Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 31. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

31.1. Ar $[x]$ apzīmēsim lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x*.

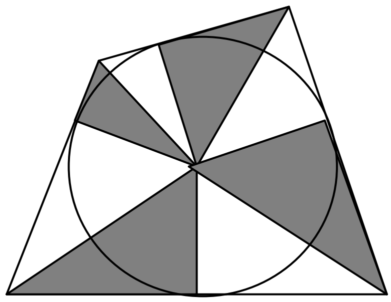
a) pierādīt, ka katram naturālam skaitlim *n* izteiksme $n-10\cdot\left[\frac{n}{10}\right]$ vienāda ar skaitļa *n* pēdējo ciparu;

b) izmantojot aritmētiskās operācijas un simbolu [ ] ,uzrakstīt formulu, kas izsaka skaitļa *n* priekšpēdējo ciparu.

31.2. Ap trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija. Virsotnē *B* tai novilkta pieskare. Taisne *t*, kas paralēla šai pieskarei krusto malas *AB* un *BC* attiecīgi punktos *M* un *N*. Pierādīt, ka ap četrstūri *AMBC* var apvilkt riņķa līniju.

31.3. Četrstūrī *ABCD* ievilkta riņķa līnija. Tās iekšpusē izvēlēts punkts *M*, kas savienots ar visām četrstūra virsotnēm un visiem pieskaršanās punktiem. Katrs otrais no iegūtajiem astoņiem trijstūriem iekrāsots (skat. 31.1. zīm.).

Pierādīt, ka iekrāsoto trijstūru laukumu reizinājums vienāds ar neiekrāsoto trijstūru laukumu reizinājumu.



31.1. zīm.

31.4. Vienādojuma $x^2 + ax + b = 0$ koeficienti pēc moduļa nepārsniedz 1980. Vai šim vienādojumam var būt sakne, kas ir lielāka par 1981 ?

31.5. Kvadrātveida tabulā, kas satur 5×5 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts "$+1$", "-1" vai 0. Vai var gadīties, ka skaitļu summas rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ir dažādas ?

9. klase

31.6. Aprēķināt robežas

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+2}\right)$.

31.7. Divas laivas brauc pa jūru ar konstantiem (ne noteikti vienādiem) ātrumiem taisnos virzienos.

Vai var būt, plkst. 9^{00} attālums starp tām bija 36 km, plkst. 10^{00} – 40 km un plkst. 11^{00} 37 km ? Atbildi pamatot.

31.8. Skaitļu virkni (a_n) definē šādi:

1) $a_1 = 1$,

2) $a_{n+1} = a_n \pm \frac{1}{2^n}$, $\quad (n = 1, 2, \ldots)$,

kur "+" vai "-" zīmi katram konkrētam n var brīvi izvēlēties.

Pierādīt, ka šīs zīmes var izvēlēties tā, ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

31.9. 9-stūra piramīdā katra sānu šķautne un katra pamata diagonāle nokrāsota vai nu sarkanā, vai zilā krāsā.

Pierādīt, ka no nokrāsotajiem nogriežņiem var izvēlēties trīs, kas nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā un veido trijstūri ar visām virsotnēm piramīdas virsotnēs.

31.10. Telpā doti 3 paralēli nogriežņi $AA_1, BB_1,$ un CC_1 , kas neatrodas visi vienā plaknē; turklāt vektori $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ ir vienādi vērsti. Ar M apzīmējam plakņu ABC_1, ACB_1 un BCA_1 krustpunktu, ar M_1 -- plakņu A_1B_1C, B_1C_1A un A_1C_1B krustpunktu.

Pierādīt, ka nogrieznis MM_1 paralēls trim dotajiem nogriežņiem.

10. klase

31.11. Dots, ka $\sin x + \cos x = a$. Aprēķināt

a) $\sin^3 x + \cos^3 x$,

b) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

31.12. Pierādīt, ka trijstūra piramīdā visu sešu divplakņu kaktu bisektorās plaknes krustojas vienā punktā.

31.13. Plaknē uzzīmēti divi izliekti četrstūri, kas nekrustojas. Katra četrstūra iekšpusē ierakstīti 6 skaitļi – tā visu malu un diagonāļu garumi centimetros. Nav dots, kurš skaitlis kuru garumu izsaka.

Vai var gadīties tā, ka abos četrstūros ierakstīti vieni un tie paši skaitļi, bet četrstūri nav vienādi?

31.14. Naturālā skaitlī pārlika ciparus citā kārtībā un iegūto skaitli atņēma no sākotnējā.

Pierādīt, ka starpība nevarēja būt 123451.

31.15. Vai var izrakstīt ciparus no 0 līdz 9 (katru ciparu vienu reizi) pa riņķa līniju tā, lai

a) nekādu triju blakus izrakstīto ciparu summa nepārsniegtu 14,

b) nekādu triju blakus izrakstīto ciparu summa nepārsniegtu 14 ?

11. klase

31.16. Atrisināt vienādojumu $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

31.17. Vai eksistē trijstūra piramīda, kurai
$AB = CD = 10\,\text{cm}, \quad AC = BD = 11\,\text{cm}, \quad AD = BC = 15\,\text{cm}$?

31.18. Apskatām rūtiņu papīra lapu, kurā rūtiņas malas garums ir 1 vienība. Uzzīmēts trijstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs. Šī trijstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*, bet apvilktās riņķa līnijas rādiusa garums ir *R*.
Pierādīt, ka $abc \geq 2R$.

31.19. Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2} < \frac{\pi}{4}.$$

31.20. Naturālu skaitļu virkni (a_n) definē šādi:

1) a_1 -- patvaļīgs naturāls skaitlis,
2) $a_{n+1} = a_n + 2^{a_n}$, ja $n = 1, 2, \ldots$.

Pierādīt, ka šajā virknē

1) bezgalīgi daudzi locekļi nedalās ar 3,
2) bezgalīgi daudzi locekļi dalās ar 3.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8., 9. Klase

31.21. Uz trijstūra *ABC* malām kā uz pamatiem ārpus trijstūra *ABC* konstruēti trijstūri *AMB*, *BNC* un *CKA*; turklāt $\angle AMB + \angle BNC + \angle CKA = 180°$.

Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem *AMB*, *BNC* un *CKA*, krustojas vienā punktā.

31.22. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz $2\,000\,000$ ieskaitot. Izvēlēsimies no tiem kaut kādus $1\,000\,001$ skaitļus.

Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem noteikti atradīsies divi tādi, kas ir savstarpēji pirmskaitļi.
Vai to noteikti var apgalvot, ja tiek izvēlēti $1\,000\,000$ skaitļi ?

31.23. Vai no vienādsānu trapeces, kuru pamatu garumi ir 3 cm un 1 cm, bet augstums ir 1 cm, var salikt

a) taisnstūri, kura malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru,

b) kaut kādu taisnstūri ?

Trapeces nedrīkst pārklāties; taisnstūra iekšpusē nedrīkst palikt tukšas vietas.

31.24. Tabula sastāv no $m\times n$ rūtiņām. Dažās rūtiņās iezīmēts pa zvaigznītei, citas ir tukšas. Ja izdodas atrast četras rūtiņas, kas novietotas tāda taisnstūra virsotnēs, kura malas paralēlas tabulas malām, un ja trijās no šīm rūtiņām iezīmētas zvaigznītes, bet ceturtajā nē, tad drīkst iezīmēt zvaigznīti arī ceturtajā rūtiņā; šādu operāciju sauc par vienu gājienu.

Pieņemsim, ka dota kaut kāda tabula, kurā citu pēc cita sāk izdarīt gājienus. Kāds ir lielākais gājienu skaits, kādu var izdoties izdarīt?

31.25. Vai n-stūra virsotnēs var ierakstīt skaitļus no kopas {1, 2, 3, … , n+1} – katrā virsotnē citu skaitli – tā, lai, katrai malai aprēķinot tās galapunktos ierakstīto skaitļu starpības moduli, visi šie n moduļi iznāktu dažādi?

(Viens skaitlis netiek ierakstīts nevienā virsotnē.)

Atbildiet uz šo jautājumu, ja

a) $n=7$,

b) $n=8$,

c) $n=9$.

10.klase

31.26. Skaitļu virknes (a_n) un (b_n) tiek definētas šādi:

$a_1=a>0,$

$b_1=b>0,$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2}{2}}\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Pierādīt, ka katram naturālam n

$$\left|b_{n+1}-a_{n+1}\right|\le\frac{|b-a|}{2^n}.$$

31.27. Izliektā 1981-stūra piramīdā

a) visas sānu šķautnes ir vienādas savā starpā,

b) visi divplakņu kaktu leņķi pie sānu šķautnēm ir vienādi savā starpā.

Pierādīt, ka piramīda ir regulāra.

Vai izliekta 1980-stūra piramīda, kurai piemīt īpašības a) un b), noteikti ir regulāra ?

31.28. Visur definēta funkcija $f(x)$ patvaļīgiem a un b apmierina sakarību

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) - f(a+b) + 1 .$$

Aprēķināt $f(x)$, ja

a) x – vesels skaitlis,

b) x – racionāls skaitlis.

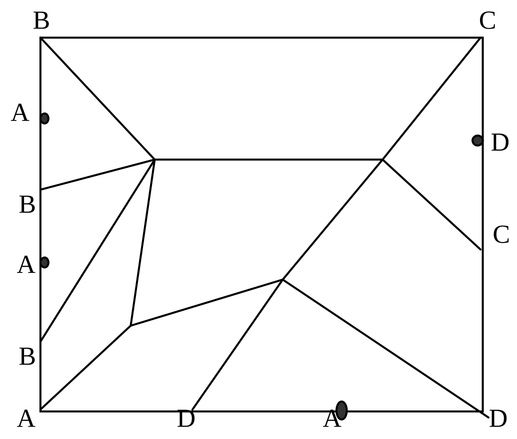
31.29. Doti n vektori $a_1, a_2, \ldots, a_n$; dots, ka visiem i $|a_i| \le 1$. Visi vektori atrodas vienā plaknē. Pierādīt, ka izteiksmē

$$s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$$

var tā izvēlēties "+" un "-" zīmes, ka $|s| \le \sqrt{2}$.

31.30. Dots kvadrāts *ABCD* (virsotnes apzīmētas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam). Uz katras tā malas atzīmēts pāra skaits punktu; šie punkti apzīmēti ar burtiem, kas uzrakstīti attiecīgās mals galos, tā, ka uz katras malas burti izvietoti pamīšus. Bez tam vairāki punkti atzīmēti kvadrāta iekšpusē. Novilkti vairāki nekrustojošies nogriežņi, kas savieno iekšienē atzīmētos punktus savā starpā, ar kvadrāta virsotnēm un ar uz malām atzīmētajiem punktiem tā, ka kvadrāts sadalīts četrstūros (trīs četrstūra virsotnes var atrasties uz vienas taisnes).

Šādas konstrukcijas piemērs dots 31.2. zīmējumā.



31.2. zīm.

Iekšējie punkti katrs apzīmēti ar vienu no burtiem *A*, *B*, *C*, *D* tā, ka nav nogriežņa, kura abi gali apzīmēti vienādi.

Pierādīt, ka vismaz vienam no četrstūriem, kuros sadalīts kvadrāts, virsotnes apzīmētas ar burtiem *A*, *B*, *C*, *D* pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

11. klase

31.31. Kādiem *a* un *b* sistēmai

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = a \\ \sin x + \sin y + \sin z = b \\ 0 \le x < 2\pi \\ 0 \le y < 2\pi \\ 0 \le z < 2\pi \end{cases}$$

ir tieši viens atrisinājums?

31.32. Pa trim nekomplanāriem stariem ar kopīgu virsotni *O* rāpo trīs vaboles *A*, *B*, *C* (katra rāpo pa savu staru). Jebkurā laika momentā izpildās vienādības

$$\frac{1}{OB} - \frac{1}{OA} = 1 \quad \text{un} \quad \frac{1}{OC} - \frac{1}{OB} = 1.$$

Pierādīt, ka plakne *ABC* visu laiku iet caur vienu fiksētu taisni.

31.33. a un b ir konstantes – naturāli skaitļi; $a > b$. Aplūkosim visus skaitļus, kas izsakāmi formā $ax + by$, kur $x \ge 0$ un $y \ge 0$ – veseli skaitļi. Dots, ka ir tieši 35 veseli pozitīvi skaitļi, kas nav izsakāmi šādā formā, un viens no tiem ir 58.

Atrast *a* un *b*.

31.34. Ar $[x]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x*. Izmantojot četru aritmētisko operāciju darbību zīmes, kā arī simbolus [ ] un $\sqrt{\ }$, uzrakstīt vispārīgā locekļa formulu tādai skaitļu virknei (a_n), kas katru naturālu skaitli satur kā savu locekli bezgalīgi daudzas reizes.

Vai var uzrakstīt tādu formulu, neizmantojot simbolu [ ]?

31.35. Kādā valstī ir *n* pilsētas. Starp dažām no tām nodibināta tieša gaisa satiksme (pie tam, ja ir reiss no *A* un *B*, tad ir arī reiss no *B* uz *A*). Katrai pilsētai ir tieši aviosakari ar vismaz $\frac{n}{2}$ citām šīs zemes pilsētām.

Pierādīt, ka, izmantojot tikai gaisa satiksmi, ceļotājs var apmeklēt katru pilsētu tieši vienu reizi un ar pēdējo reisu atgriezties tajā pilsētā, no kuras viņš sācis ceļojumu.