Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 28. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

28.1. No dotā $a \neq b$, $a \neq 0$. Vienādojumu pārveido par

$$x^2(a-b) - 2ax + a - b = 0.$$

Lai saknes būtu reālas un dažādas, jābūt vēl $D > 0$ jeb

$$a^2 - (a-b)^2 > 0 \Leftrightarrow b(2a-b) > 0.$$

Tas izpildās tad un tikai tad, kad vai nu $a > \frac{b}{2} > 0$, vai arī $a < \frac{b}{2} < 0$.

28.2. Uzdevumā nav dots, vai izmaiņas par 1 stundu atbilst ātruma palielināšanai vai samazināšanai. Apzīmējot ceļu ar s km, bet ātrumu ar v km/h, varam sastādīt divas sistēmas

$$\begin{cases} \frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = 1 \\ \frac{s}{v-10} - \frac{s}{v} = 1{,}5 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} \frac{s}{v-10} - \frac{s}{v} = 1 \\ \frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = 1{,}5 \end{cases}$$

Dalot pirmo vienādojumu ar otro, iegūst attiecīgi

$$\frac{(v-10)v}{(v+10)v} = \frac{1}{1{,}5} \text{ un } \frac{(v+10)v}{(v-10)v} = \frac{1}{1{,}5}.$$

Pirmajā gadījumā $v = 50$, otrajā $v = -50$ (tas neder).

Tātad $s = 300$ km un ceļā pavadītais laiks $t = \frac{300}{50} = 6$ h. Tas nozīmē, ka autobuss izbrauca plkst. 11.00.

28.3 Pieņemsim, ka krustisko taišņu stāvoklis ir patvaļīgs. Divi radušies trijstūri ir homotētiski ar centru punktā O. Pie homotētijas malu viduspunkti pāriet par malu viduspunktiem. Bet punkti, kas pie homotētijas pāriet viens par otru, atrodas uz vienas taisnes ar homotētijas centru, t. i. ar C.

28.4. Trapeces diagonāles garums ir $BC = 2R\sin(\alpha+\beta)$, viduslīnijas garums ir $2R\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$, augstums $2R\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

Tātad laukums ir $2R^2\sin^2(\alpha+\beta)\sin 2\alpha$.

28.5. Novelkam caur O divas taisnes 45° leņķī ar rūtiņu līnijām. Aplūkosim 4 radušos leņķus. Katrā no tiem ārējos un iekšējos punktus var sadalīt pa pāriem tā, ka katram ārējam punktam atbilst iekšējais punkts. Pie taišņu krustpunktiem ar riņķa līniju ārpusē ir par vienu punktu vairāk. Tātad meklējamā starpība ir 4.

28.6. Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju.
Ja n = 1, tad $x+y=a$; ja n = *2* tad $x^2+y^2=a^2-2b$.
Pieņemsim, ka $x^k+y^k=F_k(a,b)$ un $x^{k+1}+y^{k+1}=F_{k+1}(a,b)$ ir polinomi no *a* un *b* ar veseliem koeficientiem.

Tad arī $x^{k+2}+y^{k+2}=aF_{k+1}(a,b)-bF_k(a,b)$ ir polinoms no *a* un *b* ar veseliem koeficientiem.

28.7. Trīsciparu skaitļu ir 900, tāpēc divu trīsciparu skaitļu reizinājumu ir ne vairāk par

$$\frac{900\cdot 899}{2}+900<\frac{900\cdot 900}{2}+900=405900.$$

Bet sešciparu skaitļu ir 900 000. Tātad vairāk ir dotajā veidā neizsakāmu sešciparu skaitļu.

28.8.

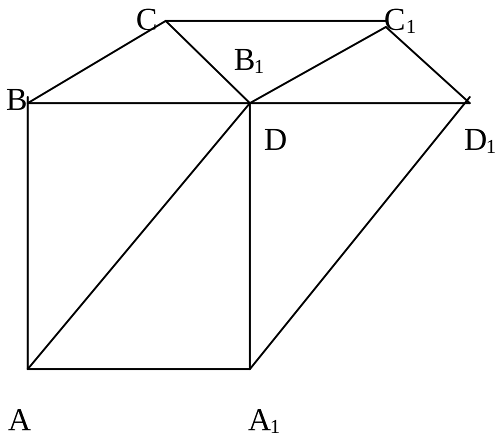
$$\sqrt{x^2+x+1}-ax-b=\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)\right]}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)}=$$

$$\frac{x^2+x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)}=\frac{\left(1-a^2\right)x^2+x(1-2ab)+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)}=\frac{\left(1-a^2\right)x+(1-2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}$$

Ja $x\to\infty$, tad saucējs tiecas uz 1 + a. Ja $1-a^2\neq 0$ un $1-2ab\neq 0$, tad skaitītāja robeža nav 0 un arī daļas robeža nav 0. Tātad $1-a^2=0$ un $1-2ab=0$. Tā kā *a* > 0, tad *a* = 1 un $b=\frac{1}{2}$.

28.9. Iztēlojamies, ka dotie stari veido trijplakņu kakta attēlu, uz kura skaldnēm dots pa punktam. Tad mums ir jākonstruē šī kakta šķēlums ar plakni, kas iet caur dotajiem punktiem.

28.10. (Skat. 28.1. zīm.)



28.1. zīm.

Pieņemsim, ka *ABCD* ir kaut kāds četrstūris ar dotiem diagonāļu garumiem un leņķa lielumu starp tām. Pārbīdīsim to par vektoru $\overline{BD}$ stāvoklī $A_1B_1C_1D_1$. Paralelograms ACC_1A_1 būs viens un tas pats visiem četrstūriem *ABCD*. Skaidrs, ka
$AB + BC + CD + DA = AB_1 + B_1C_1 + CB_1 + B_1A_1 \geq AC_1 + CA_1$.

Pie tam vienādība pastāv tad un tikai tad, kad punkti A, B_1, C_1 un C, B_1, A_1 atrodas uz vienas taisnes, t.i., kad *ABCD* ir paralelograms.

28.11. Apzīmējot y = tg$x$, iegūstam vienādojumu

$$y^3 - 2y^2 + 3y - 2 = 0 \text{ jeb } (y-1)\left(y^2 - y + 2\right) = 0.$$

Tātad tg x = 1, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$.

28.12. Meklēsim funkciju formā $f(x) = A\sin(x+\varphi)$. Tas nodrošina a) un b) punktu izpildi. Ievietojot x = 1, iegūstam φ = -1. Ievietojot x = 0, iegūstam $A\sin(-1) = 1$. Tātad meklējamā funkcija ir $f(x) = -\frac{\sin(x-1)}{\sin 1}$.

28.13. Jā; ņemam 2 virsotnes un atzīmējam viduspunktus tām četrām, kas iziet no šīm virsotnēm, bet nesavieno tās savā starpā. Jāatzīmē, ka riņķa līnija, kuras centrs ir regulāra trijstūra malas viduspunkts un kas iet caur šīs malas galapunktiem, iet caur abu citu malu galapunktiem.

28.14. $1 = \frac{666}{666}$; $2 = \frac{66}{66} + \frac{6}{6}$; $3 = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6}$; $4 = 6 - \frac{6+6}{6} + 6 - 6$;
$5 = \frac{6+6+6+6+6}{6}$; $6 = 6 + 666(6-6)$; $7 = 6 + \frac{6}{6} + 6(6-6)$; $8 = 6 + \frac{6+6}{6} + 6 - 6$;
$9 = 6 + 6 - \frac{6+6+6}{6}$; $10 = 6 + \frac{6+6+6+6}{6}$; $11 = 6 + 6 - \frac{6}{6} + 6 - 6$;

$12 = 6 + 6 + 66(6 - 6)$; $\quad 13 = 6 + 6 + \frac{6}{6} + 6 - 6$; $\quad 14 = 6 + 6 + \frac{6}{6} + \frac{6}{6}$;

$15 = 6 + 6 + \frac{6 + 6 + 6}{6}$; $\quad 16 = 6 + 6 + 6 - \frac{6 + 6}{6}$; $\quad 17 = \frac{66}{6} + 6 + 6 - 6$;

$18 = 6 + 6 + 6 + 6(6 - 6)$; $19 = \frac{66 + 6 + 6}{6} + 6$; $\quad 20 = 6 + 6 + 6 + \frac{6 + 6}{6}$.

28.15. Izmantojot kustības grafikus pierāda, ka satikšanās pārmaiņus notiek punktos *C* un *D*. Tātad 1978. satikšanās notiks punktā *D*.

28.16. Izmantojot triju perpendikulu teorēmu, pierāda, ka piramīdas *ABCD* pretējās šķautnes ir pa pāriem perpendikulāras. Pēc tam, atkal izmantojot triju perpendikulu teorēmu, pierāda, ka piramīdā, kurā pretējās šķautnes ir pa pāriem perpendikulāras, katrs piramīdas augstums iet caur pretējās skaldnes augstumu krustpunktu.

28.17. Pārejot no reizinājumiem uz summām, iegūstam

$$-\tfrac{1}{2}\cos x = \sqrt{1 - \cos x}.$$

Tātad jābūt $\cos x < 0$. Kāpinot kvadrātā un risinot kvadrātvienādojumu, dabū $\cos x = -2 \pm \sqrt{8}$. Abas šīs saknes neder, jo viena ir pozitīva, bet otra mazāka par -1.

28.18. y ir nepāru skaitlis $y = 2z + 1$. No šejienes $3 \cdot 2^{x-2} = z(z+1)$. Tātad $x \geq 2$ un skaitļi z un $z + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Skaitli $3 \cdot 2^{x-2}$ var sadalīt divu savstarpēju pirmskaitļu reizinājumā četros veidos:

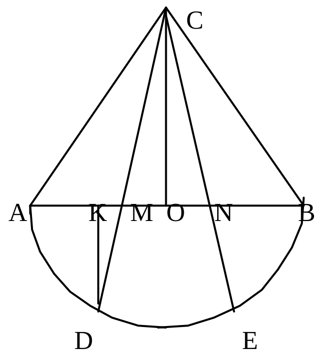
a) $z = 1, \quad 3 \cdot 2^{x-2} = z + 1;$ tad $3 \cdot 2^{x-2} = 2$, bet 2 ar 3 nedalās;

b) $z = 3, \quad 2^{x-2} = z + 1;$ tad $x = 4, y = 7$;

c) $z = 2^{x-2}, \quad 3 = z + 1;$ tad $x = 3, y = 5$;

d) $z + 1 = 1, \quad z = 3 \cdot 2^{x-2};$ tad $z = 0 = 3 \cdot 2^{x-2}$, bet tas nav iespējams.

28.19. (Skat. 28.2. zīm.)



28.2. zīm.

Apzīmējam $AB = a$. Novelkam $CO \perp AB$ un $DK \perp AB$. Tad $AK = AD\cos\angle KAD$. Tā kā loki *AD*, *DE*, *EB* ir vienādi, tad katrs no tiem ir 60° liels, tāpēc

$AD = \frac{a}{2}, \angle KAD = 60°$ un $AK = \frac{a}{4}$. Savukārt

$KD = AD\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tātad $\frac{CD}{KD} = 2$ un $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OK}} = 2$.

Tātad $OM + OK = OA - AK = \frac{a}{4}$. No šejienes $KM = \frac{a}{12}$, $OM = \frac{a}{6}$ un

$AM = AK + KM = \frac{a}{3}$.

28.20. Mazākais iespējamais svēršanu skaits ir 10.

1) Pierādīsim, ka ar 10 svēršanām uzdevums ir atrisināms.

Lemma. Ja piecas monētas jau ir sakārtotas svaru augšanas kārtībā, tad sestās monētas vietu šajā virknē var atrast ar trim svēršanām.

Pieņemsim, ka $A < B < C < D < E$.

Ar pirmo svēršanu salīdzinām *F* ar *C*. Ja *F* < *C*, tad, salīdzinot *F* ar *A* un *B*, *F* vieta ir atrasta. Otrajā gadījumā rīkojamies līdzīgi.

Ar trim svēršanām iegūstam situāciju $A < B, C < D, B < D$.

Salīdzinām *E* ar *B*.

a) *E* < *B*. Tad salīdzinām *E* ar *A*. Tagad mums ir zināma četru monētu A, E, B, D svaru kārtība un bez tam zināms, ka *C* < *D*. Ar pēdējām divām svēršanām nosakām *C* vietu šajā virknē.

b) gadījumu *B* < *E* aplūko līdzīgi.

2) Pierādīsim, ka ar 9 svēršanām nepietiek. Sešas monētas var tikt izvietotas 6! = 720 veidos, bet ar 9 svēršanām iespējami tikai 2^9 = 512 dažādi varianti; tātad nebūs iespējams atšķirt visus 720 dažādos variantus.

28.21. Apzīmēsim leņķa lielumu starp malām *a* un *b* ar γ. Tad

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \text{. Tātad}$$

$$ab = \frac{2S_{ABC}}{\sin\gamma} \geq 2.$$

Tā kā $a \leq b$, tad $b^2 \geq ab \geq 2$ un $b \geq \sqrt{2}$.

28.22. No nevienādības $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ seko, ka

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^3.$$

Tātad vismaz viena no dotajām izteiksmēm nepārsniedz $\frac{1}{4}$.

28.23. Redzams, ka *x* ir nepāru skaitlis. Ievietojot $x = 2k+1$ iegūstam

$$4k(k+1) + 8z = 2y^2 + 2.$$

Iespējami divi gadījumi:

a) y -- pāru skaitlis, $y = 2n$. Iegūstam

$$4k(k+1) + 8z = 8n^2 + 2.$$

Kreisā puse dalās ar 4, labā nē. Tātad šajā gadījumā atrisinājumu nav.

b) y -- nepāru skaitlis, $y = 2n+1$. Iegūstam

$$4k(k+1) + 8z = 8\left(n^2 + n\right) + 4.$$

Vienādības kreisā puse dalās ar 8, bet labā nedalās. Tātad arī šajā gadījumā vienādojumam atrisinājumu nav.

28.24. Pakāpeniski izsakām:

1) $0 = a * a$;

2) $1 = 0 * a = (a * a)a$,

3) $1 - x = x * 1 = x * ((x * x)x)$;

4) $\frac{a}{b} = 1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 - a * b$ izmantojam 3);

5) $\frac{1}{b} = \frac{1}{b}$ izmantojam 2) un 4);

6) $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ izmantojam 5) un 4);

7) $a - b = \frac{a-b}{a} \cdot a = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot a = (b * a) \cdot a$ izmantojam 6);

8) $-b = 0 - b$ izmantojam 1) un 7);

9) $a + b = a - (-b)$ izmantojam 8) un 7).

Uzdevums atrisināts.

28.25. Nē, nevar. Aplūkosim 7 kolonas, kas katra sastāv no 3 nokrāsotiem punktiem. Apzīmēsim krāsas ar *a* un *b*. Iespējami divi gadījumi.

1) Kādā kolonā visi burti ir vienādi (piemēram *a*). Ja kāda citā kolonā ir divi burti *a*, tad atradīsies prasītais taisnstūris. Bet tad var būt tikai četras dažādas kolonas : *abb, bab, bba, bbb.* Tātad vismaz 2 no 6 atlikušajām kolonām būs vienādas un tajās būs divi vienādi burti. Tie arī veidos prasīto taisnstūri.

2) Nevienā kolonā visi burti nav vienādi. Tad var būt tikai 6 dažādas kolonas, tātad vismaz 2 kolonas ir vienādas. Katrā no tām būs divi vienādi burti; tie arī veidos prasīto taisnstūri.

28.26. Uzdevuma atrisinājums izmanto vektoru pseidoskalārā reizinājuma jēdzienu.

$$\bar{a} \circ \bar{b} = |a||b| \sin(\bar{a}, \bar{b}).$$

Trijstūra *ABC* laukums ir $\frac{1}{2}\overline{AB} \circ \overline{AC}$. Trīs punkti *A*, *B*, *C* atrodas uz vienas taisnes tad un tikai tad, kad $\overline{AB} \circ \overline{AC} = 0$.

Izmantojot vektorus, pierāda, ka trijstūra *MFE* laukums ir $\frac{1}{4}$ no četrstūra *ABCD* laukuma, un tātad nav vienāds ar 0.

28.27. Jā, eksistē. Tāds, piemēram, ir polinoms $P(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$.

Tā kā dotais polinoms ir divu kvadrātu summa, tad tas ir nenegatīvs un vērtību 0 var pieņemt tikai tad, ja $x = 0$ un $xy - 1 = 0$, bet abas šīs vienādības reizē nevar pastāvēt. Tātad visas $P(x, y)$ vērtības ir pozitīvas.

No otras puses, ja $\varepsilon > 0$ -- patvaļīgs pozitīvs skaitlis, tad, ņemot $x = \sqrt{\varepsilon}$ un $y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, iegūstam $P(x, y) = \varepsilon$; tātad šis polinoms pieņem visas pozitīvas vērtības.

28.28. Lielākais šāds skaitlis ir 34. Lūk kā to var izdarīt:

1. grupa: 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 32.

2. grupa: 3, 7, 8, 9, 11, 14, 18, 19, 20, 22, 25, 29, 30, 31, 33, 34.

Rezultāts iegūts ar datoru palīdzību, un tam nav teorētiska izskaidrojuma.

28.29. Pierakstīsim virknes elementus piecinieku skaitīšanas sistēmā:

$a_1 = 0{,}1$

$a_2 = 0{,}10000001$

$a_3 = 0{,}1000000100000000000000000001$ utt.

Skaidrs, ka virknes robeža ir 5-nieku daļa, kur aiz komata nulles ir visās vietās, izņemot 1., 8., 27., ... , n^3, ... vietas. Šāda nuļļu un vieninieku virkne ir neperiodiska, tātad tā izsaka iracionālu skaitli.

28.30. Pieņemsim, ka $N = a+(a+1)+\cdots+b = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{(a-1)a}{2} = \frac{(b-a+1)(b+a)}{2}$.

Tā kā $b \neq a$, tad $b-a+1 > 1$ un $b+a > 1$. Viens no šiem skaitļiem ir pāra, otrs -- nepāra skaitlis. Skaitli $2N$ izteiksim formā $A \cdot 2^n$, kur A -- nepāra skaitlis. Iegūstam vienādību

$$(b-a+1)(b+a) = A \cdot 2^n.$$

Ja $A = 1$, tad $b-a+1$ kā mazākajam no reizinātājiem jābūt nepāra skaitlim, bet tad $b-a+1=1, b=a$, un uzdevuma prasība nav izpildāma.

Ja $A > 1$, tad parādīsim, kā atrast prasītos skaitļus a un b.

Ja $A > 2^n$, tad meklēsim tādus a un b, ka $b-a+1 = 2^n, b+a = A$; iznāk $a = \frac{A-2^n+1}{2}$, $b = \frac{A+2^n-1}{2}$.

Ja $A < 2^n$, tad meklēsim tādus a un b, ka $b-a+1 = A, b+a = 2^n$; iznāk $a = \frac{-A+2^n+1}{2}$, $b = \frac{A+2^n-1}{2}$.

Tātad uzdevuma prasība ir izpildāma visiem skaitļiem, kas nav divnieka pakāpes.

28.31. Ievērosim, ka

$$\left(x_1 - \frac{m+M}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{m+M}{2}\right)^2 + \cdots + \left(x_k - \frac{m+M}{2}\right)^2 =$$

$$x_1^2 - (m+M)x_1 + \left(\frac{m+M}{2}\right)^2 + x_2^2 - (m+M)x_2 + \left(\frac{m+M}{2}\right)^2 + \cdots$$

$$+ x_k^2 - (m+M)x_k + \left(\frac{m+M}{2}\right)^2 =$$

$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2\right) + k \cdot \left(\frac{m+M}{2}\right)^2$. Tātad

$$x_1^2+\cdots+x_k^2=\left(x_1-\frac{m+M}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{m+M}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_k-\frac{m+M}{2}\right)^2-k\left(\frac{m+M}{2}\right)^2\le$$

$$k\left(\frac{m-M}{2}\right)^2-k\cdot\left(\frac{m+M}{2}\right)^2=-kmM.$$

Pēdējā nevienādība iegūta šādi: ievērojam, ka x_i mainās intervāla $[m,M]$, tāpēc $\left(x_i-\frac{m+M}{2}\right)^2$ pieņem lielāko vērtību intervāla galapunktos, t.i., kad $x_i=m$ vai $x_i=\mathrm{M}$; šī vērtība iznāk $\left(\frac{m-M}{2}\right)^2$.

28.32. Jāaplūko trijstūra piramīdas ar virsotni punktā O , kas veidojas šķeļot doto daudzskaldni ar plaknēm, kas iet caur punktu *O*. Leņķiem pie virsotnes *O* jābūt tik maziem, ka šķēlumā veidojas trijstūra piramīda.

28.33. Aplūkojam 3-dimensionālu koordinātu sistēmu *Oxyt*, kur *x*, *y* -- plaknes koordinātes, bet *t* -- laiks. Šajā koordinātu sistēmā katra gājēja ceļu attēlo taisne. Starp 4 taisnēm nav paralēlu. Apzīmēsim tās ar l_1, l_2, l_3, l_4. Faktu, ka 2 gājēji sastopas, ģeometriski varam izsacīt ar to, ka attiecīgās taisnes krustojas. Tātad nekādas 3 taisnes neiet caur 1 punktu. Pēc dotā l_1, l_2 un l_3 pa pāriem krustojas. Tās nosaka plakni *Q*. Taisne l_4 krusto taisnes l_1 un l_2, pie tam atšķirīgos punktos, tātad l_4 pieder plaknei *Q*. Bet tas nozīmē, ka taisne l_4 krusto arī taisni l_3, respektīvi, 4. un 3. gājēji sastopas.

28.34. Pierādīsim vispirms, ka pārveidojot bezgalīgā periodiskā decimāldaļā, periods rodas tūlīt aiz komata. Atceroties kā notiek dalīšana, redzam, ka pietiek pierādīt, ka kādreiz radīsies atlikums 1, jeb, citiem vārdiem, ka eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka 10^n-1 dalās ar *p*. Tas seko no MFT, jo $10^{p-1}-1$ dalās ar *p*.

28.35. Lielākais šāds skaitlis ir 34. Lūk kā to var izdarīt:

1. grupa: 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 32.

2. grupa: 3, 7, 8, 9, 11, 14, 18, 19, 20, 22, 25, 29, 30, 31, 33, 34.

Rezultāts iegūts ar datoru palīdzību, un tam nav teorētiska izskaidrojuma.