**9.1.** *Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme* $x+\frac{2014}{x}$*, ja* $x>0$*?*

**1. risinājums.** Pārveidojam doto izteiksmi, atdalot pilno kvadrātu:

$$x+\frac{2014}{x}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{2014}+\left(\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{2014}.$$

Tā kā kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir tad, kad

$$\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}=0,\ \sqrt{x}=\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{x}}\ \text{jeb}\ x=\sqrt{2014}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka izteiksmes $x+\frac{2014}{x}$ mazākā vērtība ir $2\sqrt{2014}$ un tā tiek sasniegta pie $x=\sqrt{2014}$.

**2. risinājums.** No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$x+\frac{2014}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2014}{x}}=2\sqrt{2014}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja $x=\frac{2014}{x}$ jeb $x^2=2014$ un $x=\sqrt{2014}$.

**9.2.** *Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar* 1*, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo skaitļu summu. Cik starp virknes pirmajiem* ***a)*** 100*,* ***b)*** 2014 *locekļiem ir tādi, kas dalās ar* 5*?*

Katra virknes elementa, dalot to ar 5, atlikums, ir atkarīgs tikai no triju iepriekšējo elementu atlikumiem, dalot ar 5.

Aplūkojam atlikumu virkni, kas rodas virknes elementus, dalot ar 5:

1, 1, 1, 3, 0, 4, 2, 1, 2, 0, 3, 0, 3, 1, 4, 3, 3, 0, 1, 4, 0, 0, 4, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, ...

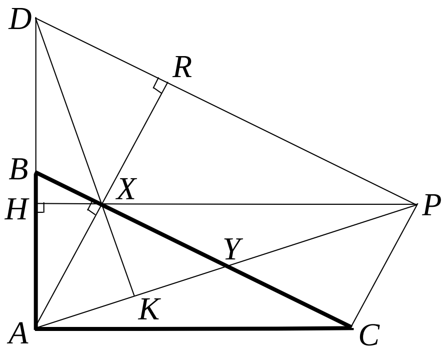
Tātad atlikumi ir periodiski ar periodu 31. Tas nozīmē, ka katrā 31 locekļu grupā ir 6 locekļi, kas dalās ar 5.

**a)** 100 locekļi veido trīs pilnas grupas un vēl septiņus locekļus. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5 ir $6\cdot3+1=19$.

**b)** 2014 locekļi veido 64 pilnas grupas un vēl 30 locekļus. Tātad tādu skaitļu skaits, kas dalās ar 5, ir $6\cdot64+6=390$.

**9.3.** *Taisnleņķa trijstūra ABC taisnais leņķis ir A. Punkts X ir no A pret BC vilktā augstuma pamats. Nogriežņa XC viduspunkts ir Y. Uz malas AB pagarinājuma izvēlēts punkts D tā, ka* $AB=BD$*. Pierādīt, ka DX ir perpendikulārs AY.*

Nogriezni *AY* pagarina aiz punkta *Y* un atliek punktu *P* tā, ka $AY=YP$ (skat. A1. zīm.). Tas nozīmē, ka četrstūris *AXPC* ir paralelograms, jo tā diagonāles *AP* un *XC* to krustpunktā *Y* dalās uz pusēm. Nogriezni *XP* pagarinot līdz krustpunktam ar *AD*, iegūst, ka $PH\perp AD$, jo $AC\perp AD$ un $PH\parallel AC$. Aplūkojam trijstūri *ADP*. No tā, ka $AB=BD$ un $AY=YP$ seko, ka $BY$ ir trijstūra *ADP* viduslīnija. Tātad $BY\parallel DP$. No tā, ka $AX\perp BY$, seko, ka $AR\perp DP$. Tas nozīmē, ka trijstūrī *ADP* ir novilkti divi augstumi *PH* un *AR*, kas krustojas punktā *X*. Līdz ar to nogrieznis, kas vilkts no virsotnes *D* caur punktu $X$, ir trešais šī trijstūra augstums, tātad $DK\perp AP$ un $DK\perp AY$, kas arī bija jāpierāda.




A1. zīm.

**9.4.** *Gatavojoties* 13 *diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.*

***a)*** *Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm.*

***b)*** *Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk par vienu diplomātu.*

**a)** Apaļajam galdam pavisam ir 13 derīgas pozīcijas, kuras var iegūt galda pagriešanas par noteiktu vietu skaitu rezultātā. Katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tikai vienā no šīm pozīcijām. Katrai galda pozīcijai $i$ $(1 \le i \le 13)$ ar $p_i$ apzīmējot diplomātu skaitu, cik šajā pozīcijā atrodas pret savām plāksnītēm, iegūstam $p_1 + p_2 + ... + p_{13} = 13$.

Zināms, ka viena no $p_i$ vērtībām ir 0, jo sākuma neviens no diplomātiem neatrodas pretī savai plāksnītei. Pēc Dirihlē principa kādai no atlikušajām $p_j$ vērtībām jābūt vismaz 2, t. i., ir vismaz divi diplomāti, kas kādā pozīcijā atrodas pretī savām plāksnītēm.

**b)** Pieņemot, ka diplomāti numurēti ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 13 pēc kārtas un sēdināt tos ap galdu bija paredzēts pulksteņrādītāja virzienā (plāksnītes saliktas 1-2-3-...-12-13), tad diplomātiem pie galda apsēžoties, piemēram, šādi 1-13-12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2, izpildās uzdevumā prasītais. Diplomātiem $i$ un $j$, ja $i$ sēž savā vietā, tad $j$-tā plāksnīte atrodas $j-i$ vietas pa labi, bet $j$-ais diplomāts atrodas $j-i$ vietas pa kreisi. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad $j$ nevar sēdēt pie savas plāksnītes.

*Piezīme.* Pavisam iespējami 13723 atšķirīgi diplomātu izvietojuma varianti ar iepriekšminēto īpašību.

**9.5.** *Atrast vienādojuma* $(x^2+5x-7)^2-2(x^2+5x-6)-4=0$ *sakņu kubu summu.*

Apzīmējam $p = x^2+5x-8$.

Ievietojot dotajā vienādojumā, iegūstam $(p+1)^2-2(p+2)-4=0$ jeb $p^2=7$ un $p=\pm\sqrt{7}$.

Esam ieguvuši, ka šo vienādojumu var sadalīt reizinātājos $(p-\sqrt{7})(p+\sqrt{7})=0$. Tas nozīmē, ka sākotnējā vienādojuma saknes sakrīt ar vienādojumu $x^2+5x-(8+\sqrt{7})=0$ un $x^2+5x-(8-\sqrt{7})=0$ saknēm (šo vienādojumu diskriminanti ir attiecīgi $D_{v1}=57+4\sqrt{7}>0$ un $D_{v2}=57-4\sqrt{7}>0$, tāpēc katram no tiem ir divas saknes). Apzīmēsim šīs saknes pa pāriem ar $x_1$, $x_2$ un $x_3$, $x_4$. Pēc Vjeta teorēmas iegūstam sakarības:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=-5,$$

$$x_1x_2 = -(8+\sqrt{7}),$$
$$x_3x_4 = -(8-\sqrt{7}).$$

Ievērojam, ka $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)$.

Tāpēc $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=-5\cdot(25+3(8+\sqrt{7}))-5\cdot(25+3(8-\sqrt{7}))=-490$.

**10.1.** *Atrisināt vienādojumu sistēmu*

$$\begin{cases}5(x+y+z)=xyz\\ x=y+z\end{cases}$$

*kur x, y, z – veseli nenegatīvi skaitļi.*

Ievērojam, ka sistēmas atrisinājums ir (0, 0, 0).

Pirmajā vienādojumā aizstājot $y+z$ ar $x$, iegūstam

$$5(x+x)=xyz \quad \text{jeb} \quad 10x=xyz.$$

Ja $x\neq 0$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam, ka

$$10=yz \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{z}.$$

Apskatām visus veselos pozitīvos skaitļa 10 dalītājus:

- $z=1$, tad $y=10$ un $x=10+1=11$;
- $z=2$, tad $y=5$ un $x=5+2=7$;
- $z=5$, tad $y=2$ un $x=2+5=7$;
- $z=10$, tad $y=1$ un $x=1+10=11$.

Tātad dotajai sistēmai ir pieci atrisinājumi:

(0, 0, 0), (11, 10, 1), (7, 5, 2), (7, 2, 5), (11, 1, 10).

**10.2.** *Atrast visas tādas vesela skaitļa n vērtības, kurām gan* $\frac{n^3+3}{n+3}$*, gan* $\frac{n^4+4}{n+4}$ *ir veseli skaitļi.*

Apzīmējam $k=n+3$. Tad $n=k-3$ un pārveidojam pirmo izteiksmi:

$$\frac{n^3+3}{n+3}=\frac{(k-3)^3+3}{k}=\frac{k^3-9k^2+27k-27+3}{k}=k^2-9k+27-\frac{24}{k}.$$

Līdzīgi, apzīmējot $m=n+4$, pārveidojam otro daļu:

$$\frac{n^4+4}{n+4}=\frac{(m-4)^4+4}{m}=\frac{m^4-16m^3+96m^2-256m+256+4}{m}=m^3-16m^2+96m-256+\frac{260}{m}.$$

Lai abu daļu vērtības būtu veseli skaitļi, tad skaitlim $k=n+3$ jābūt 24 dalītājam un atbilstošajam skaitlim $m=n+4$ jābūt 260 dalītājam.

Derīgās $n+3$ vērtības apkopotas tabulas otrajā rindā:

| $n$ | –27 | –15 | –11 | **–9** | –7 | **–6** | **–5** | –4 | –2 | –1 | **0** | **1** | 3 | 5 | **9** | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n+3$ | –24 | –12 | –8 | –6 | –4 | –3 | –2 | –1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 24 |
| $n+4$ | –23 | –11 | –7 | **–5** | –3 | **–2** | **–1** | 0 | **2** | 3 | **4** | **5** | 7 | 9 | **13** | 25 |

No skaitļu $n+4$ vērtībām ietonētās ir skaitļa 260 dalītāji.

Tātad meklētās *n* vērtības ir –9, –6, –5, –2, 0, 1, 9.

**10.3.** *Ir pieejams neierobežots daudzums* 7 *un* 13 *centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām* (*piemēram, ja sūtījums maksā* 6, 8 *vai* 25 centus). *Kāda ir lielākā summa, kuru* ***nav*** *iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?*

Parādīsim, ka **71** centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Šajā summā ir ne vairāk kā piecas 13 centu pastmarkas. Aplūkosim, kāda summa atkarībā no izmantoto 13 centu pastmarku skaita būtu jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām:

| *13 centu pastmarku skaits* | *Summa, kas apmaksāta ar 13 centu pastmarkām* | *Summa, kas jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 71 |
| 1 | 13 | 58 |
| 2 | 26 | 45 |
| 3 | 39 | 32 |
| 4 | 52 | 19 |
| 5 | 65 | 6 |

Nevienā no variantiem atlikusī summa nav 7 daudzkārtnis, tātad šo summu nav iespējams apmaksāt ar 7 centu pastmarkām. Tātad **71** centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Pierādīsim, ka jebkuru lielāku summu ir iespējams samaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Ievērosim, ka ja $N$ centu apmaksāšanā ir izmantota vismaz viena 13 centu pastmarka, tad aizvietojot to ar divām 7 centu pastmarkām, varēs apmaksāt $N+1$ centu. Šādu aizvietošanu apzīmēsim ar „$A$”.

Ja $N$ centu apmaksāšanā ir izmantotas vismaz vienpadsmit 7 centu pastmarkas, tad aizvietojot tās ar sešām 13 centu pastmarkām, varēs apmaksāt $N+1$ centu. Šādu aizvietošanu apzīmēsim ar „$B$”.

Ievērojam, ka $72 = 1 \cdot 7 + 5 \cdot 13$ un

$$72 \overset{A}{\Rightarrow} 73 \overset{A}{\Rightarrow} 74 \overset{A}{\Rightarrow} 75 \overset{A}{\Rightarrow} 76 \overset{A}{\Rightarrow} 77 \overset{B}{\Rightarrow} 78.$$

Visas lielākās summas var iegūt izvēloties kādu no šīm summām un pievienojot nepieciešamo 7 centu pastmarku skaitu.

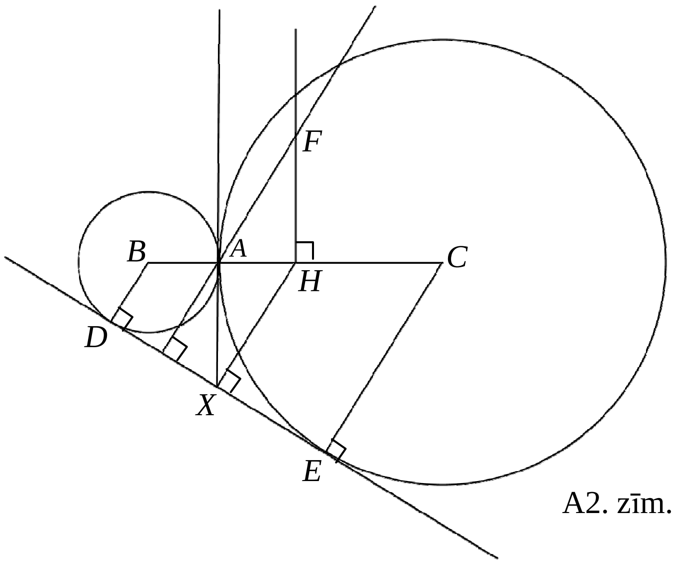
**10.4.** *Divas dažāda rādiusa riņķa līnijas ar centriem punktos B un C ārēji saskaras punktā A. Abu riņķa līniju kopējā pieskare, kas neiet caur punktu A, pirmajai riņķa līnijai pieskaras punktā D, bet otrai – punktā E. Taisne, kas novilkta caur A perpendikulāri DE, krusto nogriežņa BC vidusperpendikulu punktā F. Pierādīt, ka* $BC = 2AF$ .

Apzīmējam $AB = r$ un $AC = R$ .

Tad $BC = AB + BC = r + R$ un jāpierāda, ka $AF = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{r+R}{2}$ .

No nogriežņa vidusperpendikula definīcijas seko, ka $BH = HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{r+R}{2}$ .

No punkta $H$ novelkam perpendikulu pret $DE$, perpendikula un $DE$ krustpunktu apzīmējam ar $X$ (skat. A2. zīm.).



A2. zīm.

Nogrieznis $HX$ ir trapeces $DBCE$ ($BD \parallel EC$ kā rādiusi pret pieskari $DE$) viduslīnija, tātad $HX = \frac{BD+CE}{2} = \frac{r+R}{2}$ un $DX = EX$ .

Nogrieznis $HX$ ir paralēls $AF$, jo $HX \perp DE$ un $AF \perp DE$ .

Novelkam abu riņķu kopējo pieskari, kas iet caur $A$ – šī pieskare krusto $DE$ punktā $Y$. Tā kā $BC \perp AY$ un $BC \perp FH$ , tad $AY \parallel FH$ .

Izmantojot pieskaru, kas vilktas no viena punkta pret riņķa līniju, īpašību, iegūstam $EY = AY$ un $DY = AY$ . Tātad $DY = EY$ un $Y$ ir $DE$ viduspunkts. Sanāk, ka $X$ un $Y$ ir viens un tas pats punkts, jo abi atrodas $DE$ viduspunktā.

Apskatām četrstūri $AFHX$, tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $AFHX$ ir paralelograms.

Tātad $AF = HX = \frac{r+R}{2}$ kā paralelograma pretējās malas. Līdz ar to esam pierādījuši vajadzīgo.

**10.5.** *Gatavojoties vēlēšanām politiskās partijas saviem vēlētājiem kopumā ir devušas s (naturāls skaitlis) dažādus solījumus. Zināms, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Tajā pat laikā nav iespējams atrast divas partijas, kuru dotie solījumi sakristu pilnībā – ir iespējams atrast vismaz vienu solījumu, ko viena partija ir devusi, bet otra – nē. Kāds ir lielākais iespējamais partiju skaits, kas gatavojas vēlēšanām?*

Lielākais iespējamais dažādo solījumu komplektu skaits ir $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{s} = 2^s$ (kopas, kuras apjoms ir $s$, visu apakškopu skaits).

Zināms, ka katrai kopas $A$ apakškopai $B$ eksistē tās papildinājums $C$ līdz kopai $A$, un kopu $B$ un $C$ šķēlums ir tukša kopa, t. i., kopām $B$ un $C$ nav kopīgu elementu. Šādus divus solījumu komplektus (apakškopu un tās papildinājumu) nevar piekārtot partijām, jo neizpildās uzdevuma nosacījums, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Līdz ar to no katra šādu solījumu komplektu pāra partijām var piekārtot ne vairāk kā vienu solījumu komplektu. Tātad iespējamais partiju skaits ir vismaz divas reizes mazāks nekā visu kopas apakškopu skaits, t. i., $2^s : 2 = 2^{s-1}$.

Parādīsim, ka šāds partiju skaits ir iespējams.

Pieņemsim, ka eksistē viens solījums, kas kopīgs visām partijām. Tad no atlikušajiem $s-1$ solījumiem var izveidot $2^{s-1}$ dažādus solījumu komplektus (kopas, kuras apjoms ir $s-1$ dažādo apakškopu skaits). Līdz ar to esam izveidojuši $2^{s-1}$ atšķirīgus solījumu komplektus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad lielākais iespējamais partiju skaits ir $2^{s-1}$.

**11.1.** *Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka, noapaļojot izteiksmju* $\sqrt{10^{2n}-10^n}$ *un* $\sqrt{10^{2n}-10^n+1}$ *vērtības līdz tuvākajam naturālajam skaitlim, iegūtie skaitļi ir vienādi?*

Ievērosim, ka

$$10^{2n}-10^n<10^{2n}-10^n+\frac{1}{4}<10^{2n}-10^n+1;$$

$$10^{2n}-10^n<\left(10^n-\frac{1}{2}\right)^2<10^{2n}-10^n+1;$$

$$\sqrt{10^{2n}-10^n}<10^n-\frac{1}{2}<\sqrt{10^{2n}-10^n+1}.$$

Tātad izteiksmes $\sqrt{10^{2n}-10^n}$ vērtība tiks noapaļota uz $10^n-1$, bet $\sqrt{10^{2n}-10^n+1}$ - uz $10^n$.

Tas nozīmē, ka nevienai naturālai *n* vērtībai šie skaitļi nevar būt vienādi.

**11.2.** *Noteikt, kāds ir lielākais skaits, cik no pieciem naturāliem skaitļiem a,* $a+14$, $a+22$, $a+32$, $a+46$ *var būt pirmskaitļi.*

Ja *a* ir pāra skaitlis, tad starp dotajiem pieciem skaitļiem ir ne vairāk kā viens pirmskaitlis, t. i., ja $a=2$, tad pirmskaitlis ir 2, vai ja *a* ir kāds cits pāra skaitlis, tad starp dotajiem pieciem skaitļiem nav neviena pirmskaitļa.

Ja $a=3$, tad ir divi pirmskaitļi 3 un 17, pārējie skaitļi ir 25, 35 un 49, kas nav pirmskaitļi.

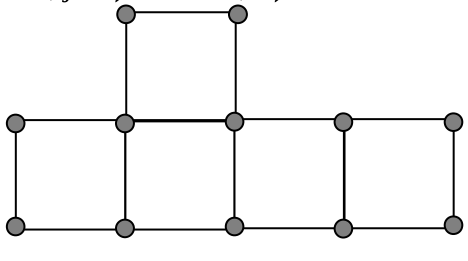
Ja $a>3$, tad tieši viens no skaitļiem *a*, $a+14$, $a+22$ dalās ar 3:

- ja $a=3k$, tad *a* dalās ar 3;
- ja $a=3k+1$, tad $a+14=3k+1+14=3k+15$ dalās ar 3;
- ja $a=3k+2$, tad $a+22=3k+2+22=3k+24$ dalās ar 3.

Tā kā šajā gadījumā vismaz viens no skaitļiem dalās ar 3, tad ne vairāk kā 4 no šiem skaitļiem var būt pirmskaitļi.

Četrus pirmskaitļus var iegūt, ja izvēlas, piemēram, $a=15$. Tad $a+14=29$, $a+22=37$, $a+32=47$ un $a+46=61$ ir pirmskaitļi.

**11.3.** 1. *zīmējumā redzamās figūras* 12 *virsotnēs nepieciešams ierakstīt pirmos* 12 *naturālos skaitļus* (*katrā virsotnē – vienu*) *tā, lai katras rūtiņas virsotnēs ierakstīto četru skaitļu summa būtu vienāda ar M. Vai to var izdarīt, ja* ***a)*** $M=28$; ***b)*** $M=26$ ?



1. zīm.

**a)** Viens no atrisinājumiem ir parādīts A3. zīm.

**b)** Pierādīsim, ka skaitļu izvietojums ar *M* = 26 neeksistē.

Pieņemsim, ka šāds izvietojums eksistē. Aplūkosim trīs kvadrātus, kuru malas attēlotas ar treknām līnijām (skat. A4. zīm.). Sastādīsim trīs vienādības:

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = M\ ;$$

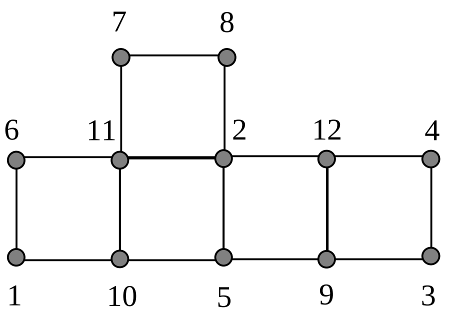
$$x_3 + x_4 + x_8 + x_9 = M\ ;$$

$$x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12} = M\ .$$

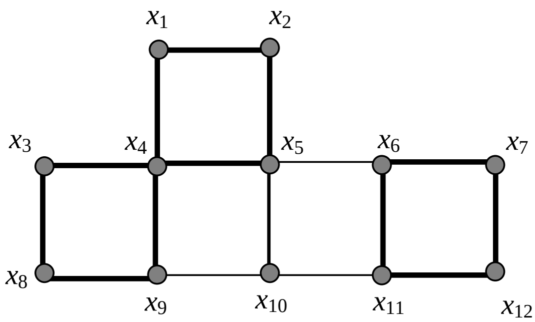
Apzīmēsim ar $S$ visu skaitļu no 1 līdz 12 summu: $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 78.$ Tad, saskaitot šīs trīs vienādības, iegūstam, ka

$$S + x_4 - x_{10} = 3M\ .$$

Ja $M = 26$, tad $S = 78 = 3 \cdot 26 = 3M$. Līdz ar to $x_4 = x_{10}$. Iegūta pretruna ar to, ka virsotnēs jāieraksta dažādi skaitļi.



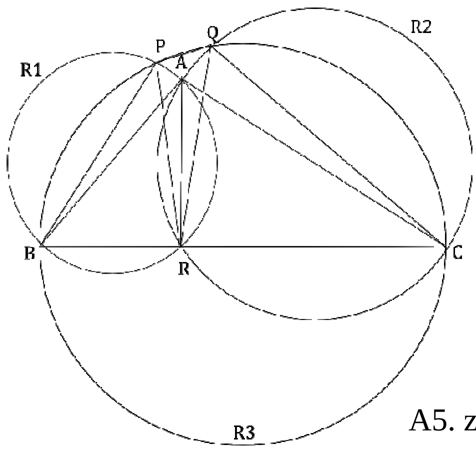

A3. zīm.




A4. zīm.

**11.4.** *Platleņķa trijstūra ABC platais leņķis ir  BAC . Novilktas trīs riņķa līnijas tā, ka trijstūra ABC malas ir attiecīgi šo riņķa līniju diametri. Bez trijstūra virsotnēm riņķa līnijas pa pāriem krustojas vēl trīs punktos – P, Q un R. Pierādīt, ka A ir trijstūra PQR bisektrišu krustpunkts.*

Apzīmēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir $AB$ ar $R_1$, kuras diametrs ir $AC$ – ar $R_2$ un kuras diametrs ir $BC$ – ar $R_3$ (skat. A5. zīm.).




A5. zīm.

Šīs riņķa līnijas katra iet caur attiecīgās malas galapunktiem un caur to augstumu pamatiem, kas atrodas uz divām pārējām malām vai to pagarinājumiem:

- $R_1$ iet caur punktiem $A$, $R$, $B$ un $P$;
- $R_2$ – caur $A$, $R$, $C$ un $Q$;
- $R_3$ – caur $B$, $C$, $Q$ un $P$,

pie kam $\angle BPC = \angle BQC = \angle ARB = 90°$. Punkts $A$ atrodas trijstūra $PQR$ iekšpusē ($CP$ un $BQ$ krustpunktā:

- gan $AP$, gan $CP$ ir perpendikulārs pret $BP$ ($R_1$ un $R_3$ īpašības) – tātad $P$, $A$ un $C$ atrodas uz vienas taisnes;

- gan $AQ$, gan $BQ$ ir perpendikulārs pret $CQ$ ($R_2$ un $R_3$ īpašības) – tātad $B$, $A$ un $Q$ atrodas uz vienas taisnes).

No $R_1$ ievilkto leņķu īpašībām: $\angle ABP = \angle ARP$, jo abi balstās uz viena un tā paša loka $AP$.

No $R_2$: $\angle ARQ = \angle ACQ$ (abi balstās uz loka $AQ$)

No $R_3$: $\angle PBQ = \angle PCQ$ (abi balstās uz loka $PQ$)

Ievērojot, ka $\angle ABP = \angle QBP$ un $\angle ACQ = \angle PCQ$, iegūstam, ka $\angle ARP = \angle ARQ$. Tātad $RA$ ir $\angle PRQ$ bisektrise.

No $R_2$ ievilkto leņķu īpašībām: $\angle AQR = \angle ACR$ (abi balstās uz $AR$)

No $R_3$: $\angle PQB = \angle PCB$ (abi balstās uz $BP$)

Ievērojot, ka $\angle ACR = \angle PCB$, iegūstam, ka $\angle PQB = \angle AQR$. Tātad $QA$ ir $\angle PQR$ bisektrise.

Tātad divas no trijstūra $PQR$ bisektrisēm krustojas punktā $A$ – tātad $A$ ir trijstūra $PQR$ bisektrišu krustpunkts, kas arī bija jāpierāda.

**11.5.** *Naturālus skaitļus a, b un c saista sakarība $c^2 = a^2 + b^2$. Pierādīt, ka katru no skaitļiem $c^2 + ab$ un $c^2 - ab$ var izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu.*

Aplūkojam skaitļus $x = \dfrac{a+b+c}{2}$, $y = \dfrac{a+b-c}{2}$, $p = \dfrac{c+a-b}{2}$ un $q = \dfrac{c-a+b}{2}$.

No sakarības $c^2 = a^2 + b^2$ viegli ievērot: ja kāds no skaitļiem $a$, $b$, $c$ ir nepāra skaitlis, tad no atlikušajiem viens ir nepāra, bet otrs – pāra. Tātad vai nu visi skaitļi $a$, $b$, $c$ ir pāra, vai starp tiem ir tieši divi nepāra skaitļi. Tas nozīmē, ka visi skaitļi $x$, $y$, $p$, $q$ ir veseli skaitļi.

Skaitļi $a$, $b$, $c$ ir Pitagora trijstūra malas, tāpēc no trijstūra nevienādībām $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ seko, ka visi skaitļi $x$, $y$, $p$, $q$ ir lielāki nekā nulle – tātad naturāli skaitļi.

Atliek ievērot, ka

- $$x^2+y^2 = \frac{(a+b)^2+2(a+b)c+c^2}{4} + \frac{(a+b)^2-2(a+b)c+c^2}{4} = \frac{(a+b)^2+c^2}{2} =$$
  $$= \frac{a^2+2ab+b^2+c^2}{2} = \frac{2c^2+2ab}{2} = c^2+ab;$$
- $$p^2+q^2 = \frac{c^2+2c(a-b)+(a-b)^2}{4} + \frac{c^2-2c(a-b)+(a-b)^2}{4} = \frac{c^2+(a-b)^2}{2} =$$
  $$= \frac{c^2+a^2-2ab+b^2}{2} = \frac{2c^2-2ab}{2} = c^2-ab.$$

**12.1.** *Izteiksmē $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 100 = 2014$ katru zīmi „$\pm$” aizvietoja vai nu ar „$+$”, vai ”–„ tā, lai izteiksme būtu patiesa. Kāds lielākais „$+$” zīmju skaits var būt šajā izteiksmē?*

Pierādīsim, ka „+” zīmju skaits nevar būt lielāks kā 83.

Pieņemsim pretējo, ka var būt 84 saskaitāmie ar „+” zīmi. Šajā gadījumā mazākā iespējamā izteiksmes vērtība būs tad, ja pie mazākajiem virknes locekļiem būs „+”, bet pie lielākajiem „–”. Tad mazākā izteiksmes vērtība ir

$$1+2+3+\ldots+84-85-\ldots-100 = \frac{1+84}{2}\cdot 84 - \frac{85+100}{2}\cdot 16 = 85\cdot 42 - 185\cdot 8 = 2090 > 2014.$$

Tā kā tika izveidota mazākā iespējamā izteiksmes vērtība ar šo „+” skaitu, tad visas citas izteiksmes būs ar vēl lielāku vērtību.

Pareizu izteiksmi ar 83 „+” zīmēm var iegūt, ja iepriekšējā izteiksmē nomaina „+” pret „–” pie saskaitāmā 38. Izteiksmes vērtība samazināsies par $38\cdot 2 = 76$ un būs vienāda ar $2090 - 76 = 2014$.

Tātad lielākais „+” skaits izteiksmē ir 83.

**12.2.** *Katram naturālam skaitlim n ir definēta funkcija* $f(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. *Pierādīt, ka visiem* $n>1$ *ir spēkā sakarība* $n+f(1)+f(2)+...+f(n-1)=nf(n)$.

Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi. Ievērojam, ka $f(1)=1$.

*Indukcijas bāze.* Ja $n=2$, tad $f(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ un dotā sakarība $2+f(1)=3=2f(2)$ ir patiesa.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka sakarība ir spēkā, ja $n=k$:

$$k+f(1)+f(2)+...+f(k-1)=kf(k). \qquad (*)$$

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka sakarība ir spēkā, ja $n=k+1$.

Abām vienādības (*) pusēm pieskaitot $f(k)+1$:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}=f(k)+1,$$

iegūstam

$$k+f(1)+f(2)+...+f(k-1)+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}=kf(k)+f(k)+1;$$

$$(k+1)+1+(f(1)+\frac{1}{2})+(f(2)+\frac{1}{3})+...+(f(k-1)+\frac{1}{k})=(k+1)f(k)+1.$$

Izmantojot, ka $1=f(1)$ un $f(k-1)+\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}=f(k)$, iegūstam

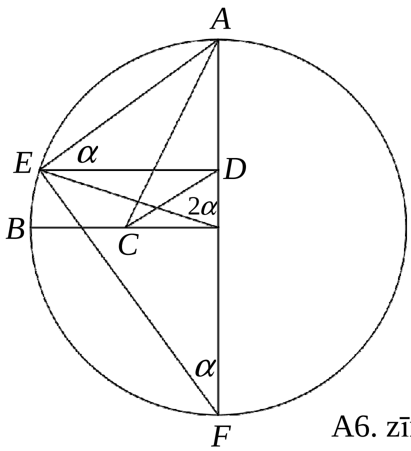
$$(k+1)+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k)=(k+1)f(k)+\frac{k+1}{k+1}.$$

Tātad $(k+1)+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k)=(k+1)(f(k)+\frac{1}{k+1})=(k+1)f(k+1)$.

Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n=2$, un no tā, ka apgalvojums ir spēkā, ja $n=k$, izriet, ka apgalvojums ir spēkā arī $n=k+1$, secinām, ka apgalvojums ir spēkā visām naturālām $n$ ($n>1$) vērtībām.

**12.3.** *Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Nogrieznis AC ir trijstūra BAO mediāna, CD ir trijstūra ACO bisektrise, punkts E izvēlēts uz mazākā loka AB tā, ka ED ir trijstūra AEO augstums. Aprēķināt leņķa AED lielumu grādos.*

Pagarinām *OA* tā, ka *AF* ir diametrs un novelkam nogriezni *EF* (skat. A6. zīm.). Tad trijstūris *AEF* ir taisnleņķa, jo $\angle AEF$ balstās uz diametru *AF*.




A6. zīm.

$\Delta AEF \sim \Delta ADE$ (pēc pazīmes „$\ell\ell$”), jo $\angle AEF=\angle ADE=90°$ un $\angle EAD$ ir kopīgs. Apzīmējam $\angle AFE=\angle AED=\alpha$ (kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros). Tad $\angle EOD=2\angle AFE=2\alpha$ kā centra leņķis, kas balstās uz to pašu loku kā $\angle AFE$.

Pieņemsim, ka $OA = OB = OE = 2x$. Tad $OC = x$ un no Pitagora teorēmas trijstūrī AOC seko, ka $AC = \sqrt{OC^2 + AO^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$. Izmantojot bisektrises īpašību (bisektrise $CD$ trijstūrī $AOC$), iegūstam

$$\frac{OD}{DA} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{AO - OD} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow OD\sqrt{5} = 2x - OD \Rightarrow OD = \frac{2x}{1+\sqrt{5}}.$$

No trijstūra $ODE$ iegūstam, ka $\cos 2\alpha = \frac{OD}{OE} = \frac{2x}{(1+\sqrt{5})\cdot 2x} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Izmantojot trigonometrisko formulu $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, iegūstam

- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$.
- Tā kā $\alpha$ ir šaurs trijstūra leņķis, tad
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$
- $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{4-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{-4-2\sqrt{5}}{8} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Esam ieguvuši, ka $\cos 4\alpha = -\cos\alpha$ jeb, izmantojot redukcijas formulas, $\cos 4\alpha = \cos(\pi - \alpha)$. Ievērojot, ka $\alpha$ ir šaurs trijstūra leņķis, iegūstam

$$4\alpha = \pi - \alpha \Rightarrow 5\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ jeb } \alpha = \frac{180°}{5} = 36°.$$

**12.4.** *Šaha festivālā piedalījās* 2014 *dalībnieki, daži savā starpā arī izspēlēja vienu šaha partiju. Zināms, ka starp jebkuriem trim festivāla dalībniekiem noteikti ir divi, kuri savā starpā ir izspēlējuši partiju. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais šaha partiju skaits, kas ir izspēlētas šajā festivālā?*

Apzīmēsim festivāla dalībniekus ar punktiem un, ja divi spēlētāji sava starpā ir izspēlējuši šaha partiju, tad atbilstošos punktus savienosim ar nogriezni. Tātad mums jānoskaidro, kāds ir mazākais novilkto nogriežņu skaits.

Ar $f(n)$ apzīmēsim mazāko nogriežņu skaitu kas novilkti starp $n$ punktiem un kam būtu spēkā uzdevumā dotā īpašība – starp katriem trim punktiem ir novilkts vismaz viens nogrieznis.

Apskatām $n+1$ punktu. Izmetot jebkuru vienu punktu, ir jābūt spēkā īpašībai $f(n+1) - d(i) \geq f(n)$, kur $d(i)$ – $i$-tajā punktā ieejošo nogriežņu skaits. Saskaitot šīs nevienādības visiem $n+1$ punktiem, iegūstam, ka $(n+1)f(n+1) - \sum d(i) \geq (n+1)f(n)$. Tā kā katrs nogrieznis ieskaitīts tieši divas reizes, tad $\sum d(i) = 2f(n+1)$. Tātad

$$(n+1)f(n+1) - 2f(n+1) \geq (n+1)f(n);$$

$$f(n+1) \geq \frac{(n+1)f(n)}{n-1}. \qquad (*)$$

Zināms, ka $f(3) = 1$.

Ievērojot, ka nogriežņu skaits ir naturāls skaitlis, pēc formulas (*) iegūstam, ka $f(4) \geq 2$, $f(5) \geq 4$, $f(6) \geq 6$, $f(7) \geq 9$, $f(8) \geq 12$ ... .

Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim, ka visiem naturāliem $k \geq 3$ izpildās $f(2k) \geq k(k-1)$ un $f(2k-1) \geq (k-1)^2$.

*Indukcijas bāze.* $f(3) = 1$, $f(4) = 2$.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka katram $k$ ( $2 \le k \le i$ ) izpildās nevienādības $f(2k) \ge k(k-1)$ un $f(2k-1) \ge (k-1)^2$.

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka minētās sakarības ir spēkā arī pie $k = i+1$.

Pēc pieņēmuma $f(2i) \ge i(i-1)$, $i > 1$.

No (*) seko, ka

$$f(2i+1) \ge \frac{f(2i)\cdot(2i+1)}{2i-1} \ge \frac{i(i-1)(2i+1)}{2i-1} = \frac{2i^3-i^2-i}{2i-1} = \frac{i^2(2i-1)-i}{2i-1} = i^2 - \frac{i}{2i-1} > i^2-1.$$

Tātad $f(2i+1) \ge i^2$.

No (*) seko, ka

$$f(2(i+1)) = f(2i+1+1) \ge \frac{2(i+1)f(2i+1)}{2i+1-1} = \frac{2(i+1)f(2i+1)}{2i} \ge \frac{(i+1)i^2}{i} = i(i+1).$$

Līdz ar to ir pierādīts, ka $f(2k) \ge k(k-1)$ un $f(2k-1) \ge (k-1)^2$ visiem naturāliem $k \ge 3$.

Tagad atliek aprakstīt, ka šāda situācija ir iespējama, t.i., starp 2014 punktiem, ievērojot uzdevuma nosacījumus, novilkti 1013042 nogriežņi.

Ievērojam, ka $f(2014) = f(2\cdot 1007) \ge 1007\cdot 1006 = 1013042$. Sadalām visus 2014 punktus divās vienāda izmēra grupās (katrā grupā 1007 punkti) un starp visiem vienas grupas punktiem novelkam visus nogriežņus. Katrā grupā nogriežņu skaits ir $\frac{1007\cdot 1006}{2}$, kopējais nogriežņu skaits ir $\frac{1007\cdot 1006}{2}\cdot 2 = 1007\cdot 1006$. Tādējādi ir iegūts tieši vajadzīgais nogriežņu skaits. Izvēloties jebkurus trīs punktus, no Dirihlē principa seko, ka divi no šiem punktiem pieder vienai no izveidotajām divām grupām, līdz ar to starp šiem diviem vienas grupas punktiem ir novilkts nogrieznis. Tātad starp jebkuriem trīs punktiem ir novilkts vismaz viens nogrieznis.

**12.5.** *Vai var atrast tādu naturālu n vērtību, kam piemīt īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa vienāda ar* $n^2$.

Pierādīsim, ka šādu naturālu skaitļu $n$ nav.

Apzīmējam apskatāmo dalītāju kvadrātu summu ar $S(n)$. Ievērosim, ka

$$S(n) < \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{16} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{n^2}.$$

Pamatosim, ka

$$\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{16} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{n^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \ldots < n^2$$

jeb, dalot ar $n^2$, iegūstam

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots < 1. \qquad (*)$$

Ja naturāls skaitlis $k$ atrodas starp divnieka pakāpēm, t. i., $2^a \le k \le 2^{a+1}$, kur $a$ – naturāls skaitlis, tad $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2^a}$ un $\frac{1}{k^2} \ge \frac{1}{2^{2a}}$.

Nevienādības (*) katru kreisās puses saskaitāmo $\frac{1}{k^2}$ aizstāsim ar $\frac{1}{2^{2a}}$, ja $2^a \le k \le 2^{a+1}$, tā tikai palielinot summas vērtību:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\ldots<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots.$$

Ievērosim, ka ir tieši $2^a$ tādi naturāli skaitļi, kas apmierina nevienādības $2^a \le k \le 2^{a+1}$. Tātad iegūtajā summā būs tieši $2^a$ saskaitāmie ar saucēju $2^{2a}$. Līdz ar to iegūtā summa ir

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^4}+\frac{8}{8^2}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Tika izmantota bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas (ar kvocientu 0,5 un pirmo locekli 0,5) visu locekļu summas formula.
Esam pamatojuši, ka

$$\frac{S(n)}{n^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots<1.$$

Tātad $S(n)<n^2$, līdz ar to nevienam $n$ nav iespējama vienādība $S(n)=n^2$.

*Piezīme.* Ir spēkā sakarība $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-1\approx 0{,}63\ldots$.