Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 46. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

46.1 Pieņemsim, ka kartiņas tika izdalītas n reizes. Katru reizi tika izdalītas visas trīs kartiņas, tātad kopējā izdalīto skaitļu summa katrā reizē bija viena un tā pati. Apzīmēsim to ar s. Tādējādi n reizēs visu izdalīto kartiņu skaitļu summa būs $n \cdot s$.
Tā kā zināmas saņemto skaitļu summas katram cilvēkam atsevišķi, tad kopējo saņemto skaitļu summu var aprēķināt arī šādi: $13+15+23 = 51 = 1 \cdot 51 = 3 \cdot 17 = n \cdot s$.
Tā kā skaitlim 51 citu sadalījumu naturālos reizinātājos vairs nav, tad iespējamas tikai 4 situācijas:

1) n=1, s=51. Tas nav iespējams, jo uz katras kartiņas uzrakstītais skaitlis nav lielāks par 10; tātad $s \leq 3 \cdot 10 = 30 < 51$;

2) n=51, s=1. Arī tas nav iespējams, jo uz katras kartiņas uzrakstītais skaitlis nav mazāks par 1; tātad $s \geq 3 \cdot 1 = 3 > 1$;

3) n=17, s=3. Tas nav iespējams, jo tad vienīgā iespēja, kā iegūt s=3, būtu, ja uz katras kartiņas uzrakstīts skaitlis 1. Bet tad visās reizēs visi cilvēki saņemtu vienādu punktu skaitu (=1), tātad n=17 reizēs visām summām būtu jābūt vienādām (=17), nevis atšķirīgām (13, 15 un 23).

4) n=3, s=17. Tātad kartiņas tiek dalītas 3 reizes, un skaitļu summa uz visām trim kartiņām ir 17.

Apzīmēsim skaitļus uz kartiņām ar $x \leq y \leq z$. Tad $x+y+z=17$.

Maksimālā summa, kuru viens cilvēks trijās reizēs var iegūt, ir $3 \cdot z$. Tā kā lielākā reāli iegūtā summa ir 23, tad skaidrs, ka $3 \cdot z \geq 23$, no kurienes seko, ka $z \geq 8$.

Mēģināsim precīzi noskaidrot z vērtību.

Ja z =10, tad z ietilpst kā saskaitāmais augstākais vienā no summām 13 un 15. (Ja ietilptu abās, tad skaidrs, ka tieši vienu reizi. Bet tas nozīmē, ka, summējot kopā skaitļus, kurus šie abi cilvēki saņem pārējās divās reizēs, iegūst $2(x+y)$. Reāli šajās reizēs saņemts (13-10)+(15-10)=3+5=8; tātad $2(x+y)=8$ jeb $x+y=4$. Bet tad skaitļu summa $x+y+z = 4+10 = 14 < 17$.)

Tādā gadījumā summā 23 skaitlim z nākas ietilpt divas reizes. Tad viens no atlikušajiem skaitļiem (x un y) ir $23-2\cdot10=3$. Otru skaitli iegūst, no visu triju skaitļu summas atņemot abus zināmos, t.i., $17-10-3=4$. Bet no šiem trim skaitļiem 3, 4 un 10 nevar rasties summa 13 (Ja summā ņem 10, tad $13-10=3$, ko nevar iegūt kā divu skaitļu summu; ja summā 10 neņem, tad lielākā summa, ko var iegūt, ir $3\cdot4=12<13$). Iegūta pretruna ar doto, tātad $z\neq10$.

Ja $z=8$, tad, lai iegūtu summu 23, $y=7$ (pretējā gadījumā, ja $y<7$, tad lielākā iespējamā summa ir $3\cdot z=3\cdot8=24>23$, bet nākamā lielākā ir $2\cdot z+y = 2\cdot8+y < 16+7=23$). Tādā gadījumā $x=17-8-7=2$. Bet no skaitļiem 2, 7 un 8 nevar rasties summa 13 (šādā summā var ietilpt tikai viens no skaitļiem 7 un 8, jo pat $2\cdot7=14>13$; bet tad lielākā iespējamā summa ir $8+2\cdot2=12<13$). Atkal pretruna ar doto. Tātad $z\neq8$.

Lai $8\leq z\leq10$, atliek tikai viena iespēja $z=9$. Aplūkosim šo gadījumu.

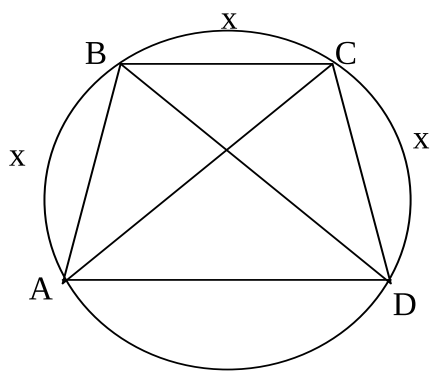
Vismaz viens z piedalās summas 13 vai 15 veidošanā (pretējā gadījumā visiem trim z būtu jāietilpst summā 23, bet $3\cdot z=3\cdot9=27>23$). Bet tad $2x\leq15-9=6$ jeb $x\leq3$.

Viegli pārbaudīt, ka neder komplekti 1; 7; 9 vai 2; 6; 9 - vienā gadījumā nevar izveidot summu 13, otrā - summu 15.

Der skaitļi 3; 5; 9. Parādīsim, kādus skaitļus uz kartītēm var būt saņēmis katrs cilvēks; šie skaitļi rakstīti saņemšanas secībā :

1. cilvēks: 3; 5; 5 (summa ir $3+5+5=13$)
2. cilvēks: 9; 3; 3 (summa ir $9+3+3=15$)
3. cilvēks: 5; 9; 9 (summa ir $5+9+9=23$)

46.2. Pieņemsim, ka uz pusēm tiek dalīti leņķi A un D (sk. 46.1. zīm.). Tad $\angle BAC=\angle CAD$ un $\angle ADB=\angle CDB$. No ievilktu leņķu īpašībām $\angle BAC=\angle BDC$ (tie abi balstās uz vienu loku). Tātad $\angle BAC=\angle CAD=\angle ADB=\angle CDB$. Apzīmējam lokus, uz kuriem balstās šie leņķi, ar x. Tātad



46.1. zīm.

.

Lai $\angle ABC$ (arī $\angle BCD$) būtu ar četrstūra diagonāli sadalīts daļās, kuru lielumu attiecība ir 1:2, iespējami divi gadījumi:

1) $\overset{\cup}{AD}=2x$; tad $x+x+x+2x=5x=360°$. No šejienes seko, ka $x=72°$. Tā kā riņķa līnijā ievilkta leņķa lielums ir puse no tā loka lieluma, uz kura tas baltās, tad leņķi, kuri balstās uz loku, kura lielums ir x, ir 36° lieli, bet tie, kuri balstās uz 2x lielo loku, ir 72° lieli.

Tāpēc $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=36°+36°=72°$;

$\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=36°+36°=72°$;

$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=72°+36°=108°$;

$\angle BCD=\angle BCA+\angle DCA=36°+72°=108°$.

2) $\overset{\cup}{AD}=\frac{x}{2}$; tad $x+x+x+\frac{x}{2}=3\frac{1}{2}x=360°$. No šejienes seko, ka $x=\frac{720^0}{7}$.

Tā kā uz loku x balstošies leņķi ir $\frac{720^0}{2\cdot 7}=\frac{360^0}{7}$ lieli, bet uz loku $\frac{x}{2}$ balstošies - ir $\frac{720^0}{2\cdot 2\cdot 7}=\frac{180^0}{7}$ lieli, tad

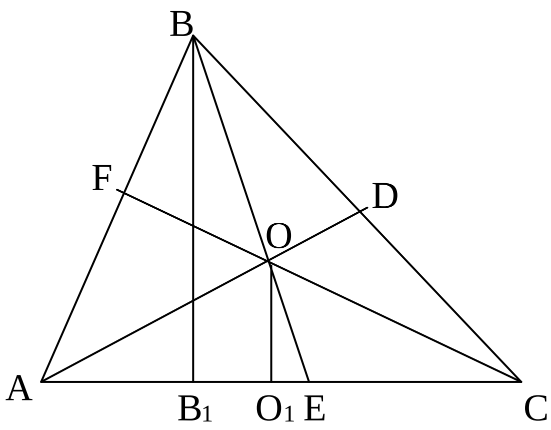
$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=\frac{360^0}{7}+\frac{360^0}{7}=\frac{720^0}{7}$;

$\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=\frac{360^0}{7}+\frac{360^0}{7}=\frac{720^0}{7}$;

$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=\frac{180^0}{7}+\frac{360^0}{7}=\frac{540^0}{7}$;

$\angle BCD=\angle BCA+\angle DCA=\frac{360^0}{7}+\frac{180^0}{7}=\frac{540^0}{7}$.

Figūras Q laukumu apzīmējam ar $[Q]$.



46.2.zīm.

Apzīmējam $AD=BE=CF=$a (skat. 46.2. zīm.). Novelkam trijstūru AOC un ABC augstumus – attiecīgi OO_1 un BB_1. Aplūkojam ΔB_1BE un ΔO_1OE. $OO_1 \parallel BB_1$ kā pret vienu malu vilkti augstumi, OE un BE atrodas uz vienas taisnes; O_1E un B_1E – arī. Tātad abu trijstūru visas malas ir savstarpēji paralēlas un $\Delta B_1BE \sim \Delta O_1OE$. No trijstūru līdzības seko, ka

$$\frac{OE}{BE} = \frac{OO_1}{BB_1} \qquad (1).$$

Tā kā $[AOC]=\dfrac{OO_1 \cdot AC}{2}$ un $[ABC]=\dfrac{BB_1 \cdot AC}{2}$, tad

$$\frac{[AOC]}{[ABC]} = \frac{OO_1 \cdot AC \cdot 2}{2 \cdot BB_1 \cdot AC} = \frac{OO_1}{BB_1} \qquad (2).$$

No (1) un (2), kā arī, ievērojot pieņemto apzīmējumu BE=a, seko

$$\frac{[AOC]}{[ABC]} = \frac{OO_1}{BB_1} = \frac{OE}{BE} = \frac{OE}{a}.$$

Līdzīgi spriežot par ΔCOB un ΔCAB, kā arī pēc tam - par ΔBOA un ΔBCA, iegūst analogas sakarības:

$$\frac{[COB]}{[CAB]} = \frac{OD}{a} \quad \text{un} \quad \frac{[BOA]}{[BCA]} = \frac{OF}{a}.$$

Saskaitot iegūtās vienādības, iegūst:

$$\frac{[AOC]+[COB]+[BOA]}{[ABC]} = \frac{OE+OD+OF}{a} \qquad (3).$$

Tā kā [AOC]+[COB]+[BOA]=[ABC], tad no (3) seko:

$$1 = \frac{[ABC]}{[ABC]} = \frac{OE+OD+OF}{a} \quad \text{jeb} \quad a = OE + OD + OF \qquad (4)$$

Viegli ievērot, ka $BO = BE - OE = a - OE$; $OA = AD - OD = a - OD$;

$OC = FC - FO = a - FO$. Tātad

$BO+OA+OC = (a-OE)+(a-OD)+(a-FO) = 3a-(OE+OD+FO) = 3a-a = 2a$.

No (4) un tikko aprēķinātā, pasvītrotā izriet arī vajadzīgā vienādība:

$OA + OB + OC = 2\cdot(OD + OE + OF)$.

46.4.. No divām pēc kārtas sekojošām partijām katrs spēlētājs izlaiž augstākais vienu partiju, jo pēc jebkuras partijas, neatkarīgi no tās rezultāta, malā stāvētājs tiek atkal iesaistīts nākošajā partijā.

Tā kā zināms, ka viens spēlētājs nospēlējis 5 partijas, tad skaidrs, ka partiju skaits nav lielāks par $5\cdot2+1=11$ (te tiek ņemts vērā, ka šis spēlētājs var būt izlaidis gan pirmo, gan pēdējo partiju). Tā kā otrs spēlētājs nospēlējis 11 partijas, tad skaidrs, ka vismaz 11 partijām ir jābūt. Tātad partiju skaits ir precīzi 11, bez tam otrais spēlētājs piedalījies visās partijās.

Ja šis otrais spēlētājs piedalījies visās partijās, ar pirmo spēlēdams no tām tikai 5 partijas, tad skaidrs, ka ar trešo viņš spēlējis visas pārējās jeb 11-5=6 partijas.

Tātad 3 spēlētājs ir nospēlējis 6 partijas.

45.5. No tā, ka turnīrā piedalījās 10 spēlētāji un katrs spēlēja ar katru, izriet, ka jebkurš no spēlētājiem ir piedalījies 9 spēlēs.

Tā kā katrs spēlētājs jebkurā spēlē vai nu uzvarēja, vai zaudēja (neizšķirtu nav), tad skaidrs, ka i-tā spēlētāja uzvaru skaitu var izteikt ar zaudējumu skaitu:

$x_i=9-y_i$; tikpat labi spēkā sakarība $9-x_i=y_i$.

Šīs vienādības ceļ kvadrātā un saskaita, iegūstot:

$x_i^2+(9-x_i)^2 = (9-y_i)^2+ y_i^2$

$x_i^2+81-18x_i+ x_i^2 = 81-18y_i+ y_i^2+ y_i^2$ jeb

$2x_i^2+81-18x_i = 81-18y_i+2y_i^2$ (1)

Saskaita vienādības (1) pie i=1; 2; ...; 10 :

$$2\sum x_i^2 - 18\sum x_i + 810 = 2\sum y_i^2 - 18\sum y_i + 810 \qquad (2).$$

Tā kā uzvara vienam spēlētājam ir zaudējums kādam citam, tad ar katru spēli nāk klāt pa vienai uzvarai un zaudējumam. Līdz ar to uzvaru un zaudējumu skaits visiem spēlētājiem kopā ir vienāds: $\sum x_i=\sum y_i$.

Ņemot to vērā, izteiksme (2) pārveidojas sekojoši:

$2\sum x_i^2=2\sum y_i^2$ jeb $\sum x_i^2=\sum y_i^2$, kas arī bija jāpierāda

46.6. No dotā seko, ka visu kvadrātvienādojumu diskriminanti ir nenegatīvi (lai eksistētu saknes); tātad

b^2-a^2≥0; a^2-c^2≥0; c^2-b^2≥0 jeb

$b^2 \geq a^2$; $a^2 \geq c^2$; $c^2 \geq b^2$.

No šīm nevienādībām acīmredzami seko: $b^2 \geq a^2 \geq c^2 \geq b^2$, no kurienes, savukārt, seko, ka $a^2 = b^2 = c^2$ un $|a| = |b| = |c|$.

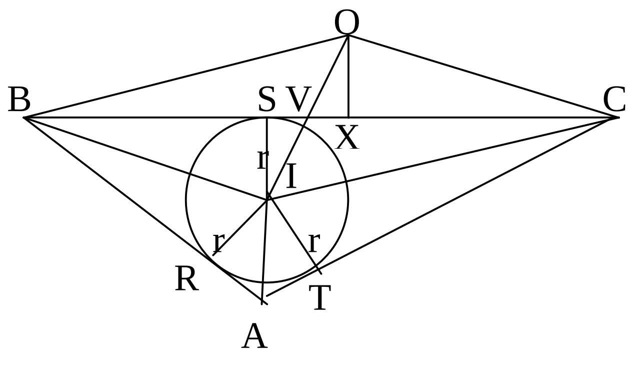
Tātad vienādojumu diskriminanti vienādi ar 0 (no $a^2 = b^2$ seko b^2-a^2=0 utml.). Bet tas nozīmē, ka pirmā vienādojuma sakne ir $\frac{-b}{a}$, otrā vienādojuma sakne ir $\frac{-\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$ un trešā vienādojuma sakne ir $\frac{-c}{b}$. Atkarībā no tā, vai skaitļi *a*, *b* un *c* ir pozitīvi vai negatīvi, vienādojumu saknes pieņem vērtības +1 vai -1. Parādīsim, ka abas šīs vērtības iespējamas.

Piemēram, *a* = 2, *b* = 2, *c* = -2. Tad dotie vienādojumi izskatās šādi:

$2x^2+4x+2=0$, $-2x^2+4x-2=0$ un $2x^2-4x+2=0$. Šo vienādojumu saknes ir:

1. vienādojumam $x = \frac{-2}{2} = -1$; 2.vienādojumam $x = \frac{-2}{-2} = 1$ un trešajam vienādojumam $x = \frac{-(-2)}{2} = 1$.

Figūras *F* laukumu apzīmēsim ar [*F*], ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar *r*. Tā kā ∠*A*>90°, tad apvilktās riņķa līnijas centrs *O* ir ārpus trijstūra – pretējā pusē nogrieznim *BC* nekā trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs *I* (skat. 46.3. zīm.).



46.3. zīm.

Dots, ks [*IBC*]=[*OBC*]. Tā kā šo trijstūru mala *BC* ir kopīga, tad no trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas seko, ka arī to augstumi pret šo malu *OX*=*IS*. Tā kā *SI* ir ievilktās riņķa līnijas rādiuss *r*, tad arī *OX* = *r*.

$\Delta OXV=\Delta ISV$, jo $\angle OVX=\angle IVS$ kā krustleņķi, $\angle OXV=\angle VSI=90°$ un malas $OX=IS$.
Tātad

$[OXV]=[ISV]$ (1)

$[IOC]$ var izteikt kā $[IVC]+[VOC]$. No (1) seko, ka

$[VOC]=[VOX]+[XOC]=[ISV]+[XOC]$.

Tātad $[IOC]=[IVC]+[ISV]+[XOC]=[ISC]+[XOC]$.

1) pieskaru nogriežņi ir vienādi, tātad $RB=SB$, $AR=AT$, $TC=SC$;

2) riņķa līnijas rādiuss, kas vilkts līdz pieskares pieskaršanās punktam, veido ar šo pieskari 90° leņķi, tātad

$\angle IRB=\angle IRA=\angle ITA=\angle ITC=\angle ISC=\angle ISB=90°$;

3) taisnleņķa trijstūri ir vienādi, ja divas to malas ir atbilstoši vienādas.

Tādējādi:

$\Delta ISC=\Delta ITC$ (IC – kopīga, $SC=TC$, $\angle ITC=\angle ISC=90°$),

$\Delta IRB=\Delta ISB$ (IB – kopīga, $RB=SB$, $\angle IRB=\angle ISB=90°$),

$\Delta ITA=\Delta IRA$ (IA – kopīga, $AR=AT$, $\angle IRA=\angle ITA=90°$).

Ja trijstūri ir vienādi, tad arī to laukumi ir vienādi. Izmantojot iegūtās laukumu vienādības, pārveido izteiksmi (2):

$[IAB]+[IOC]=[IAR]+[IBR]+[ISC]+[XOC]=[IAT]+[ISB]+[ITC]+[XOC]$.

Izmantojot iepriekš iegūto un to, ka [IAB]=[IAR]+[IBR], izsaka interesējošo summu

$[IAB]+[IOC]=[IAR]+[IBR]+[ISC]+[XOC]$ (2).

Tālāk izmanto sekojošus faktus:$\Delta OXB=\Delta OXC$ kā taisnleņķa trijstūri, kuru divas malas ir vienādas (OX - kopēja, $BO=CO$ kā apvilktās riņķa līnijas rādiusi). Tātad summu (2) var pārrakstīt vēl savādāk:

$[IAB]+[IOC]=[IAT]+[ISB]+[ITC]+[XOB]$. (3)

Viegli ievērot, ka ΔIAT un ΔITC kopā veido ΔIAC. Tātad

$[ICA]=[IAT]+[ITC]$ (4).

Var redzēt, ka $[IBO]=[ISB]+[ISV]+[BOV]$. No (1) tālāk iegūst, ka

$[IBO]=[ISB]+[OXV]+[BOV]$.

Tā kā $[OXB]=[OXV]+[BOV]$, tad

$[IBO]=[ISB]+[OXB]$. (5)

Izmantojot (4) un (5), vienādību (3) pārraksta vēl savādāk:

$[IAB]+[IOC] = ([IAT]+[ITC]) + ([ISB]+[XOB]) = [ICA]+[IBO]$, kas arī bija jāpierāda.

46.8. Jā, var. Piemēram, tādi ir skaitļi

$$\frac{1}{1996!}, \frac{2}{1996!}, \frac{3}{1996!}, \ldots, \frac{1996}{1996!} .$$

Katrā no šīm daļām skaitītājā atrodas kāds no 1996! dalītājiem, jo visi skaitītāji ≤1996, tātad tos var noīsināt, atstājot skaitītājā tikai "1". Tātad izpildās a) nosacījums – katrs no minētajiem ir naturālam skaitlim apgriezts skaitlis.

Tāpat viegli redzēt, ka katrs no šiem skaitļiem no nākošā atšķiras par vienu un to pašu lielumu $\frac{1}{1996!}$, t.i., izpildās arī nosacījums b).

46.9. Tā kā 3*n* – labs skaitlis, tad to var izteikt formā

$3n = x^2 + 2y^2$.

Vispirms pierādīsim, ka tad ir spēkā sekojošas vienādības:

$$(1)\ n = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{x-y}{3}\right)^2,$$

$$(2)\ n = \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{x+y}{3}\right)^2.$$

To pārbauda, atverot iekavas.

Atliek pārbaudīt, ka vienā no gadījumiem abi skaitļi iekavās ir veseli skaitļi.

Tā kā x^2+2y^2 dalās ar 3, tad iespējami trīs varianti . Tos atrod, aplūkojot visus gadījumus pēc moduļa 3.

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x^2+2y^2	0	2	2	1	0	0	1	0	0

Tātad, $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \pmod 3$ ja

a) gan *x*, gan *y* dalās ar 3. Tad gan $x+2y$, gan $x-y$ dalās ar 3, un izteiksmes abās iekavās ir veseli skaitļi.

b) *x* un *y*, dalot ar 3, abi dod atlikumu 1 vai arī – abi dod atlikumu 2. Tādā gadījumā $x+2y \equiv 3x \equiv 0 \pmod 3$ un $x-y \equiv 0 \pmod 3$. Arī šajā gadījumā izteiksmes (1) abās iekavās ir veseli skaitļi.

c) x un y, dalot ar 3, dod viens atlikumu 1, otrs – atlikumu 2. Šajā gadījumā $x \equiv -y \pmod 3$; tātad $x-2y \equiv 3x \equiv 0 \pmod 3$ un $x+y \equiv 0$ (mod 3).

Visi iespējamie gadījumi aplūkoti, un katrā kāda no izteiksmēm der. Tātad, ja 3*n* ir labs skaitlis, tad arī *n* ir labs skaitlis.

46.10. Tā kā katrā partijā tieši viens uzvarēja, tad kopējais partiju skaits vienāds ar kopējo uzvaru skaitu, t.i., 6+8+10 = 24. Tā kā pirmais spēlētājs uzvarējis 6 no partijām, tad viņš ir zaudējis vai nav piedalījies pārējās, t.i., 24-6=18 partijās.

Aiz zaudētas partijas vienmēr seko partija, kurā šis spēlētājs nepiedalās (ja vien šī zaudētā partija nav vispār pēdējā). Savukārt pirms partijas, kurā spēlētājs nepiedalās, iepriekšējo viņš noteikti ir zaudējis (ja vien partija, kurā spēlētājs nav piedalījies, nav pati pirmā). Tādējādi izlaisto un zaudēto partiju skaits vienam spēlētājam atšķiras ne vairāk par 1.

Tā kā pirmajam spēlētājam pavisam ir 18 tādas partijas (pāra skaitlis), tad viņam izlaisto un zaudēto partiju skaits ir vienāds, t.i., 9. Tādējādi viņš ir zaudējis 9 partijās, no kā izriet, ka pavisam piedalījies viņš ir $6(\text{uzvarētās}) + 9(\text{zaudētās}) = 15$ partijās.

Līdzīgi analizējam otrā spēlētāja partijas – zaudējis vai izlaidis viņš ir 24-8=16 partijas, tātad zaudējis ir tieši 8. No kā var secināt, ka pavisam viņš izspēlējis 8+8=16 partijas.

Trešais spēlētājs, savukārt, zaudējis vai izlaidis kopā 24-10=14 partijas; zaudējis – tieši 7 partijas; tātad pavisam izspēlējis 10+7=17 partijas.

46.11. Doto vienādību pārveido formā

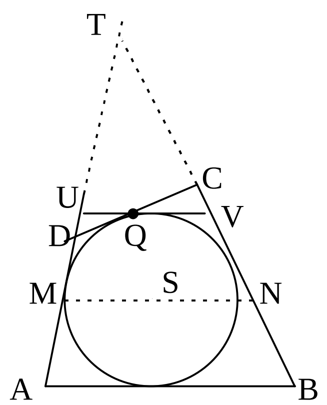
$\left(x^3 - y^3\right)\left(x - y\right) = 0$.

Tātad $x^3 - y^3 = 0$ vai $x - y = 0$. Tātad jebkurā gadījumā $x = y$, kas arī bija jāpierāda.

46.12. Vispirms novelkam pieskari $UV \| AB$ (bet lai taisnes AB un UV nesakristu). Tad $\angle DUV$ un $\angle DAB$ ir iekšējie vienpusleņķi (skat. 46.4. zīm.), tātad

$\angle DUV + \angle DAB = 180°$ jeb

$$\angle DUV = 180° - \angle DAB. \qquad (1)$$



46.4. zīm.

Tā kā ap četrstūri *DABC* var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle DAB+\angle DCB=180°$, jeb $\angle DCB=180°-\angle DAB$. Ievērojot arī (1) iegūstam, ka
$\angle DUV=\angle DCB=\angle DCV$.

No šejienes seko, ka $\Delta DUQ=\Delta VCQ$ un četrstūru *ABCD* un *ABVU* perimetri ir vienādi. Tā kā *MN* ir trapeces *AUVB* viduslīnija, tad $MN=\frac{1}{2}(AB+UV)$; tā kā $AB+UV=AU+BV$, tad $MN=\frac{1}{4}(AB+BV+VU+AU)$ jeb, perimetru vienādības dēļ, arī *ABCD* perimetrs ir $4MN$. Apgalvojums pierādīts..

46.13. Vispirms aplūkosim triju pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu kvadrātu summu:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3(n^2+2n+1)+2\,.$$

Šī summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2. Bet naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 3, dod tikai atlikumus 0 vai 1. Tātad tiešām aplūkotā summa nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Aplūkosim četru pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu kvadrātu summu:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=2(2n^2+6n+7).$$

Redzams, ka tā dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tāpēc nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Visbeidzot aplūkosim piecu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu kvadrātu summu:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=5(n^2+4n+6)\,.$$

Lai šī summa varētu būt naturāla skaitļa kvadrāts, ar 5 jādalās arī skaitlim n^2+4n+6. Pārbaudām, ka pēc moduļa 5 šī izteiksme nepieņem vērtību 0.

Tiešām $n^2+4n+6\equiv 0 \pmod 5 \quad\Leftrightarrow\quad (n+2)^2\equiv 3 \pmod 5$, bet pēc moduļa 5 veselu skaitļu kvadrāti nepieņem vērtību 3.

46.14. Pirmajā svēršanā uz katra kausa uzliekam pa 4 monētām; viena monēta paliek malā. Šķirojam gadījumus:

A. Kausi ir līdzsvarā. Tas iespējams tikai, ja uz katra kausa ir 1 viltotā monēta. Otrajā svēršanā uz katra kausa novietojam pa divām no tām monētām, kas pirmajā svēršanā bija vienā kausā; tagad viens kauss nosveras uz leju. Trešajā svēršanā salīdzinām tās monētas, kas “pārsvēra” otrajā reizē. Ja tās vienādas, tad viltotās monētas vieglākas par īstajām, ja nē – smagākas.

B. Kausi pirmajā svēršanā nav līdzsvarā.

Otrajā svēršanā uz katra kausa novietojam pa 2 monētām no tām 4, kas pirmajā svēršanā bija vieglākas.

B1) Svari nav līdzsvarā. Tas iespējams tikai, ja starp šīm 4 ir vismaz viena viltotā monēta; tāpēc viltotās monētas ir vieglākas par īstajām.

B2) Svari ir līdzsvarā. Tas iespējams divos gadījumos:

(α) vai nu viltotās monētas ir vieglākas par īstajām un otrajā svēršanā atradās pa vienai uz katra kausa, vai arī

(β) viltotās monētas ir smagākas, un pirmajā svēršanā smagākajā kausā atradās viena vai abas no tām (ja viena, tad otra viltotā ir malā palikusī).

Trešajā svēršanā salīdzinām divas monētas, kas otrajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja kausi ir līdzsvarā, tad ir (β) gadījums, ja nē – (α) gadījums.

46.15. Nevienādība starp pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko apgalvo, ka $\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. No šejienes

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n + \sqrt{x_n^2+2}}{3} \le \sqrt{\frac{x_n^2 + x_n^2 + \left(\sqrt{x_n^2+2}\right)^2}{3}} = \sqrt{\frac{3x_n^2+2}{3}}.$$

Tātad $x_{n+1} \le \sqrt{x_n^2 + \frac{2}{3}}$ un $x_{n+1}^2 \le x_n^2 + \frac{2}{3}$. Tādējādi

$$x_{1996}^2 \le x_{1995}^2 + \frac{2}{3} \le x_{1994}^2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \le \ldots \le x_0^2 + \frac{2}{3}\cdot 1996 = 1 + 1330\frac{2}{3} = 1331\frac{2}{3}.$$

Līdz ar to $x_{1996}^2 < 1369 = 37^2$, jeb $x_{1996} < 37$; kas arī bija jāpierāda.

46.16. Saskaņā ar doto

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d+e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e+a}{2}\right)^2$$

Pārveidojot iegūstam $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 = 0$

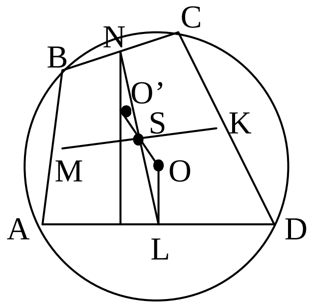
Tātad $a - b = 0$; $b - c = 0$; $c - d = 0$; $d - e = 0$; $e - a = 0$.

No šejienes seko, ka $a = b = c = d = e = 0$. Apgalvojums pierādīts.

46.17. Ja $x = y$, tad jābūt $x = y = 1$ (citādi lielākais kopīgais dalītājs būs lielāks par 1). Šis gadījums der, jo $(1^{1996}+1^{1996}) = 2$, kas dalās ar 1+1 =2.

Tālāk pieņemam, ka $x \ne y$. Tā kā $x^{1996} - y^{1996} = \left(x^2\right)^{998} - \left(y^2\right)^{998}$ dalās ar $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, tad $x^{1996} - y^{1996}$ dalās ar $x+y$. Tā kā arī $x^{1996} + y^{1996}$ dalās ar $x+y$, tad (saskaitot un atņemot) iegūstam, ka $2x^{1996}$ un $2y^{1996}$ dalās ar $x+y$. Bet x un y ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc ne x^{1996}, ne y^{1996} pat nesaistās ar $x+y$; tāpēc 2 dalās ar $x+y$; līdz ar to $x+y=2$ un $x=y=1$. Tā ir pretruna, jo pieņēmām, ka $x \ne y$.

46.18. Apzīmējam malu viduspunktus ar M, N, K, L (skat. 46.5. zīm.). Tad pēc trijstūru viduslīniju īpašības $MN \| AC \| LK$ un $NK \| BD \| ML$, tāpēc $MNKL$ – paralelograms. Apzīmējam tā diagonāļu krustpunktu ar S; tas ir šī paralelograma simetrijas centrs.



46.5. zīm.

Perpendikuli caur L, K, N, M pret malām, uz kurām tie atrodas, iet caur riņķa centru O (jo ap jebkuru četrstūri apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas šī četrstūra vidusperpendikulu krustpunktā).

Tāpēc uzdevumā apskatāmie perpendikuli iet caur punktu, kas simetrisks centram O attiecībā pret S, t.i., tiešām krustojas vienā punktā.

46.19. Izmantosim matemātisko indukciju.

Bāze pie $n = 2$ ir acīmredzama. No katras pilsētas jābūt ceļam uz otro, lai izpildītos uzdevumā dotais. Pēc uzdevuma nosacījumiem ceļu skaits ir ne mazāks par 3. Liekos ceļus neatkarīgi no tā, kurp tie ved, tātad, var slēgt.

Pieņemsim, ka pilsētu skaitam, kas mazāks par n, apgalvojums jau pamatots. Aplūkosim n ($n \geq 3$) pilsētas.

Iesāksim patvaļīgā veidā braukt pa ceļiem, līdz kādā pilsētā A nonākam otro reizi (tāda reize pienāks, jo pilsētu skaits ir galīgs). Aplūkosim atbilstošo ciklu (no pilsētas A izbraucot līdz pilsētai A, tajā iebraucot) ar k ($k \geq 2$) pilsētām .

Apvienosim visas cikla pilsētas vienā lielā pilsētā S. Pilsētu S savienosim ar citām pilsētām ar ceļiem pēc šāda likuma :

ja no kādas ciklā ietilpstošās pilsētas (jeb, īsāk, cikla pilsētas) veda ceļš uz B, tad no S uzzīmēsim ceļu uz B;

ja no B veda ceļš uz kādu cikla pilsētu, tad no B ved ceļš uz S.

Jaunajā valstī ir $n - k + 1 < n$ pilsēta (k pilsētu vietā ieviesta viena). Tajā ir $2n - 1 - k$ ceļi (netika ņemti vērā tikai ciklu veidojušie k ceļi; pārējie respektēti pēc iepriekšminētā likuma). Bet

$2n - 1 - k \geq 2(n - k + 1) - 1$ (1),

jo $k \geq 2$. Līdz ar to tātad jaunajā valstī ir mazāks pilsētu skaits nekā sākotnējā valstī. Apzīmēsim to ar $y < n$. Bez tam ceļu skaits tajā ir vismaz $2y$-1 (pēc (1)). Tā kā jaunajā valstī no katras pilsētas var aizbraukt uz katru (jo to varēja vecajā), tad saskaņā ar induktīvo pieņēmumu vienu no ceļiem jaunajā valstī var slēgt, lai joprojām tajā varētu no katras pilsētas aizbraukt uz katru. Tālāk pierāda, ka šo pašu ceļu var slēgt arī vecajā valstī.

Dotajā vienādībā ievietojam $y = a + b + ab$.

$$f(xa + xb + xab + x + a + b + ab) =$$
$$f(xa + xb + xab) + f(x) + f(a + b + ab) =$$
$$f(xa + xb + xab) + f(x) + f(a) + f(b) + f(ab).$$

Šajā vienādībā samaina vietām x un a . Kreisā puse nemainās, tātad jābūt vienādām arī labajām, t.i.,

$$f(xa + xb + xab) + f(x) + f(a) + f(b) + f(ab) =$$
$$f(xa + ab + xab) + f(x) + f(a) + f(b) + f(xb).$$

Ievietojot $x = 1$, iegūstam

$$f(a + b + ab) + f(ab) = f(a + 2ab) + f(b).$$

Aizvietojot $f(a + b + ab)$ ar $f(a) + f(b) + f(ab)$, iegūstam

$$f(a) + 2f(ab) = f(a + 2ab) \qquad (1)$$

No (1), ievietojot $b = 0$, iegūstam

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Savukārt no (1), ievietojot $b = -1$, iegūstam

$$f(a) + 2f(-a) = f(-a), \quad \text{jeb} \quad f(-a) = -f(a) \qquad (3)$$

No (1), ievietojot $b = -\frac{1}{2}$, iegūstam

$$f(a) + 2f\left(-\frac{1}{2}a\right) = f\left(a - 2\frac{1}{2}a\right) = f(0) = 0.$$

Tā kā $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = -f\left(\frac{1}{2}a\right)$, tad no augstāk uzrakstītās vienādības seko, ka

$$f(a) = 2f\left(\frac{1}{2}a\right), \quad \text{jeb} \quad f(2a) = 2f(a) \qquad (4)$$

No (1) un (4) tagad seko, ka

$$f(a) + f(2ab) = f(a + 2ab) \qquad (5)$$

Apskatām vienādību $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Ja gan $x = 0$, gan $y = 0$, tad pareizība seko no (2).

Ja, piemēram, $x \neq 0$, tad, izmantojot (5), iegūstam:

$$f(x+y)=f\left(x+2x\frac{y}{2x}\right)=f(x)+f\left(2x\frac{y}{2x}\right)=f(x)+f(y)$$

Analogi iegūstam prasīto arī, ja $y \neq 0$.

46.21. Apzīmēsim ar a_n un b_n attiecīgi nepāra un pāra apakškopu skaitu, ar A_n un B_n – attiecīgi nepāra apakškopu svaru summu un pāra apakškopu svaru summu.

Tā kā n elementu kopai pavisam ir 2^n apakškopas, ieskaitot viņu pašu un tukšo kopu, tad

$$a_n + b_n = 2^n \qquad (1)$$

a) Apzīmēsim pāra skaitļu skaitu kopā X_n ar α, bet nepāra skaitļu skaitu tajā – ar β. (Skaidrs, ka $\alpha=\left[\frac{n}{2}\right]$ un $\beta=n-\left[\frac{n}{2}\right]$). Katra nepāra kopa sastāv no dažiem (varbūt neviena) pāra skaitļiem un nepāra daudzuma nepāra skaitļiem. Pāra skaitļus šādam mērķim var izvēlēties 2^{α} veidos, nepāra skaitļus – $2^{\beta-1}$ veidos, jo $C_\beta^1 + C_\beta^3 + C_\beta^5 + \ldots = 2^{\beta-1}$, kā zināms no Ņūtona binoma īpašībām.

Tāpēc nepāra kopu var izvēlēties $2^{\alpha}\cdot 2^{\beta-1}=2^{\alpha+\beta-1}$ veidos. Tā kā $\alpha+\beta=n$, no šejienes iegūstam, ka $a_n = 2^{n-1}$, un no (1) seko, ka $b_n = 2^{n-1}$. Tātad

$$a_n = b_n \qquad (2)$$

b) Šķirosim divus gadījumus.

b1) n – nepāra skaitlis.

Nepāra kopas, kuras var izveidot no X_n elementiem, ir divu veidu: tās nepāra kopas, kas izveidotas no $X_{n-1}=\{1;\ 2;\ ...;\ n-1\}$ elementiem, nelietojot skaitli n, un tās pāra kopas, kas izveidotas no X_{n-1} elementiem, apvienotas ar nepāra skaitli n. Pirmā veida nepāra kopu svaru summa apzīmēta ar A_{n-1}. Otrā veida nepāra kopu svaru summa sastāv no B_{n-1} un no b_n reizes izmantotā skaitļa n. Tātad

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} + n\cdot b_{n-1} = A_{n-1} + B_{n-1} + n\cdot 2^{n-2} \qquad (3)$$

Līdzīgi iegūstam:

$$B_n = B_{n-1} + A_{n-1} + n\cdot a_{n-1} = A_{n-1} + B_{n-1} + n\cdot 2^{n-2}. \qquad (4)$$

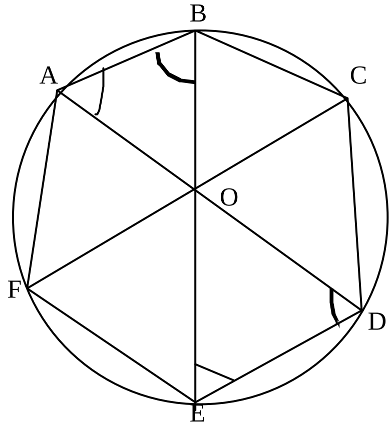
No (3) un (4) seko, ka

$$A_n = B_n, \text{ kur n – nepāra skaitlis.} \qquad (5)$$

b2) n – pāra skaitlis. Šo gadījumu aplūko līdzīgi iepriekšējam.

c) katras apakškopas un tās papildinājuma svaru summa ir $1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Tā kā kopu ir 2^n, tad šādu savstarpēji papildinošu apakškopu pāru ir 2^{n-1}. Tāpēc visu apakškopu svaru summa ir $2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n-2}\cdot n(n+1)$. No otras puses, šī summa ir A_n+B_n. Tā kā $A_n=B_n$, tad $B_n = A_n = 2^{n-3}\cdot n(n+1)$.

46.22. Aplūkosim 46.6. zīmējumu.



46.6. zīm.

No divu ievilktu leņķu vienādības seko, ka trijstūri *OAB* un *OED* ir līdzīgi. Tātad $\frac{AB}{ED}=\frac{OA}{OE}=\frac{OB}{OD}$. Līdzīgi $\frac{CD}{AF}=\frac{CO}{OA}=\frac{DO}{OF}$ un $\frac{EF}{BC}=\frac{EO}{OC}=\frac{FO}{OB}$. Tātad

$$\left(\frac{AB}{ED}\cdot\frac{CD}{AF}\cdot\frac{EF}{BC}\right)^2=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OB}{OD}\cdot\frac{CO}{OA}\cdot\frac{DO}{OF}\cdot\frac{EO}{OC}\cdot\frac{FO}{OB}=1.$$

No šejienes seko prasītā vienādība. Apgriezto apgalvojumu pierāda, aplūkojot sešstūri, kuram viena virsotne nobīdīta tā, lai tā diagonāles krustotos vienā punktā.

46.23. Apzīmējam $p\left(2^{p-1}-1\right)=x^k$, $k>1$. Skaidrs, ka $p\neq 2$. Tad p ir nepāra pirmskaitlis; $p=2q+1$. Tā kā x dalās ar p, tad $x=p^m y$, kur y nedalās ar p; iegūstam $p\left(2^{2q}-1\right)=\left(p^m y\right)^k$ un $\left(2^q-1\right)\left(2^q+1\right)=p^{mk-1}y^k$.

Skaitļi 2^q-1 un 2^q+1 ir savstarpēji pirmskaitļi (tas seko no tā, ka to starpība ir 2, tātad vienīgais kopīgais dalītājs varētu būt 2, kas nepāra skaitļiem neder).

Tātad tā no iekavām 2^q-1 un 2^q+1, kas nedalās ar p, ir kāda naturāla skaitļa k-tā pakāpe. Šķirosim divus gadījumus.

1) $2^q-1=z^k$. Tad z – nepāra skaitlis. Ja k ir pāra skaitlis un $q>1$, tad iegūstam pretrunu pēc moduļa 4. Tāpēc $q=1,\ p=3$. Pārbaude parāda, ka tas der.

Ja k – nepāra, tad $2^q=(z+1)\left(z^{k-1}-z^{k-2}+\cdots+1\right)$; otrajā iekavā ierakstīts nepāra skaitlis, lielāks par 1, bet tas nav iespējams.

2) $2^q+1=z^k$, z – nepāra. Ja k – nepāra, tad pretrunu iegūst kā iepriekš. Ja $k=2t$, tad $\left(z^t-1\right)\left(z^t+1\right)=2^q$. Skaitļiem z^t-1 un z^t+1 jābūt divnieka pakāpēm, kas atšķiras viena no otras par 2. Tātad tās ir 2 un 4. Tāpēc $z^t-1=2,\ z=3,\ t=1,\ q=3,\ p=7$.

Pārbaude parāda, ka p vērtība 7 der.

46.24. Katrs no apskatāmajiem apgabaliem veidojams, pakāpeniski pievienojot pa vienai rūtiņai tā, lai apgabala iekšienē neatrastos nevienas rūtiņas neviena virsotne un lai pievienojamai rūtiņai būtu kopīga mala ar tieši vienu no rūtiņām, kas jau iepriekš iekļautas apgabalā.

Pieņemot rūtiņas malas garumu par 1 un apzīmējot apgabala laukumu ar L, bet perimetru ar P, ar matemātiskās indukcijas palīdzību viegli pierāda formulu

$$L = \frac{1}{2}P - 1.$$

(indukciju izdara pēc apgabala rūtiņu skaita).

Tā kā abiem apgabaliem ir kopīga robeža – novilktā lauztā līnija, tad to perimetri ir vienādi. Tāpēc ir vienādi arī to laukumi.

46.25. Virkne $a_n = 3^n - 2^n$ acīmredzami ir augoša.

Pieņemsim, ka trīs šīs virknes locekļi a_m, a_n, a_k ($m < n < k$) veido ģeometrisku progresiju. Tad

$$a_m a_k = a_n^2 \qquad (1)$$

Pierādīsim nevienādības:

$$a_m a_{2n-m} < a_n^2 \qquad (2)$$

$$a_m a_{2n-m+1} > a_n^2 \qquad (3)$$

Tad no virknes monotonitātes seko, ka $2n - m < k < 2n - m + 1$, kas nav iespējams, jo $2n$-m un $2n$-m+1 ir divi viens otram sekojoši naturāli skaitļi, starp kuriem nevar atrasties neviens naturāls skaitlis k.

Nevienādība (2) pārveidojas par $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-m} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} > 2$, kas seko no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Nevienādība (3) identisku pārveidojumu ceļā pārveidojas par acīmredzamu nevienādību

$$\left(3^{m-1} - 2^{m-1}\right)\left(2 \cdot 3^{2n-m+1} - 2^{2n-m+1}\right) + 2^{n+1}3^{m-1}\left(3^{n-m+1} - 2^{n-m+1}\right) > 0\,.$$