Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 39. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

39.1. No naturālu skaitļu virknes izsvītrots vieninieks, kā arī visi pāra skaitļi un visi skaitļi, kas dalās ar 3. Atlikušie skaitļi veido augošu virkni $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Pierādīt, ka katram *n* pastāv nevienādība $a_n > 3n$.

39.2. Kvadrātvienādojumiem $x^2 + ax + b = 0$ un $x^2 + px + q = 0$ ir kopīga sakne. Zināms, ka visi šo vienādojumu koeficienti ir veseli skaitļi un ka $(a-p)^2 + (p-q)^2 > 0$ .Pierādīt, ka

a) šo vienādojumu otrās saknes ir dažādas;

b) tās ir veseli skaitļi.

39.3. Izliekta četrstūra *ABCD* diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Caur malu *AB* un *AD* viduspunktiem novilktas taisnes, kas perpendikulāras pretējām malām. Pierādīt, ka šīs taisnes krustojas uz taisnes *AC*.

39.4. Izliekta 100-stūrī nekādas 3 diagonāles nekrustojas vienā punktā. Pierādīt, ka šajā 100-stūrī var novilkt 50 diagonāles tā, lai tas tiktu sadalīts tieši 1200 daļās.

39.5. Klasē mācās *n* skolēnu. Katram no tiem šajā klasē ir tieši 3 draugi.

a) Pierādīt, ka *n* ir pāra skaitlis.

b) Vai skolēnus noteikti var sasēdināt solos pa pāriem tā, lai katrā sola sēdētu draugi?

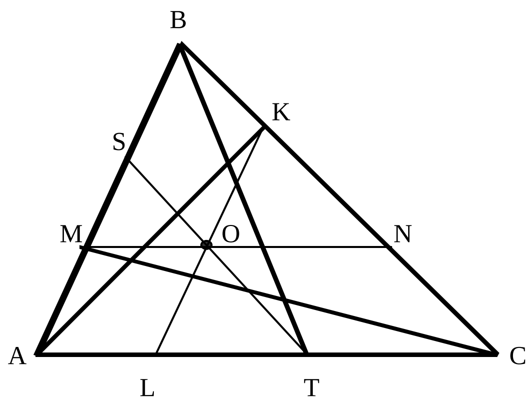
9. klase

39.6. Kubā $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir savstarpēji paralēlas, bet *ABCD* ir kuba skaldne. Konstruēt zīmējumā kuba šķēlumu ar plakni, kas iet caur AA_1 un B_1C_1 viduspunktiem un skaldnes *ABCD* centru. Konstrukcijas pareizību pamatot.

39.7. Dots, ka a un b – naturāli skaitļi. To lielākais kopīgais dalītājs ir 1, bet $a + b$ ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka $ab(a+b)(a-b)$ dalās ar 24.

39.8. Šaha galdiņa plaknē atzīmēts patvaļīgs punkts O. Pierādīt, ka vektoru summa, kas savieno O ar melno rūtiņu centriem, vienāda ar to vektoru summu, kas savieno O ar balto rūtiņu centriem.

39.9. Trijstūra iekšpusē atzīmēts punkts O. Caur to novilktas taisnes MN, KL un ST paralēli trijstūra malām. Novilktas arī taisnes AK, BT un CM (39.1. zīm.); tās sadala trijstūri ABC trijos četrstūros un četros trijstūros. Pierādīt, ka triju šo trijstūru laukumu summa ir vienāda ar ceturtā trijstūra laukumu.



39.1. zīm.

39.10. Dota naturālu skaitļu virkne $n_1, n_2, n_3, \ldots$. Zināms, ka katram k pastāv nevienādība $n_{k+1} > n_{n_k}$. Pierādīt, ka katram k ir spēkā vienādība $n_k = k$.

10. klase

39.11. Vai var katru kuba virsotni ar vektoru savienot ar vienas skaldnes centru tā, lai visu iegūto astoņu vektoru summa būtu nulles vektors?

39.12. Atrast izteiksmes $\sin 5x + \sin 1989x$ lielāko iespējamo vērtību.

39.13. Trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija, kas pieskaras malām punktos M, N un K. Dots, ka MNK ir regulārs trijstūris. Pierādīt, ka ABC ir regulārs trijstūris.

39.14. Pļavā stāv 1989 skolēni; visi attālumi starp viņiem ir atšķirīgi. Katram rokās ir ūdens pistole. Pēc komandas katrs no viņiem šauj uz sev tuvāko skolēnu. Pierādīt, ka vismaz viens skolēns paliks sauss.

39.15. Doti *n* skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$; katrs no tiem ir vai nu "+1" vai "-1". Zināms, ka $x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$.
Pierādīt, ka *n* dalās ar 4.

11. klase

39.16. Dots, ka funkcijai $f(x)$ eksistē atvasinājums visos skaitļu ass punktos.

a) Atrast kaut vienu tādu funkciju $f(x)$, ka katram *x* pastāv vienādība $f'(x) = f(0)$.

b) Atrast visas šādas funkcijas.

39.17. Trijstūrī novilktas mediānas, kas sadala to sešos mazos trijstūrīšos; ap katru no šiem sešiem trijstūrīšiem apvilkta riņķa līnija. Pierādīt, ka triju riņķa līniju rādiusu reizinājums vienāds ar triju citu riņķa līniju reizinājumu.

39.18. Kvadrāts, kura izmēri ir 10×10 rūtiņas, pārklāts ar 50 domino kauliņiem. Vai var gadīties tā, ka puse kauliņu ir novietoti horizontāli, bet puse – vertikāli?

39.19. Dots, ka *a* un *b* ir pozitīvi skaitļi un ir spēkā vienādība

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}.$$

Pierādīt, ka katram naturālam *n* pastāv vienādība

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

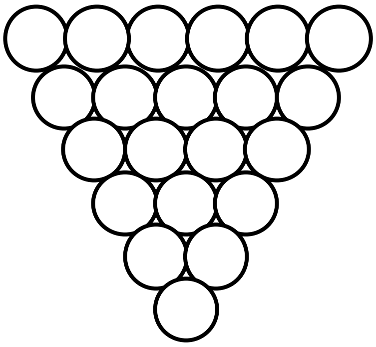
39.20. Pierādīt, ka nevar atrast tādu skaitli *c*, lai vienādojumam $x(x^2-1)(x^2-10) = c$ būtu 5 veselas saknes.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. Klase

39.21. Pusplakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 5; turklāt katrā kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas ierakstīto skaitļu summa nepārsniedz 88. Vienā no 15. horizontāles rūtiņām atrodas Kvidaks. Viņam ir 58 rieksti. Ar vienu gājienu Kvidaks var pāriet no rūtiņas, kurā viņš atrodas, uz rūtiņu, kurai ar to ir kopīga mala; vienlaikus Kvidaks atdod Karlsonam tik daudz riekstu, cik liels ir tikko atstātajā rūtiņā ierakstītais skaitlis. Rieksti jādod arī, izejot no pusplaknes. Vai Kvidaks noteikti varēs iziet no pusplaknes. (Horizontāles numurē, sākot no pusplaknes malas.)

39.22. Vai 39.2. zīmējumā attēlotajos aplīšos var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 21 (katrā aplītī – citu skaitli) tā, lai jebkuru divu vienā horizontālē esošu blakus aplīšos ierakstītu skaitļu starpības modulis būtu ierakstīts aplītī, kas atrodas tieši zem šiem abiem skaitļiem?



39.2. zīm.

39.23. Vai eksistē trijstūris, kuru var sagriezt tieši 1989 vienādos trijstūros?

39.24. Dots, ka $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$; $x_i \geq 0$.

Pierādīt nevienādību

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \cdots \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} .$$

39.25. Uz trijstūra *ABC* malām *AB*, *AC* un *CA* ņemti atbilstoši iekšējie punkti *M*, *N* un *K*. Trijstūros *AMK*, *MBN*, *KNC* ievilkto riņķu rādiusi ir r_1, trijstūrī *MNK* ievilktā riņķa rādiuss ir r_2 , trijstūrī *ABC* ievilktā riņķa rādiuss ir *r*. Pierādīt, ka $r_1 + r_2 = r$.

10. klase

39.26. Plauktā atrodas kopotie raksti 20 sējumos. Bibliotekārs vēlas tos sakārtot tā, lai sējumi būtu salikti numuru pieaugšanas kārtībā no kreisās uz labo pusi. Ar vienu gājienu bibliotekārs var mainīt vietām vienu sējumu, kas neatrodas savā vietā, ar to sējumu, kas aizņem viņa vietu. Pierādīt, ka gājienu skaits, kas nepieciešams grāmatu pilnīgai sakārtošanai, atkarīgs tikai no to sākotnējā novietojuma, nevis no bibliotekāra izvēlētās kārtošanas gaitas.

39.27. Dots, ka *a*, *b* un *c* ir naturāli skaitļi, kuru (visu triju) lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Dots arī, ka

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Pierādīt, ka $a+b$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

39.28. Reālu skaitļu virkni definē šādi: x_1 un x_2 izvēlas patvaļīgi, un

$$x_{n+2}=\frac{x_n x_{n+1}}{3x_n-2x_{n+1}},\ n=1,2,3,\ldots.$$

Atrast visas iespējas, kā var izvēlēties x_1 un x_2, lai bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi būtu naturāli skaitļi.

39.29. Uz trijstūra *ABC* malām *AB*, *BC* un *CA* ņemti attiecīgi iekšējie punkti *M*, *N* un *K*. Ar *U*, *V* un *T* apzīmēsim attiecīgi trijstūru *AMK*, *BMN* un *KNC* mediānu krustpunktus; figūras *F* laukumu apzīmēsim ar simbolu $[F]$. Pierādīt, ka

$$[UVT]=\frac{2[ABC]+[MNK]}{9}.$$

39.30. Parkā ir $m\cdot n$ taciņas un daži klajumi. Katra taciņa savieno divus klajumus un neiet caur citiem klajumiem; ārpus klajumiem taciņas nekrustojas un nesaskaras. Dots, ka taciņas var nokrāsot *m* krāsās (katru taciņu vienā krāsā) tā, lai katram klajumam cauri ietu tikai dažādu krāsu taciņas. Pierādiet, ka to var panākt, katrā krāsā nokrāsojot tieši *n* taciņas.

11. klase

39.31. Doti divi vienādi regulāri 100-stūri. Katram no tiem virsotnes kaut kādā veidā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 100. Pierādīt, ka šos 100-stūrus var uzlikt vienu uz otra tā, lai tie sakristu, bet lai nevienā vietā nesakristu virsotnes ar vienādiem numuriem.

39.32. Vai kubā, kura šķautnes garums ir 1, var ievietot trīs trijstūra piramīdas, katrai no kurām visu šķautņu garumi ir 1? Piramīdām nedrīkst būt kopīgu iekšējo punktu.

39.33. Dots, ka *a*, *b* un *c* ir veseli skaitļi, kas atšķiras no nulles. Zināms, ka vienādojumam $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ nav atrisinājumu racionālos skaitļos (*x*, *y*, *z*). Pierādīt, ka vienīgais vienādojuma $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ atrisinājums veselos skaitļos ir $x = y = z = 0$.

39.34. Dots, ka $P(x)$ ir *n*-tās pakāpes polinoms. Zināms, ka $P(x) = 2^x$, ja $x = 1, 2, 3, \ldots, n+1$. Aprēķināt $P(n+2)$.

39.35. Plaknē dota līnija ar garumu *l*. Pierādīt, ka to var pārklāt ar rombu, kura diagonāļu garumi ir *l* un $\frac{l}{\sqrt{3}}$.