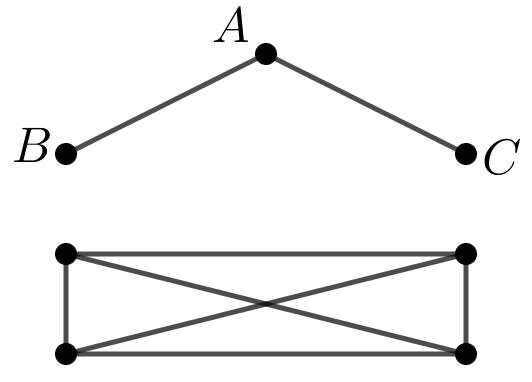
*Piezīme*. Uzdevumu var atrisināt arī aplūkojot izteiksmi pēc jebkura skaitļa 3 daudzkārtņa moduļa, tas ir,   
6, 9, 12 utt.

**10.4.** Komisijā ir 7 cilvēki. Ierodoties uz sēdi, daži no viņiem sarokojas. Kāds ir mazākais iespējamais sarokošanos skaits, lai no katriem trim komisijas locekļiem varētu atrast divus, kas savā starpā sarokojušies?

**Atrisinājums.** Mazākais iespējamais sarokošanos skaits ir 9, skat., piemēram, 6. att. kur komisijas locekļi ir attēloti ar punktiem, bet sarokošanās – ar līniju starp atbilstošajiem punktiem. Tiešām, no jebkuriem 3 punktiem divi atrodas vienā daļā, un tie ir savā starpā savienoti.



6. att.



7. att.

Pierādīsim, ka mazāk sarokošanos (jeb līniju) nevar būt. Pieņemsim, ka ir novilktas 8 līnijas. Tad ir 16 līniju gali. Tā kā , tad ir tāds punkts , no kura iziet ne vairāk kā 2 līnijas. Apskatām iespējamos gadījumus.

1. No punkta neiziet neviena līnija. Tad, lai no katriem trim punktiem vismaz divi būtu savienoti, visiem citiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem, bet tādā gadījumā līniju skaits ir (pretruna).
2. Punkts ir savienots ar tieši vienu citu punktu . Tad, lai no katriem trim punktiem vismaz divi būtu savienoti, pārējiem pieciem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem – citādi, izvēloties, piemēram, punktu un divus citus nesavienotos punktus, iegūsim trīs punktus, no kuriem nekādi divi nav savienoti. Taču tādā gadījumā līniju skaits ir (pretruna).
3. Punkts ir savienots ar tieši diviem citiem punktiem un , tas, ir no iziet divas līnijas (skat. 7. att.). Bet tad nav savienots ar 4 atlikušajiem punktiem. Visiem šiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem – citādi, izvēloties punktu un divus citus nesavienotos punktus, iegūsim trīs punktus, no kuriem nekādi divi nav savienoti. Taču tad jau kopā ir novilktas līnijas, tātad citu līniju vairs nav. Šajā gadījumā var atrast trīs tādus punktus, ka nekādi divi no tiem nav savienoti, piemēram, izvēloties punktus , un vēl kādu citu punktu (ne ).

**10.5.** Dots, ka un . Pierādīt, ja ir naturāls skaitlis un   
, tad .

**Atrisinājums.** Pierādīsim, ka pie ir spēkā nevienādība

Reizinot abas nevienādības puses ar un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo .

Tā kā , tad iegūstam, ka

**11.1.** Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām organizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss „darbojas” abos virzienos. Reisus organizē 90 aviokompānijas, katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp kādām divām pilsētām (apzīmēsim tās ar A un B), tad tai ir biroji gan pilsētā A, gan pilsētā B. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji!

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka katrai aviokompānijai ir vismaz 9 biroji.Ja kādai kompānijai būtu ne vairāk kā 8 biroji, tad tā varētu noorganizēt ne vairāk kā 28 reisus, jo no 8 elementiem var izveidot ne vairāk kā   
 pārus. Tātad katrai kompānijai ir vismaz 9 biroji, un biroju kopskaits ir vismaz . Ja katrā no 100 pilsētām būtu ne vairāk kā 8 biroji, tad kopā būtu ne vairāk kā biroji, bet biroju kopskaits ir vismaz 810. Tātad ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji.

*Piezīme*. Risinājumā izmantots Dirihlē princips.

**11.2.** Ap četrstūri apvilkta riņķa līnija. Taisne, kas ir paralēla un iet caur , krusto nogriezni punktā . Taisne, kas ir paralēla un iet caur punktu , krusto nogriezni punktā . Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem un , pieskaras viena otrai!

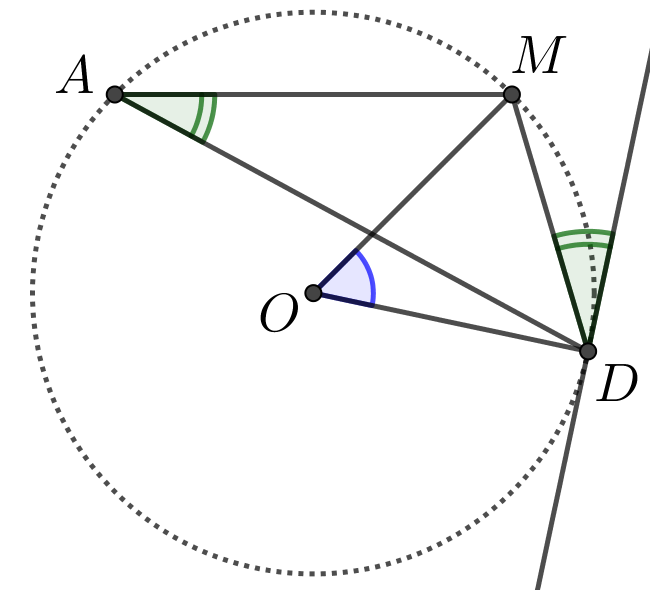
**Atrisinājums.** Novelkam nogriezni (skat. 8. att.). Ievērojam, ka kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka. Tā kā , tad kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Līdz ar to .

Pamatosim, ka ap apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei . Ar apzīmējam trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centru (skat. 9. att.). Ja , tad kā atbilstošais centra leņķis. Tā kā   
trijstūris ir vienādsānu, tad . Līdz ar to . Tā kā rādiuss ir perpendikulārs taisnei , tad ir pieskare.

Līdzīgi iegūstam, ka ap trijstūri apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei . Tātad esam pierādījuši, ka abas riņķa līnijas pieskaras viena otrai punktā .



8. att.



9. att.

**11.3.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka naturālu skaitli , dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0, 1, 2 vai 3, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja dala ar 4:

* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad ;
* ja , tad .

Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 4, iegūstam .

Ja , tad , kas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Ja ir lielāks nekā 1, tad   
, un šķirojam divus gadījumus:

* ja ir pāra skaitlis, tad ;
* ja ir nepāra skaitlis, tad .

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 4, dod atlikumu 3, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

*Piezīme.* Iegūt pretrunu var arī apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 9. Ja , tad atlikums, dalot ar 9, ir 6, ja ir lielāks nekā 1, tad atlikums, dalot ar 9, ir 3, bet naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 9 var būt tikai 0, 1, 4 vai 7.

**11.4.** Naturālu skaitļu virknes pirmie divi locekļi ir un , turklāt . Katru nākamo virknes locekli, sākot ar trešo, aprēķina pēc formulas . Kādai lielākajai indeksa vērtībai var būt vienāds ar ?

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka lielākā iespējamā indeksa vērtība ir 11.

Apzīmējam , kur . Vispārīgā veidā izteiksim dažus nākamos virknes locekļus:

Ievērojam, ka . Tātad . Ja un , tad

*Piezīme*. Lai atrastu un vērtības, jāatrisina vienādojums .

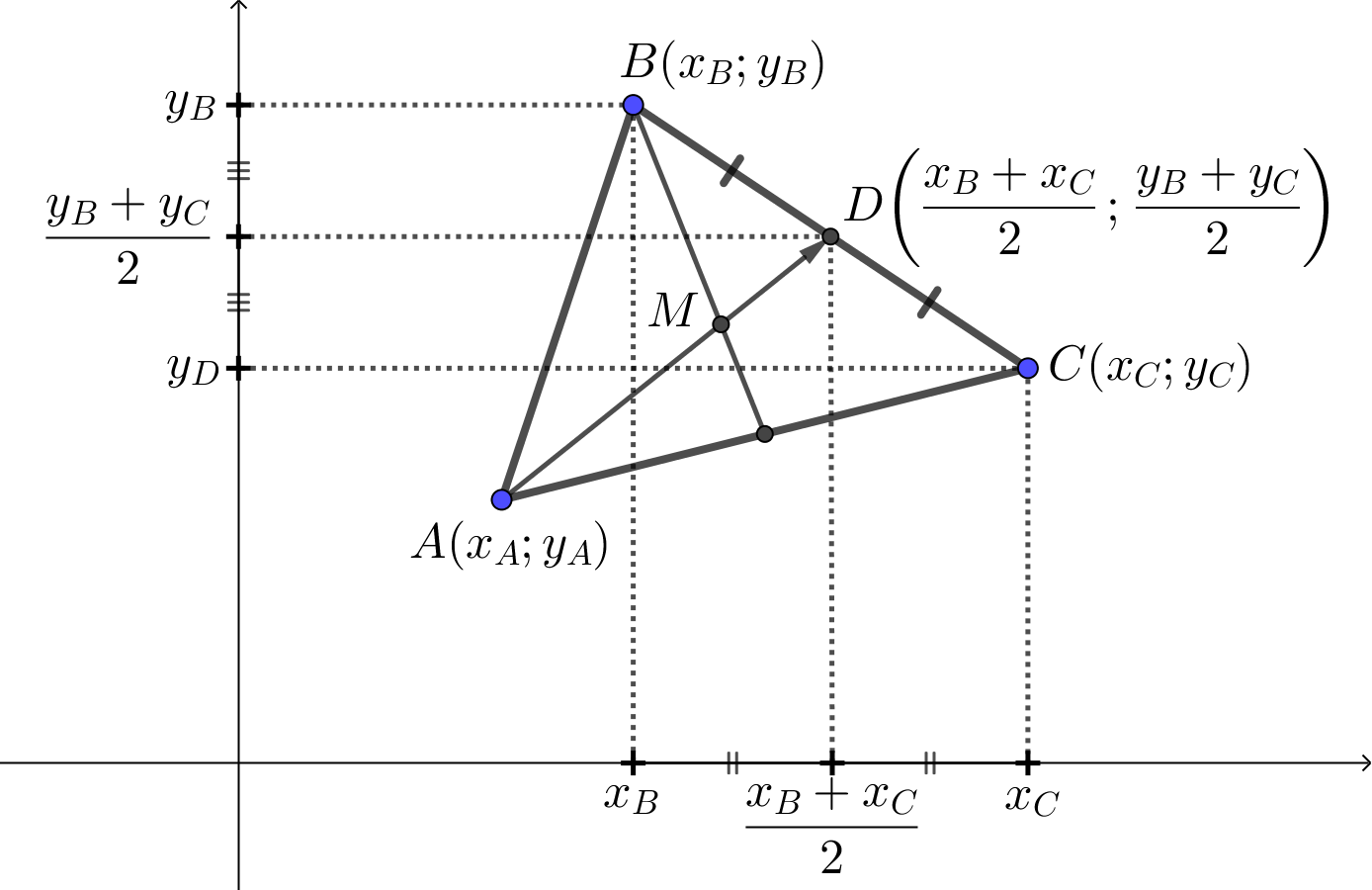
**11.5.** Koordinātu plaknē doti **a)** 8; **b)** 9 punkti, katram no tiem koordinātas ir veseli skaitļi. Zināms, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Vai noteikti var atrast tādus trīs punktus, ka trijstūrim ar virsotnēm šajos punktos mediānu krustpunkta koordinātas arī ir veseli skaitļi?

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka trijstūra ar virsotnēm , un mediānu krustpunkta koordinātas ir .

Izmantojot punkta un koordinātas, aprēķinām malas viduspunkta (skat. 10. att.) koordinātas, iegūstam . Tad . Tā kā , tad

Izmantojot vektora koordinātas un punkta koordinātas, nosakām punkta koordinātas:   
 jeb .

Tātad trijstūrim, kura koordinātas ir veseli skaitļi , un mediānu krustpunkta koordinātas ir veseli skaitļi tad un tikai tad, ja un dalās ar 3.



10. att.

**a)** Nē, ne noteikti. Piemēram nekādiem trīs no šiem astoņiem punktiem un nav spēkā, ka un dalās ar 3, jo šo punktu koordinātas pēc moduļa 3 ir un (katra vērtība divas reizes), redzams, ka, summējot 3 no šiem, nevar iegūt ne summu , ne , ne , ne .

**b)** Jā, noteikti.Apskatot patvaļīga punkta koordinātas pēc moduļa 3, var iegūt 9 dažādus gadījumus (skat.   
11. att.).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

11. att.

Katru no dotajiem 9 punktiem “ievietosim” atbilstošajā rūtiņā. Ja kādā rūtiņā ir ievietoti trīs punkti, tad tos varam ņemt par trijstūra virsotnēm. Ja nav tādas rūtiņas, kurā ir ievietoti vismaz 3 punkti, tad katrā rūtiņā ir ievietoti ne vairāk kā 2 punkti. Tā kā kopā ir 9 punkti, tad ir aizpildītas vismaz 5 rūtiņas. Pietiek apskatīt situāciju, kad ir aizpildītas 5 rūtiņas. Apskatīsim iespējamos gadījumus:

* + ja ir tāda rinda, kolonna vai diagonāle, kurā visas rūtiņas ir aizpildītas, tad izvēlamies pa vienam punktam no katras šīs rindas (kolonnas vai diagonāles) rūtiņas – tie ir meklētā trijstūra virsotnes;
  + ja nav ne tāda rinda, ne kolonna, kurā visas rūtiņas ir aizpildītas, tad ir tieši divas tādas rindas, kurās ir pa divām aizpildītām rūtiņām un tieši viena rinda, kurā ir aizpildīta viena rūtiņa, tas pats attiecas arī uz kolonnām.
    - Apskatām gadījumu, kad ir tāda aizpildīta rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa gan rindā, gan kolonnā. Apzīmējam tajā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 ar . Pārējo četru punktu koordinātas ir , kur , turklāt visi ir atšķirīgi un visi ir atšķirīgi. Tad par trijstūra virsotnēm izvēlamies tādus trīs punktus, lai un arī . Piemēram, var izvēlēties punktus, kuru koordinātas pēc moduļa 3 ir .
    - Apskatām gadījumu, kad ir tāda rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa rindā, bet ne kolonnā. Šajā rūtiņā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 apzīmējam ar . Tātad noteikti ir cita tāda rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa kolonnā. Šajā rūtiņā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 apzīmējam ar . Tā kā abās pārējās kolonnās ir pa divām aizpildītām rūtiņām un nevar būt aizpildīta rūtiņa, kurā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 ir , tad noteikti ir aizpildītas rūtiņas, kurās ievietoto punktu koordinātas pēc moduļa 3 ir un . Tad par trijstūra virsotnēm izvēlamies tādus trīs punktus, lai un arī . Piemēram, var izvēlēties punktus, kuru koordinātas pēc moduļa 3 ir .

**12.1.** Vienādojumam , kur – naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes . Kāda var būt izteiksmes vērtība?

**1. atrisinājums.** Ievērojot, ka ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā   
. Grupējot locekļus, iegūsim šādas sakarības:

Tā kā ir dotā vienādojuma saknes, tad iegūstam identitātes:

Saskaitot iegūtās trīs identitātes, iegūstam

Līdz ar to .

**2. atrisinājums.** Ievērojot, ka ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā   
. Grupējot locekļus, iegūsim šādas sakarības:

Izsakām prasīto summu:

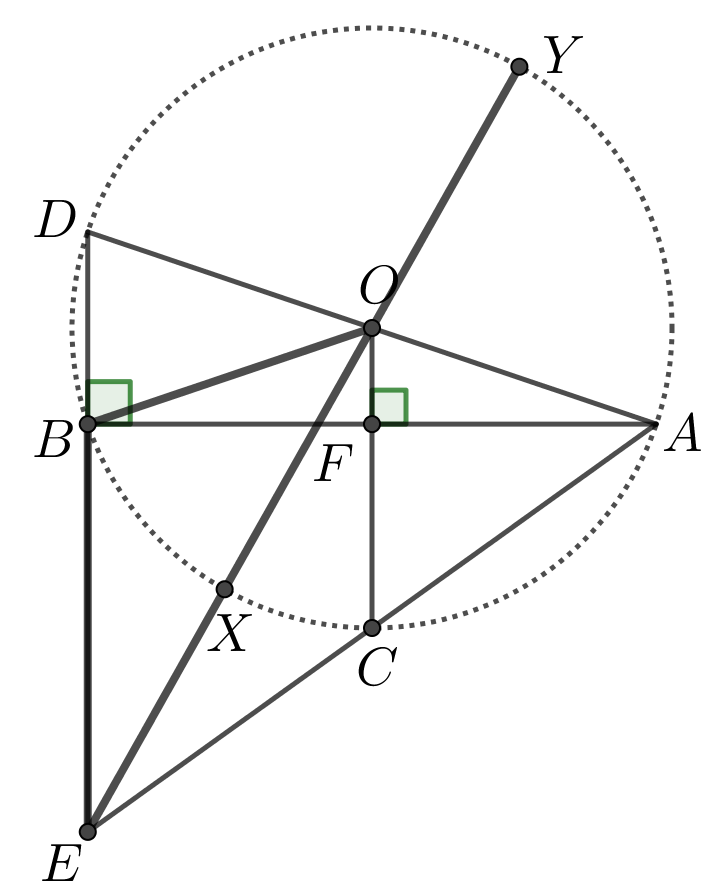
**12.2.** Riņķa līnijā ar centru punktā novilkta horda , kas neiet caur . Caur punktu novilkts perpendikuls pret , kas riņķa līniju vēlreiz krusto punktā . Uz loka , kuram nepieder , atzīmēts šī loka viduspunkts . Taisnes un krustojas punktā . Pierādīt, ka .

**1. atrisinājums.** Apzīmējam (skat. 12. att.). Tā kā ir loka viduspunkts, tad ir nogriežņa vidusperpendikuls, kas krusto punktā . Tātad . No un izriet, ka ir trijstūra viduslīnija. Tātad

Taisnes krustpunktus ar riņķa līniju apzīmējam ar un . Apskatām starpību

Tā kā pēc sekanšu īpašības , tad

Līdz ar to esam ieguvuši, ka .

****

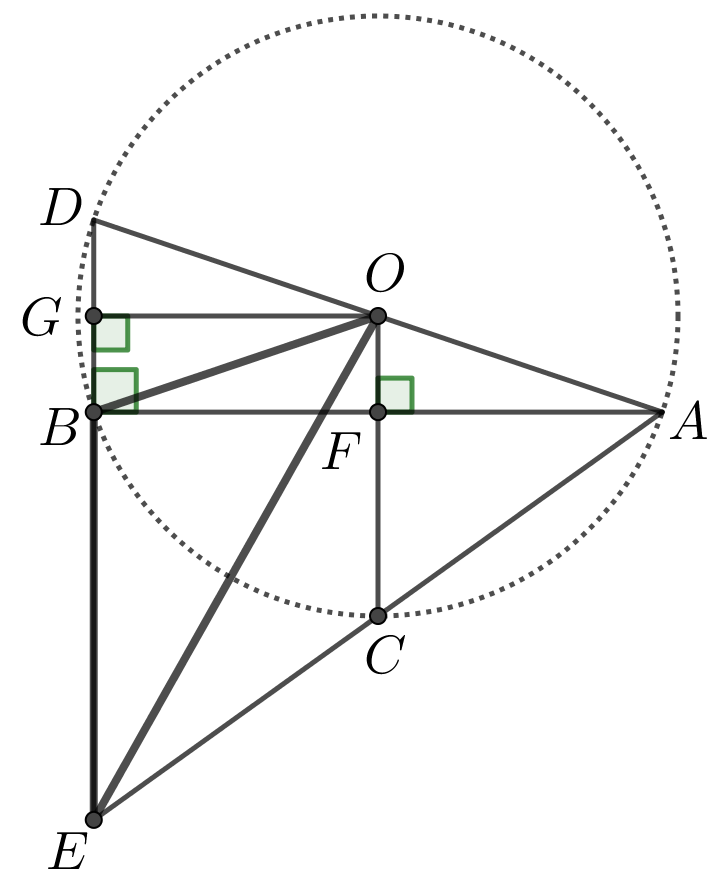
12. att.

**2. atrisinājums.** Novelkam rādiusu (skat. 13. att.). Tā kā ir loka viduspunkts, tad ir nogriežņa vidusperpendikuls, kas krusto punktā . Tātad . No un izriet, ka ir trijstūra viduslīnija. Tātad

No velkam perpendikulu pret . Tā kā trijstūris ie vienādsānu, tad un līdz ar to

Tad, izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī , pakāpeniski iegūstam

Izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī , iegūstam, ka , tad



13. att.

**12.3.** Pierādīt, ka nevienai naturālai vērtībai izteiksmes

vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

**Atrisinājums.** Doto summu apzīmējam ar . Aplūkojam katru saskaitāmo un summu pēc moduļa 8 dažādām vērtībām.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 0 | 5 | 0 | 7 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 5 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

Ievērojam, ka

* virknes ; pēc moduļa 8 ir periodiskas ar periodu 2;
* sākot ar , virknes ir periodiskas ar periodu 1.

Tātad visām vērtībām summas vērtība pēc moduļa 8 ir vienāda ar 5.

Naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 8 var būt tikai 0, 1 vai 4:

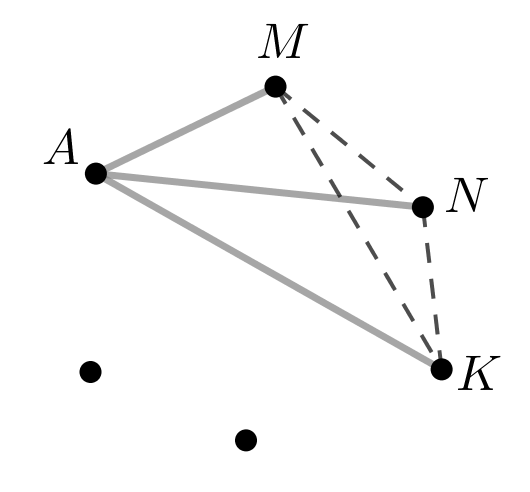
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

Tātad dotā izteiksme nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

**12.4.** Doti seši dažādi iracionāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 3 skaitļus (apzīmēsim tos ar , ) tā, ka visi trīs skaitļi , , ir iracionāli!

**Atrisinājums.** Dotos sešus iracionālos skaitļus attēlosim ar punktiem un savienosim divus punktus ar pelēku nogriezni, ja attiecīgo skaitļu summa ir racionāls skaitlis, un ar melnu, ja skaitļu summa ir iracionāls skaitlis.

Pierādīsim, ka eksistē tādi trīs punkti, kas visi savā starpā savienoti ar vienas un tās pašas krāsas nogriežņiem. Apskatām punktu . No tā iziet vismaz trīs nogriežņi, kas ir vienā un tajā pašā krāsā (izmantots Dirihlē princips). Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka nogriežņi , un ir pelēki (skat. 14. att.). Ja kaut viens no nogriežņiem , , ir pelēks, tad iegūstam pelēku trijstūri; ja tie visi ir melni, tad iegūstam melnu trijstūri .



14. att.

Pierādīsim, ka šis trijstūris, kam visas malas ir vienā krāsā, nav pelēks. Ja , un , kur , , ir racionāli skaitļi, tad, saskaitot pirmās divas vienādības un ņemot vērā trešo vienādību, iegūstam, ka ir racionāls skaitlis (pretruna). Tātad *vienkrāsainais* trijstūris ir melns un tā virsotnēs ierakstītie skaitļi ir meklētie.

**12.5.** Atrast

**a)** vienu tādu naturālu skaitļu pāri ,

**b)** trīs tādus naturālu skaitļu pārus , ,

ka lielākais skaitlis, ko nevar izteikt formā , kur 𝑚 un 𝑛 ir nenegatīvi veseli skaitļi, ir 2019.

**Atrisinājums. a)** Pamatosim, ka der, piemēram, skaitļi un .

Iegūstam izteiksmi . Skaitli 2019 nevar izteikt kā šo skaitļu summu, jo

;

un , kas nedalās ar 2.

Pamatosim, ka visus skaitļus, kas lielāki nekā 2019, var izteikt formā . Ievērojam, ka

* un visus pārējos skaitļus, kas lielāki nekā 2020 un dalās ar 2, iegūstam kā summu , kur ;
* un visus pārējos skaitļus, kas lielāki nekā 2021 un, dalot ar 2, dod atlikumu 1, iegūstam kā summu , kur .

**b)** Pierādīsim, ja un ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lielākais skaitlis, ko nevar izteikt ar šiem skaitļiem, ir

Pieņemsim pretējo, ka var izteikt kā . Apskatot izteiksmi

* pēc moduļa , iegūstam jeb ,
* pēc moduļa , iegūstam

No šī secinām, ka jo dalās ar un skaitļi un nav negatīvi. Tāpat secinām, ka . Līdz ar to iegūstam, ka

kas noved pie pretrunas.

Tagad pamatosim, ka visus naturālos skaitļus, kas ir lielāki nekā , var izteikt formā . Tā kā un ir savstarpēji pirmskaitļi, tad katram varam atrast tādus veselus skaitļus un lai . Tas nozīmē, ka visiem veseliem ir patiess arī Kādam izteiksme nebūs negatīva. Atrodam mazāko nenegatīvo vērtību šai izteiksmei un apzīmēsim to ar un atbilstošo vērtību pie ar . Tātad , pie tam jo pretējā gadījumā un skaitlis būtu mazāks nenegatīvs skaitlis nekā mūsu jau mazākais . Ja tad

no kurienes izriet, ka jeb Tātad esam atraduši lai

Tātad, lai iegūtu un vērtības, jāatrisina vienādojums . Vienādojuma abām pusēm pieskaitot 1 un sadalot reizinātājos, iegūstam

Ievērojot, ka , iegūstam

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2020 | 2 | 2021 |  |  |
| 2 | 1010 | 3 | 1011 |  | Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi |
| 4 | 505 | 5 | 506 |  |  |
| 5 | 404 | 6 | 405 |  | Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi |
| 10 | 202 | 11 | 203 |  |  |
| 20 | 101 | 21 | 102 |  | Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi |

*Piezīme*. Skaitļu pāri un ir vienīgie derīgie.