Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 33. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

33.1. Tā kā $(3x+5)+7=3(x+4)$, tad skaitlis $3x+5$ dalās ar 7 tad un tikai tad, kad ar 7 dalās skaitlis $x+4$. Mums ir jānoskaidro cik intervālā [1, 1983] ir skaitļu x, kuriem $x+4$ dalās ar 7. Tas nozīmē, ka mums ir jānoskaidro cik intervālā [5, 1987] ir skaitļu y, kuri dalās ar 7.

Tādu skaitļu ir $\left[\frac{1987}{7}\right]-\left[\frac{4}{7}\right]=283$.

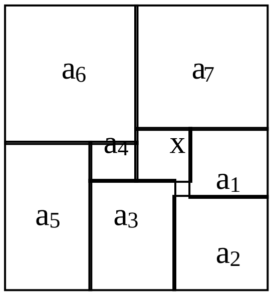
33.2. Trijstūris ABM ir līdzīgs trijstūrim BOM ar līdzības koeficientu $\frac{AM}{BM}=\sqrt{5}$. Tātad $S_{ABM}=5\cdot S_{BOM}$. Tā kā $S_{ABCD}=4S_{ABM}$ un $S_{ABM}=5$, tad dotā kvadrāta laukums ir 20 cm^2.

33.3. Ievērosim, ka pastāv vienādība $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$. Tātad virkne $b_n=a_n-\frac{1}{2}$ veido ģeometrisku progresiju: $b_1=1,\quad b_{n+1}=3b_n$. No šejienes

$$b_{1983}=\frac{3}{2}.3^{1982}=\frac{3^{1983}}{2},\ a_{1983}=\frac{3^{1983}+1}{2}.$$

Izmantojot ģeometriskās progresijas summas formulu un to, ka $b_n=a_n-\frac{1}{2}$, aprēķina arī prasīto summu. Tā ir $\frac{3^{1984}-3963}{4}$.

33.4. Apzīmēsim katra kvadrāta malas garumu ar tādu burtu, kā parādīts 33.2. zīm. Neatzīmētā kvadrāta malas garums ir viens. Iegūstam



33.2. zīm.

$a_1 = x + 1$,

$a_2 = a_1 + 1 = x + 2$,

$a_3 = a_2 + 1 = x + 3$,

$a_4 = (a_3 + 1) - x = x + 3 + 1 - x = 4$,

$a_5 = a_3 + a_4 = x + 7$,

$a_6 = a_5 + a_4 = x + 11$,

$a_7 = a_1 + x = 2x + 1$.

Tā kā lielā taisnstūra kreisās un labās malas garumi ir vienādi, tad

$a_5 + a_6 = a_2 + a_1 + a_7 \quad \Leftrightarrow \quad x + 7 + x + 11 = x + 2 + x + 1 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$.

Taisnstūra malu garumi ir 33 un 32 milimetri.

32.5. Tā kā konfekšu skaits ir pāra skaitlis, tad vienmēr būs pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits konfekšu. Izpildot jebkuru no operācijām ar šīm kaudzītēm samazinās kaudzīšu skaits, kurās ir nepāra skaits konfekšu. Rezultātā iegūsim kaudzītes ar pāra skaitu konfekšu.

Tagad varam uzskatīt, ka mums ir kaudzītes, kurās atrodas 32 dubultkonfektes (t.i. pa pāriem apvienotas konfektes) un atkārtot iepriekšējo spriedumu. Rezultātā visas kaudzītes apvienosies.

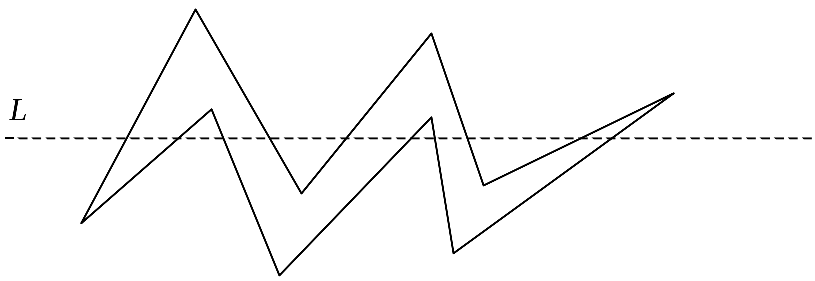
Ja konfektes ir 56, tad to apvienošana ne vienmēr ir iespējama. Ņemsim 7 kaudzītes ar 8 konfektēm katrā. Visu laiku jebkurā no kaudzītēm konfekšu skaits dalīsies ar 8, bet, lai tās varētu apvienot vienā, jāņem divas kaudzītes pa 28 konfektēm katrā. Taču 28 nedalās ar 8. Tātad tas nav iespējams.

32.6. Apgalvojumu pierāda, izmantojot sekojošu apgalvojumu: ja M ir trijstūra ABC mediānu krustpunkts un O – patvaļīgs punkts telpā, tad

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

To pierāda, izmantojot vektoru summas definīciju.

32.7. Jā, eksistē. Apskatīsim desmitstūri, kas attēlots 32.3. zīm. Taisne L krusto visas tā malas.



33.3. zīm.

Ja piramīdas pamatā ņemam šādu desmitstūri, caur taisni L novelkam pamata plaknei perpendikulāru plakni $\propto$ un piramīdas virsotni S izvēlamies ārpus šīm abām plaknēm, tad $\propto$ krusto visas pamata šķautnes un tās 5 sānu šķautnes, kas iet caur virsotni S uz tām pamata virsotnēm, kuras atrodas otrā pusē no plaknes $\propto$ nekā S.

32.8. Vispirms ievērosim, ka

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) .$$

Izmantojot šo vienādību, iegūstam

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{1979 \cdot 1981} + \frac{1}{1981 \cdot 1983} =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{1979} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{1981} - \frac{1}{1983} \right) =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1983} \right) = 0{,}4997\ldots$$

Tātad pirmie cipari aiz komata ir 499.

32.9. a) Naturālo skaitļu virknē ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu m , kas savā pierakstā satur ciparu 0. Tādiem m izpildās vienādība $\frac{R(m)}{m} = 0$. Tātad eksistē dotās virknes apakšvirkne, kuras robeža ir 0. Ja pašai virknei eksistē robeža, tai jābūt vienādai ar 0.

b) Robežas eksistenci pierāda izmantojot to, ka *k*-ciparu skaitlim izpildās nevienādība $0 \le \frac{R(n)}{n} \le \frac{9^k}{10^{k-1}}$.

32.10. Pēc moduļa 5 vienādības kreisā puse pieņem tikai vērtības 0 un 1, bet $1983 \equiv 3 \pmod 5$.

32.11. Pierādījums seko no trigonometrisko funkciju pamatidentitātēm.

32. 12. Pieņemsim, ka eksistē šāds četrstūris ar dažādiem malu garumiem. Apzīmēsim tā perimetra attiecības pret četrstūra malām ar a, b, c, d. Tie ir veseli dažādi skaitļi, visi lielāki par 2. No daudzstūra perimetra definīcijas seko, ka

$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} + \frac{p}{d} = p$. Taču

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} + \frac{p}{d} \le \frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} = \frac{57}{60} p < p.$$

Iegūta pretruna, kas pierāda, ka šāds četrstūris neeksistē.

32.13. Izmantojot vektorus pierāda, ka četrstūris *SPTO* ir paralelograms. Lai to pierādītu, pierāda, ka $\overline{SP} = \overline{OT}$.

32.14. Trijstūra piramīdas apvilktās lodes centrs ir punkts, kas atrodas vienādā attālumā no visām piramīdas virsotnēm, tātad šo punktu satur visas 6 aplūkojamās plaknes; tātad, tās krustojas vienā punktā.

32.15. No pirmā vienādojuma seko, ka $x_i \le 1$. Tāpēc $x_i \ge x_i^k$. No šejienes seko, ka

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \cdots x_n + \cdots \ge 1 + x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = 2,$$

pie kam vienādība iespējama tikai, ja $n = 1$ un $x_1 = 1$.

32.16. Apgalvojums seko no vienādībām

$$f(\sin x) = f\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(5\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - 5x\right) = \sin 5x.$$

32.17. Pavisam eksistē 285 šādi trijstūri.

32.18. Tieši 1983 trijstūri un nekādi citi apgabali rasties nevar. Ievērosim, ka sfēra ar centru *O* un plaknes, kas vilktas caur šīs sfēras centru, ir centrāli simetriskas figūras (ar simetrijas centru *O*). Tāpēc katram apgabalam simetriski attiecībā pret *O* veidojas tāds pats apgabals. Tātad trijstūru skaitam ir jābūt pāra skaitlim.

1984 trijstūri un nekādi citi apgabali var rasties. Novilksim 496 plaknes, kas visas iet caur vienu sfēras diametru, un vienu plakni, kas perpendikulāra šim diametram. Tā rodas vajadzīgā konfigurācija.

32.19. Apskatīsim patvaļīgu norādītā tipa summu

$$\frac{a_1}{1^3}+\frac{a_2}{2^3}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_n}{n^3}.$$

Pieņemsim, ka nav taisnība, ka $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Tad eksistē tādi i un j, ka $i < j$, bet $a_i > a_j$. Apmainīsim a_i un a_j vietām un parādīsim, ka izteiksmes vērtība pamazinās. Pietiek pierādīt, ka

$$\frac{a_i}{i^3}+\frac{a_j}{j^3}>\frac{a_j}{i^3}+\frac{a_i}{j^3}.$$

Patiešām, pēdējā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$(a_i-a_j)\left(\frac{1}{i^3}-\frac{1}{j^3}\right)>0,$$

kas ir pareiza, jo $i < j$ un $a_i > a_j$.

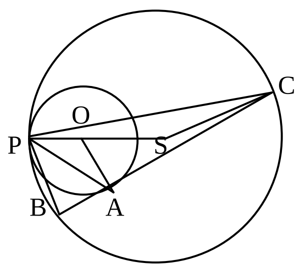
Pakāpeniski izdarot šādas maiņas, nonākam līdz summai

$$\frac{1}{1^3}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{n^3}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

kas ir mazāka par sākotnējo. Tātad sākotnējā summa apmierina prasīto nevienādību.

33.20. Apzīmējam $\angle CPS=\beta$; tad arī $\angle SCP=\beta$, SCP ir vienādsānu trijstūris. Tad $\angle PSC=180°-2\beta$. Tātad ievilktais leņķis $\angle PBC=90°-\beta$.

Apzīmēsim $\angle OPA=\angle OAP=\alpha$. Tad $\angle BAP=90°-\angle PAO=90°-\alpha$ un $\angle BPA=180°-\angle PBA-\angle PAB=180°-(90°-\beta)-(90°-\alpha)=\alpha+\beta=$ $\angle APO+\angle OPC=\angle APC$, ko arī vajadzēja pierādīt.



33.4. zīm.

33.21. Visu skaitļu zīmes ir vienādas. Aplūkosim gadījumu, kad visi skaitļi ir pozitīvi. Vispirms atzīmēsim, ka $2y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$. Ievērojot arī pārējās nevienādības, iegūstam, ka $x \geq \sqrt{2},\ y \geq \sqrt{2},\ z \geq \sqrt{2}$. Izvēlēsimies lielāko no dotajiem skaitļiem; uzskatīsim, ka tas ir *x*. Pierādīsim, ka $x = \sqrt{2}$; tad arī pārējie skaitļi ir vienādi ar $\sqrt{2}$.

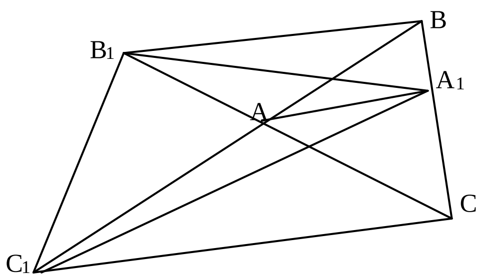
Pieņemsim pretējo, ka $x > \sqrt{2}$. Tā kā $z \leq x$ un $\frac{2}{z} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, tad

$$z + \frac{2}{z} \leq x + \sqrt{2} < x + x = 2x .$$

Iegūta pretruna, tātad $x = y = z = \sqrt{2}$.

Ir arī otrs atrisinājums $x = y = z = -\sqrt{2}$.

33.22. Tā kā AA_1BB_1 -- trapece, tad $S_{AA_1B_1} = S_{AA_1B}$. Līdzīgi pierāda, ka $S_{AA_1C_1} = S_{AA_1C}$. Tāpēc $S_{AA_1B_1} + S_{AA_1C_1} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C} = S_{ABC}$. Tā kā CC_1B_1B -- trapece, tad $S_{CC_1B_1} = S_{CC_1B}$. Atņemot no šīs vienādības abām pusēm S_{CAC_1}, iegūstam $S_{AB_1C_1} = S_{ABC}$. Tāpēc $S_{A_1B_1C_1} = \left(S_{AA_1C_1} + S_{AA_1B}\right) + S_{AB_1C_1} = S_{ABC} + S_{ABC} = 2S_{ABC}$, ko arī vajadzēja pierādīt.



33.5. zīm.

33.23. Ja kādi divi no dotajiem skaitļiem ir vienādi, tad dotais skaitlis sastāv no periodiski atkārtojošām ciparu grupām $\overline{AA\cdots A}$ (*A* – ciparu grupa). Šāds skaitlis dalās ar *A* un nav pirmskaitlis.

33.24. Tabulā ierakstītos skaitļus apzīmēsim ar a_{st}. Pieņemsim, ka a_{st} -- lielākais no tabulas skaitļiem. Tad $a_{st} > \frac{1}{n}$. Apzīmēsim ar *x* mazāko no skaitļiem, kas atrodas vienā kolonnā vai vienā rindiņā ar izvēlēto skaitli. Uzskatīsim, ka tas ir a_{sm} un atrodas vienā rindiņā ar izvēlēto skaitli. Skaidrs, ka $a_{sm} < \frac{1}{n}$.

Eksistē tāds *i*, ka $a_{it} < a_{im}$; pretējā gadījumā *t*-tajā kolonā skaitļu summa būtu lielāka nekā *m*-tajā kolonnā.

Izvēloties rindiņas ar numuriem *s* un *i* un kolonnas ar numuriem *t* un *m*, uzdevuma prasības izpildīsies.

33.25. Pierādīsim, ka vienam izvēlētam lokam no tiem diviem, kuros *AB* sadala riņķa līniju, maksimums tiek sasniegts šī loka viduspunktā *O*.

Novelkam ar centru O un rādiusu $OA = OB$ jaunu riņķa līniju *r*. *P* – patvaļīgs dotās riņķa līnijas apskatāmā loka punkts, kas atšķiras no *O*; *C* un *Q* konstruēti kā *AO* un *AP* krustpunkti ar *r*.

Apzīmēsim $\angle ACB = \angle AQB = \alpha$. Tad $\angle AOB = 2\alpha$, tātad arī $\angle APB = 2\alpha$. No trijstūra *PQB* ārējā leņķa īpašībām seko, ka
$2\alpha = \angle APB = \angle PQB + \angle PBQ = \alpha + \angle PBQ$, tātad $\alpha = \angle PBQ$. No šejienes seko, ka QPB ir vienādsānu trijstūris, un $PQ = PB$.
Tāpēc $AP + PB = AP + PQ = AQ < AC = AO + OB$.

33.26. Pieņemsim, ka *c* ir garākā mala sākotnējā trijstūrī. Tad $\sqrt[n]{c}$ ir lielākais no skaitļiem $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$. Lai trīs nogriežņi varētu būt trijstūra malas, ir pietiekami, lai garākais no tiem būtu īsāks par pārējo divu summu .

Tāpēc pietiek pierādīt, ka $\sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.
Kāpinot abas puses *n*-tajā pakāpē, iegūstam

$$c < \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n = a + b + Q,$$

kur *Q* – pozitīvs skaitlis. Tā kā $c < a + b$, tad vajadzīgais ir pierādīts.

33.27. Apskatīsim patvaļīgu slēgtu lauztu līniju, kas iet pa daudzskaldņa šķautnēm. Katra šāda slēgta lauzta līnija sadala daudzskaldņa virsmu divās daļās. Apskatīsim skaldnes, kuras veido vienu no tām; to šķautņu skaitus apzīmēsim ar $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Tad apskatāmās lauztās līnijas posmu skaits ir $N = s_1 + s_2 + \cdots + s_n - 2k$, kur k – to šķautņu skaits, kas atrodas apskatāmā apgabala iekšpusē (lai iegūtu lauztās līnijas posmu skaitu, t.i., kontūra posmu skaitu, no summas $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ jāatņem visas apgabala iekšējās šķautnes, katra divas reizes). Tā kā visi s_i ir pāra skaitļi, tad arī N ir pāra skaitlis.

33.28. Skaidrs, ka $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. No dotās vienādības iegūstam
$x_{n+1} - 5x_n = \sqrt{24x_n^2 + 1}$,
$x_{n+1}^2 - 10x_{n+1}x_n + 25x_n^2 = 24_n^2 + 1$,
(1) $x_n^2 - 10x_{n+1}x_n + \left(x_{n+1}^2\right) = 0$.

Ievietojot vienādībā (1) *n* vietā *n* + 1, iegūstam

$x_{n+1}^2 - 10x_{n+2}x_{n+1} + \left(x_{n+2}^2 - 1\right) = 0$ jeb

(2) $x_{n+2}^2 - 10x_{n+2}x_{n+1} + \left(x_{n+1}^2 - 1\right) = 0$.

Apskatām kvadrātvienādojumu $t^2 - 10x_{n+1}t + \left(x_{n+1}^2 - 1\right) = 0$.

No (1) un (2) redzams, ka gan x_n, gan x_{n+2} ir tā saknes. Tā kā $x_{n+2} > x_n$, tad tās ir dažādas, un pēc Vjeta teorēmas

$x_{n+2} = 10x_{n+1} - x_n$.

Tā kā x_1 un x_2 -- veseli skaitļi, tad arī x_3 un visu citu virknes (x_n) locekļu vērtības būs veseli skaitļi.

33.29. Vispirms pierādīsim palīgrezultātu: vismaz divi no piecstūra *ABCDE* blakusesošajiem iekšējiem leņķiem ir tādi, ka to lielumu summa pārsniedz 180°. Tiešām, ja pieņemtu pretējo, ka

$$\angle A + \angle B \le 180^\circ$$
$$\angle B + \angle C \le 180^\circ$$
$$\angle C + \angle D \le 180^\circ$$
$$\angle D + \angle E \le 180^\circ$$
$$\angle E + \angle A \le 180^\circ$$

tad, saskaitot šīs vienādības, iegūtu $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E \le 450^\circ$, kas ir pretrunā ar to, ka piecstūra iekšējo leņķu lielumu summa ir 540°.

Pieņemsim, ka $\angle A + \angle B > 180^\circ$. Pieņemsim, ka *C* atrodas tālāk (vai tādā pašā attālumā) no taisnes *AB* nekā *E*. Apskatām tāda paralelograma ceturto virsotni *F*, kura trīs pēc kārtas ņemtas virsotnes ir *B*, *A*, un *E*. Tā kā piecstūra piektā virsotne *D* atrodas virs *EF* – citādi piecstūris nebūtu izliekts – tad *F* atrodas piecstūra *ABCDE* iekšpusē; tā kā *A*, *B* un *E* ir rūtiņu stūros, tad arī *F* ir rūtiņas stūrī (nogrieznis *BF* attiecībā pret rūtiņām ir novietots tāpat kā *AE* – tie ir paralēli un vienāda garuma, un *B* tāpat kā *A* ir rūtiņas virsotnē). Vajadzīgais ir pierādīts.

33.30. Apzīmēsim

$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$.

$P(x)$ ir pāra pakāpes polinoms; koeficients pie augstākās pakāpes ir pozitīvs. Tātad $P(x) \to \infty$, ja $x \to \pm\infty$.Tāpēc polinoms $P(x)$ savu mazāko vērtību pieņem kādā no lokālā minimuma punktiem, kur $P'(x) = 0$. Bet

$$P'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} .$$

Ja kādai *x* vērtībai $P'(x) = 0$ ($x \ne 0$, jo $P'(0) = 1$), tad $P(x) = P'(x) + \frac{x^6}{720} > 0$.

Tātad arī minimuma punktos $P(x)>0$. Tas nozīmē, ka $P(x)>0$ visiem reāliem *x*.

33.31. Skaidrs, ka neviens no uzrakstītajiem skaitļiem nav 0. Ja *a*, *b*, *c* – trīs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi, tad

$$a\cdot c=b \quad \Leftrightarrow \quad c=\frac{b}{a}$$

Līdzīgi iegūstam, ka nākošie skaitļi būs

$$d=\frac{c}{b}=\frac{1}{a},$$

$$e=\frac{d}{c}=\frac{1}{ac},$$

$$f=\frac{e}{d}=\frac{1}{c},$$

$$g=\frac{f}{e}=a\ .$$

Tā kā visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi, tad skaitlim g jābūt pirmajam uzrakstītajam skaitlim *a*, un vairāk par 6 skaitļiem uzrakstīt nevar.

Sešus skaitļus var izvēlēties šādi: 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Atsevišķi aplūkojot gadījumus, kad ir 3, 4 vai 5 skaitļi, iegūstam pretrunu.

33.32. Tā kā jebkuri divi nekolineāri vektori plaknē veido bāzi, tad

$$\overrightarrow{OC_1}=\alpha\overrightarrow{OA_1}+\beta\overline{OB_1}\ ,$$

$$\overrightarrow{OC_2}=\alpha\overrightarrow{OA_2}+\beta\overline{OB_2}\ .$$

Ievērojot, ka piecstūri ir līdzīgi, koeficienti α un β vienādībās ir vienādi. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\alpha\overrightarrow{A_1A_2}+\beta\overline{B_1B_2}\ .$$

Tas nozīmē, ka taisne C_1C_2 ir paralēla plaknei, kuru nosaka vektori $\overrightarrow{A_1A_2}$ un $\overrightarrow{B_1B_2}$. To pašu iegūstam arī taisnei D_1D_2.

33.33. No Vjeta teorēmas *n*-tās pakāpes vienādojumam seko, ka $r_1+r_2+\cdots r_n=-a_1$. Tātad $|r_1|+|r_2|+\cdots|r_n|\geq|r_1+r_2+\cdots r_n|=|a_1|$, un eksistē tāds *i*, ka $|r_i|\geq\frac{|a_i|}{n}$.

33.34. Ja $p=2$, var ņemt $x=1,\ y=2$. Pieņemsim, ka *p* – nepāra skaitlis. Apskatīsim $\frac{p+1}{2}$ skaitļus $0,1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$. Pierādīsim, ka to kvadrāti dod dažādus atlikumus, dalot ar *p*.

Tiešām, ja x_1^2 un x_2^2 dotu vienādus atlikumus, dalot ar *p*, tad $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ dalās ar *p*. Bet tā nevar būt, jo $0 < |x_1 + x_2| < p$ un $0 < |x_1 - x_2| < p$.

Līdzīgi arī $\frac{p+1}{2}$ skaitļi $-0^2 - 1, -1^2 - 1, -2^2 - 1, \ldots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1$ dod dažādus atlikumus, dalot ar *p*.

Abās apskatāmajās skaitļu grupās kopā ir $p + 1$ skaitļi. Tāpēc vismaz divi no tiem dod vienādus atlikumus, dalot ar *p*. Viens no šiem skaitļiem ir x^2, otrs ir $-y^2 - 1$. To starpība $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar *p*.

33.35. No visiem sadalījumiem *n* trijniekos (katrā trijniekā ir dažādu krāsu punkti) izvēlēsimies sadalījumu, kuram trijstūru laukumu summa ir vismazākā. Var pierādīt, ka tādā gadījumā trijstūri nešķeļas.