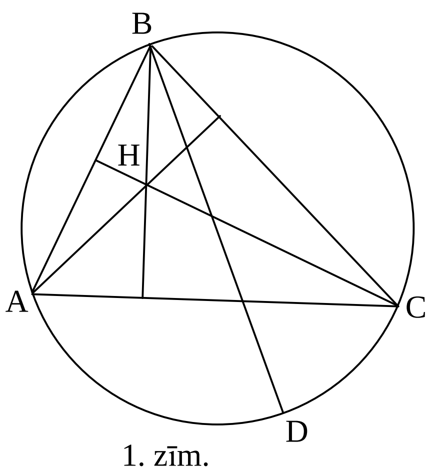
52. republikas olimpiāde matemātikā
9. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Reizinājumā xy katram pirmskaitlim, kas tur vispār parādās, jāparādās 3 vai 6, vai 9, vai 12 … reizes. Tāpēc $x \neq 31$ (y nedalās ar 31), $x \neq 33$ (y nedalās ar 11^2), $x \neq 34$ (y nedalās ar 17), $x \neq 35$ (y nedalās ar 25), $x \neq 37$ (y nedalās ar 37), $x \neq 38$ (y nedalās ar 19), $x \neq 39$ (y nedalās ar 13). Ja būtu $x=32=2^5$, tad jābūt $y=2z^3$, tātad $20<z^3<25$. Bet tāda naturāla z nav. Ja $x=36=2\cdot2\cdot3\cdot3$, tad jābūt $y=6z^3$ un $40<6z^3<50$, $6\frac{2}{3}<z^3<8\frac{1}{3}$. Der $z=2$, $y=48$. Tātad vienīgā atbilde ir **x=36**, **y=48**.

2. Tā kā BD ir diametrs, tad $\angle BCD=90°$, tātad $CD \perp BC$. Tā kā H ir augstumu krustpunkts, tad $AH \perp BC$. Tāpēc $AH \parallel CD$. Līdzīgi pierāda, ka $AD \parallel CH$.



1. zīm.

3. Apvilksim ap 100-stūri riņķa līniju. Apzīmēsim centra leņķi, kas atbilst vienai 100-stūra malai, ar α. Pagriezīsim balto punktu kopu par leņķiem α; 2α; 3α; …; 99α; 100α ap centru. Katrs baltais punkts "izceļo" cauri visiem sarkanajiem, tātad pavisam 100 reizes sakrīt baltie un sarkanie punkti. Pie pagrieziena par 100α iegūta sākotnējā pozīcija, tāpēc tajā neviens baltais punkts nesakrīt ne ar vienu sarkano. Tāpēc 100 sakrišanas sadalās pa 99 pozīcijām. Tātad kādā no šīm 99 pozīcijām 2 balti punkti sakrīt ar 2 sarkaniem. Vajadzīgos nogriežņus esam atraduši.

4. a) jā, aizstājot x ar x-1

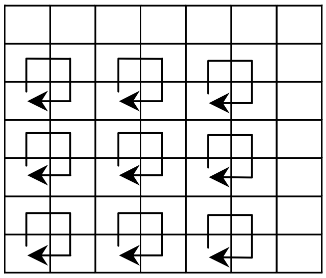
b) ja sākotnējam vienādojumam ir saknes x_1 un x_2, tad a un c maiņas rezultātā iegūst vienādojumu ar saknēm $\frac{1}{x_1}$ un $\frac{1}{x_2}$, bet "t pieskaitīšanas" rezultātā – vienādojums ar saknēm x_1-t un x_2-t. Tā kā $x^2+x-1=0$ ir divas saknes, bet $x^2+x+2=0$ sakņu nav, tad prasītais nav izdarāms

c) izdarot atļautās operācijas, vienādojuma diskriminants nemainās. Attiecībā uz a un c maiņu tas ir skaidrs; vienādojuma $a(x+t)^2+b(x+t)+c=0$ jeb $ax^2+(2at+b)x+(at^2+bt+c)=0$ diskriminants ir $(2at+b)^2-4a(at^2+bt+c)=b^2-4ac$.

Tā kā $x^2+x-1=0$ diskriminants ir 5, bet $x^2-4x+3=0$ diskriminants ir 4, tad prasītais nav izdarāms.

Piezīme: c) punkta atrisināšanas metode lietojama arī b) punktā.

5. a) var gadīties (skat. 2. zīm.)
b) nevar gadīties.



2. zīm.

A		A		A		A
	C		C		C	
A		A		A		A
	C		C		C	
A		A		A		A
	C		C		C	
A		A		A		A

3. zīm.

Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Apzīmēsim sākotnējo rūķīšu skaitu A rūtiņās ar a, C rūtiņās ar c, bet tukšajās rūtiņās ar b (skat 3. zīm.)

Skaidrs, ka **$c \le 9$**. Tā kā pēc diviem gājieniem rūķīši no A rūtiņām nonāks C rūtiņās, tad **$a \le 9$**. ieņemsim, ka no B rūtiņām x rūķīši pirmajā gājienā pāriet uz A rūtiņām, bet y rūķīši – uz C rūtiņām. tad **$y \le 9$** un arī **$x \le 9$** (jo šie x rūķīši vēl pēc diviem gājieniem nonāks C rūtiņās). Tāpēc $b=x+y\le 18$ un $a+b+c\le 9+18+9=36$ – pretruna.

52. republikas olimpiāde matemātikā
10. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Ja 1000-stūris ir $A_1A_2\ldots A_{1000}$, tad kvadrāti ir $A_nA_{n+250}A_{n+500}A_{n+750}$, n=1; 2; …; 250. Katrā no tiem jābūt pa melnai virsotnei, tātad jānokrāso vismaz **250** virsotnes (katrā kvadrātā pa vienai), un ar to arī pietiek.

Katru divu diametru virsotnes kopā ir taisnstūra virsotnes. Tā pēc augstākais vienā diametrā drīkst palikt 2 baltas virsotnes, un jānokrāso vismaz **499** virsotnes (katrā no 499 diametriem pa vienai); ar to arī pietiek.

2. Pierādīsim, ka pie n=1; 2; …; 2001 ir spēkā

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

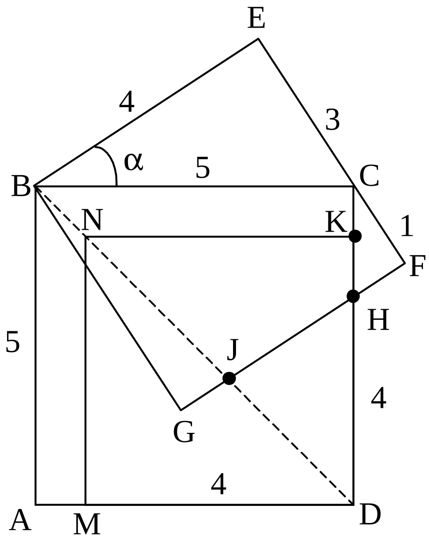
Tiešām, šī nevienādība ekvivalenta ar

$$(n+1)(a_1+a_2+\ldots+a_n) \le n((a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1})$$

jeb ar

$a_1+a_2+\ldots+a_n \le na_{n+1}$, kas seko no $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2002}$. Tā kā $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2002}}{2002} = \frac{1}{2002}$, tad no (1) seko vajadzīgais.

3. Atbilde: jā, tas ir iespējams. Skat. 4. zīm. trešo kvadrātu novieto simetriski kvadrātam BEFG attiecībā pret BD.



4. zīm.

Lai risinājums būtu pilnīgs, jāpamato:

a) BEFG pārklāj punktu K. Tā tiešām ir, jo CH>CF=1+CK

b) BEFG pārklāj punktu N. tā ir, jo $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}<1$, tāpēc $\angle CBE-45°$ un tātad $\angle CBG>45°=\angle CBN$. Tātad **stars** BN sākumposmā atrodas kvadrāta BEFG iekšpusē. Tā kā $BN=\sqrt{2}<3=BG<BJ$, tad arī punkts N atrodas BEFG iekšpusē.

4. Viegli pārbaudīt, ka der atbildes "n – nepāra skaitļa kvadrāts" un "$n=2k^2$, k – jebkurš naturāls skaitlis". Pierādīsim, ka citu tādu nav.

A. Pieņemsim, ka n – nepāra skaitlis, n=2k-1 ($k \in N$). Tad

$$n \cdot 2^{n-1}=(2k-1)\cdot 2^{2k-2}=(2k-1)(2^{k-1})^2.$$

Ja k=1, tad n=1; šī atbilde der. Ja k>1, tad 2^{k-1} ir pāra skaitlis. Tāpēc 2k-1 un $(2^{k-1})^2$ nav kopīgu dalītāju, izņemot 1. Tāpēc, lai $(2k-1)(2^{k-1})^2$ būtu kvadrāts, arī 2k-1 jābūt kvadrātam, k.b.j.

B. Pieņemsim, ka n – pāra skaitlis. Izsacīsim $n=2^x\cdot y$, kur $x\geq 1$, y – nepāra skaitlis. Tad

$$n\cdot 2^{n-1} = 2^x\cdot y\cdot 2^{2^x\cdot y-1} = y\cdot 2^{2^x\cdot y+x-1}.$$

Tā kā skaitļiem y un $2^{2^x\cdot y+x-1}$ lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad to reizinājums būs kvadrāts tad un tikai tad, ja katrs no tiem būs kvadrāts. Tāpēc y ir nepāra skaitļa kvadrāts un x – nepāra skaitlis. Tātad

$$n\cdot = y\cdot 2^x = z^2\cdot 2^{2k-1} = 2\cdot\left(z\cdot 2^{k-1}\right)^2,$$

k.b.j.

5. Atbilde: lielākā A sasniedzamā vērtība ir $2^5=32$.

1. Parādīsim, kā A var panākt, ka $|x-y|\geq 32$. Ar katru savu gājienu A izsvītro katru otro no uz tāfeles esošajiem skaitļiem (iedomājoties tos uzrakstītus augošā secībā). Tādējādi A garantē, ka pēc n viņa gājieniem **katri** divi uz tāfeles palikušie skaitļi atšķiras vismaz par 2^n. Pie n=5 iegūstam vajadzīgo vērtību 32.

2. Parādīsim, kā B var panākt, ka $|x-y|\leq 32$. Katrā savā gājienā B iztēlojas, ka uz tāfeles palikušie skaitļi uzrakstīti augošā kārtībā. Pēc A pirmā gājiena vai nu segmentā [0; 512), vai segmentā (512; 1024] nav vairāk par 256 skaitļiem; B ar savu kārtējo gājienu izsvītro pilnībā šo mazāko grupu (un varbūt vēl kaut ko), tādējādi garantējot, ka pēc B pirmā gājiena neviena starpība starp palikušajiem skaitļiem nav lielāka par $512=2^9$. Līdzīgi B garantē, ka pēc viņa 2., 3., 4., 5. gājiena neviena starpība starp palikušajiem skaitļiem nav lielāka par attiecīgi 2^8; 2^7; 2^6; $2^5=32$, k.b.j.

52. republikas olimpiāde matemātikā
11. klases uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim matrožu vecumu summu gados ar x, kapteiņa vecumu gados ar y. No dotā seko, ka

$$\frac{x+y}{13}-\frac{x}{12}=1 \qquad (1)$$

Mums jāaprēķina lielums $y-\frac{x}{12}=\frac{12y-x}{12}$. Bet no (1) seko

$$\frac{12x+12y-13x}{12\cdot 13}=1 \quad \text{jeb} \quad \frac{12y-x}{12\cdot 13}=1, \text{ tā tā } \frac{12y-x}{12}=13.$$

Atbilde: par 13 gadiem.

2. Sauksim pozīciju par labu, ja m un n abi ir pāra skaitļi, un par sliktu pretējā gadījumā. Acīmredzami:

a) pozīcija m=0; n=0, kuru iegūstot uzvar, ir laba,

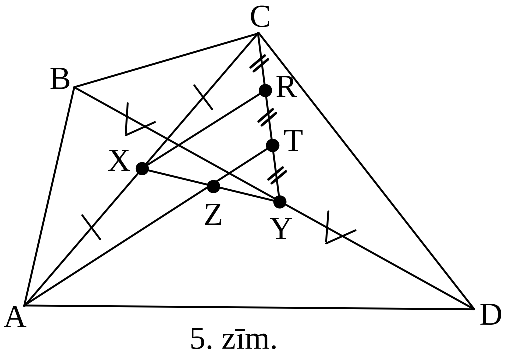
b) no labas pozīcijas var pāriet **tikai** uz sliktu (ja vispār var izdarīt gājienu),

c) no katras sliktas pozīcijas **ir iespējams** pāriet uz labu pozīciju, pie tam samazinot uz galda esošo konfekšu skaitu (tas garantē, ka spēle beigsies). Tātad tas, kuram ar savu gājienu izdosies iegūt labu pozīciju, uzvarēs. Secinu:

1) ja vai nu m, vai n ir nepāra skaitlis, uzvar Andris,

2) ja m un n abi ir pāra skaitļi, uzvar Juris.

3. a) pieņemam, ka T ir ΔBCD mediānu krustpunkts. Atzīmējam CT viduspunktu R. No mediānu īpašības seko, ka CR=RT=TY. No ΔACT viduslīnijas īpašības seko, ka XR||AT. Tā kā T ir RY viduspunkts, tad no šejienes TZ ir ΔRYX viduslīnija, tāpēc XZ=ZY, t.i., AT krusto XY tā viduspunktā. Apgalvojumus par trim pārējiem nogriežņiem pierāda līdzīgi.



5. zīm.

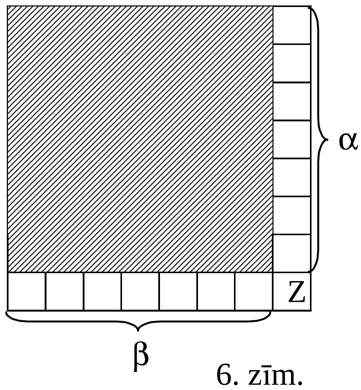
Piezīme: iespējami daudzi citi risināšanas ceļi. Piemēram, var punktos A, B, C, D novietot pa 1g masai un meklēt masu centra atrašanās vietu, vai arī izmantot punktu A, B, C, D, X, Y, Z, T rādiusvektorus ar patvaļīgu sākumu O.

b) no iepriekšējā punkta ZT=$\frac{1}{2}$XR=$\frac{1}{4}$AT, tātad ZT:ZA=1:3. Tātad apskatāmo 4 mediānu krustpunktu veidotais četrstūris ir homotētisks ABCD homotētijas centru Z un koeficientu $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Tā kā ABCD ir ievilkts četrstūris, tad tāds ir arī ABCD attēls homotētijā.

4. Atbilde: 2^{49}.

Atrisinājums. Izdalām kvadrātā apakškvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas un aizpildām to ar nullēm un vieniniekiem patvaļīgā secībā. Tā kā šādu aizpildāmu rūtiņu ir 49, katru aizpilda neatkarīgi no citām un katrā rūtiņā var ierakstīt vienu no diviem skolēniem, tad dažādo aizpildījumu ir $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{49} = 2^{49}$.

Lai uzdevums būtu atrisināts, mums vēl jāpierāda, ka atlikušo "apmali" **var** aizpildīt tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos, un to var izdarīt **vienā vienīgā veidā** (skat. 6. zīm.).



6. zīm.

Apgabalos α un β ierakstāmie skaitļi ir noteikti **viennozīmīgi**. Iesvītrotajā apgabalā un α ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis; tāpat iesvītrotajā apgabalā un β ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis (7 rindiņu resp. 7 kolonnu summa). Tāpēc α un β ierakstītās skaitļu summas vai nu abas ir pāra, vai abas – nepāra. Tāpēc Z skaitli **var** ierakstīt, un tas ir noteikts **viennozīmīgi**.

5. Minētajā progresijā A noteikti ietilpst skaitlis 1 un skaitlis n-1 (tiešām, ja $n \vdots x$ un $n-1 \vdots x$, tad arī $n-(n-1) \vdots x$, tātad $\vdots x$ un x=1). Tālāk šķirojam vairākus gadījumus:

1) n – nepāra skaitlis. Tad $1 \in A$, $2 \in A$; tātad progresija ir 1; 2; … . Lai tā saturētu n-1, tai jāsatur visi skaitļi 1; 2; 3; …; n-2; n-1. Tātad n ir savstarpējs pirmskaitlis ar **visiem** naturāliem x, $x \le n-1$. Tad **n ir pirmskaitlis > 3**. Skaidrs, ka šīs atbildes der.

2) n – pāra skaitlis, n nedalās ar 3. Tad $1 \in A$, $2 \notin A$, $3 \in A$; tātad šī progresija A ir 1; 3; 5; 7; …; n-3; n-1. Tātad n nedalās ne ar vienu nepāra skaitli, izņemot 1. Tātad $n=2^k$, $k \in N$. Skaidrs, ka šīs atbildes der.

52. republikas olimpiāde matemātikā
12. klases uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Tā kā 3(4n+3)-2(6n+1)=7, tad 7 dalās ar katru skaitli, ar kuru dalās gan 4n+3, gan 6n+1. Tāpēc (4n+3, 6n+1)≤7. Piemērs ar n=1 pierāda, ka vērtība 7 ir sasniedzama.
2. Aizstāsim mazāko no x_i ar 1, otro mazāko ar 2 utt. Nevienādības kreisā puse no tā var tikai samazināties vai palikt nemainīga.

Pieņemsim, ka pēc aizstāšanas kādiem i un j pastāv nevienādības i<j un $x_i>x_j$. Pierādīsim, ka, mainot x_i un x_j vietām, nevienādības kreisā puse samazināsies.

Tiešām, mums jāpierāda, ka

$$\frac{x_i}{i\cdot 2^i}+\frac{x_j}{j\cdot 2^j}>\frac{x_j}{i\cdot 2^i}+\frac{x_i}{j\cdot 2^j}.$$

Šī nevienādība ekvivalenta ar

$$\left(\frac{1}{i\cdot 2^i}-\frac{1}{j\cdot 2^j}\right)\left(x_i-x_j\right)>0, \text{ kas ir patiesa.}$$

Izdarām šādas izmaiņas, kamēr vien iespējams. Kad tas vairs nebūs iespējams, būs $x_1=1$; x_2; …; $x_n=n$, un izteiksmes vērtība būs $\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot 2^2}+\frac{3}{3\cdot 2^3}+...+\frac{n}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}-1-\frac{1}{2^n}$. Tā kā mūsu izdarīto izmaiņu rezultātā izteiksmes vērtība varēja tikai samazināties, uzdevums atrisināts.
3. 1) Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka prasītais sasniedzams patvaļīgam naturālam monētu skaitam n, izdarot 1; 2; …; n-1 apgriešanas (n≥3).
Bāze n=3. Sākotnējā situācija var būt LLL, LLĢ, LĢĢ, ĢĢĢ. Ja tā ir LLL, apgriežam 1 monētu un pēc tam – abas pārējās. Ja tā ir LLĢ, apgriežam vienu L un pēc tam divus Ģ. Pārējie gadījumi simetriski apskatītajiem.
Pieņemsim, ka prasītais izdarāms 2k-1 monētām, un apskatām 2k+1 monētas. Šķirojam divus gadījumus:

a) sākumā visas monētas ir ar vienu un to pašu pusi uz augšu. Sadalām gājienus pāros: (1, 2k), (2, 2k-1), …, (k, k+1). Ar vienā pārī ietilpstošajiem gājieniem griežam apkārt pa reizei visas 2k+1 monētas. tad katra monēta tiks apgriezta k reizes, un beigās visas atkal būs ar vienu pusi uz augšu.

b) sākumā monēta A ir ar ģerboni uz augšu, bet monēta B – ar lasi uz augšu. Vispirms, izdarot gājienus 1, 2, …, 2k-2, panākam, ka pārējās 2k-1 monētas ir ar vienu pusi uz augšu. Tāpēc tagad ir 2k vienādi novietotas monētas, bet viena novietota atšķirīgi no tām. Apgriežam 2k-1 no vienādi novietotajām monētām; atkal ir 2k vienādi novietotas un 1 "citādi" novietota monēta. Ar pēdējo gājienu apgriežam 2k vienādi novietotās monētas.

2) pieņemsim, ka no kādas sākotnējās situācijas var iegūt, gan "visus ģerboņus", gan "visus lašus". Tad "visus lašus" var pārveidot par "visiem ģerboņiem" ar (1+2+…+1000)·2 apgriešanām. Bet katrai monētai šādai pārveidošanai vajag nepāra skaitu apgriešanu. Tā kā monētu ir nepāra skaits, tad arī kopējam apgriešanu skaitam jābūt nepāra – pretruna.
4. Skat. 7. zīm. a) ievērojam, ka, pagriežot ΔA_1CA par 60° pulksteņa rādītāja virzienā, tas pārveidojas par ΔBCB_1 (jo $CA_1=CB$, $CA=CB_1$, $\angle A_1CB=\angle ACB_1=60°$). Tātad par 60° pagriežas arī mala AA_1, kas pāriet par B_1B. Tātad AA_1 un B_1B veido 60° lielu leņķi, k.b.j.
b)tā kā $\angle ASB+\angle AC_1B=120°+60°=180°$, tad ap $ASBC_1$ var apvilkt riņķa līniju. Tad $\angle C_1SB=\angle C_1AB=60°$.

Līdzīgi $\angle A_1SB=60°=\angle A_1CB$, tāpēc ap BA_1SC var apvilkt riņķa līniju. No tā savukārt seko, ka $\angle CSB=\angle CA_1B=60°$.

Tātad **$\angle C_1SB=\angle CSB$**. No tā seko, ka C un C_1 atrodas uz viena un tā paša stara ar sākumpunktu S. Uzdevums atrisināts.

5. Funkcijas f(f(x)) "iedarbību" uz kopu A var attēlot ar grafu:

$$1 \to 10 \to 11 \to 6 \to 3 \to 12 \to 2 \to 9 \to 5 \to 13 \to 7 \to 4 \to 8$$

Tātad f(f(x)) attēlojas ar ciklu. Tāpēc arī f(x) attēlojas ar ciklu; ja f(x) sastāvētu no vairākiem cikliem, tad tiem būtu jāparādās arī f(f(x))grafā.

Turpmāk ar f^k sapratīsim funkciju

$$\underbrace{f(f(f(\ldots(f)}_{\text{k reizes f}}\ldots).$$

Tā kā f ir cikls, tad f^{13} ir identiskā funkcija: $f^{13}(x)=x$ visiem x. Tas nozīmē, ka $f^{14}=f(x)$. Bet $f^{14}(x)=(f(f(x)))^7$. Tātad f(x) vērtību tabulu varam iegūt, f(f(x)) grafā katram x atrodot 7 vietas "uz priekšu" esošo elementu:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f(x)	9	1	4	12	11	7	3	2	10	5	13	8	6

No risinājuma seko, ka tāda f ir viena vienīga.