Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes", 1999

LATVIJAS REPUBLIKAS 26. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

26.1. No vienādībām $a_p = a_1 + (p-1)d, \quad a_q = a_1 + (q-1)d$ seko, ka

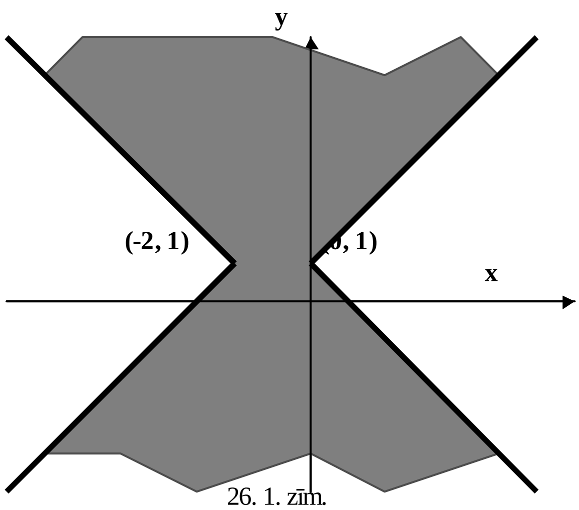
$$d = \frac{a_q - a_p}{q-p} = -(p+q), \quad a_n = p^2 + pq + q^2 - n(p+q).$$

Ja $n = 50$, $p = 5$, q = 9, tad $a_{50} = -549$.

26.2. Vispirms piekrauj 8 mašīnas, pie kam, tiklīdz kastu kopsvars mašīnā pārsniedz 1,5t, tā 1 kasti noceļ un atstāj pie mašīnas. Iekrauto kastu svars kopā ar tām, kas noliktas pie mašīnas, ir ne mazāks par 12t. Atlikušās kastes, kuru kopsvars nepārsniedz 1,5t, iekrauj 9. mašīnā, bet pie mašīnām atstāto 8 kastu svars nepārsniedz 2,8t, tādēļ tās pa 4 iekrauj atlikušās 2 mašīnās.

26.3. Leņķa A bisektrise AD atšķeļ trijstūri DAC, līdzīgu dotajam. Apzīmē BC = *a*, AD = *x*. No trijstūru līdzības seko *a* : *b* = *c* : *x* = *b* : (*a* - *x*), no kurienes $x = \frac{bc}{a}$ un $a = \sqrt{b(b+c)}$.

26.4. Atrisinājums parādīts 26. 1. zīmējumā.



26. 1. zīm.

26.5. Apzīmēsim trijstūrim apvilktās riņķa līnijas krustpunktus ar stariem *AP*, *BP*, *CP* atbilstoši ar A_1, B_1, C_1. No ievilkto leņķu īpašības seko vienādības:

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle ABB_1 + \angle ACC_1 = (180° - \angle APB - \angle BAP) + (180° - \angle APC - \angle PAC) =$$
$$360° - (\angle ACB + 60°) - (\angle ABC + 60°) - \angle BAC = 240° - (\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC) = 60°$$
.

Analogi pierāda, ka $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_1B_1 = 60°$. Tātad aplūkojamais trijstūris ir vienādmalu trijstūris.

9. klase

26.6. No dotā seko, ka 14 * * 45 = 111 *y*. Redzam, ka *y* ir četrciparu skaitlis 1*z*95, (z = 2 vai z = 3). Pārbaudot redzam, ka der vienīgi vērtība *z* = 2. Nesalasāmie cipari ir 3 un 7.

26.7. Tas ir iespējams. Piemēram,

$$\frac{1}{2} \to \frac{2}{1} \to \frac{3}{1} \to \frac{4}{1} \to \frac{1}{4} \to \frac{5}{4} \to \frac{4}{5} \to \frac{9}{5} \to \frac{14}{5} \to \frac{19}{5} \to \frac{5}{19} \to \frac{24}{19} \to \frac{19}{24} \to \frac{43}{24} \to$$
$$\frac{67}{24} \to \frac{24}{67} \to \frac{91}{67} \to \frac{67}{91}.$$
Pārveidojumu gaitu iegūst, izdarot attiecīgās operācijas pretējā kārtībā.

26.8. Apzīmējam $\frac{x}{y} = z$. No sistēmas $x^2 + y^2 = \frac{6}{z}$, $x^2 - y^2 = z$ iegūstam $x^2 = \frac{3}{z} + \frac{z}{2}$, $y^2 = \frac{3}{z} - \frac{z}{2}$. Izdalot pirmo vienādojumu ar otro, iegūstam vienādojumu $z^4 - 5z^2 + 6 = 0$. Tā kā z > 0, tad $z \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. No šejienes iegūstam sistēmas atrisinājumus

Atbilde: $\left\{\left(\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{2}\right), \left(-\sqrt[4]{8}, \sqrt[2]{2}\right), \left(0{,}5\sqrt[4]{108}, 0{,}5\sqrt[4]{12}\right), \left(-0{,}5\sqrt[4]{108}, -0{,}5\sqrt[4]{12}\right)\right\}$.

26.9. Apzīmēsim doto četrstūri ar *ABCD* un tā malu viduspunktus ar *E*, *F*, *G*, *H* ($E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$). Pēc vektoru saskaitīšanas likuma

$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DF}$, vai

$\overline{EF} = 0{,}5\left(\overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CF} + \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DF}\right) = 0{,}5\left(\overline{BC} + \overline{AD}\right)$.

Analogi $\overline{GH} = 0{,}5\left(\overline{BA} + \overline{CD}\right)$. Tā kā vektoru summas modulis ir mazāks vai vienāds ar vektoru moduļu summu, tad

$\left|\overline{EF}\right| \le 0{,}5\left(\left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{AD}\right|\right)$, $\left|\overline{GH}\right| \le 0{,}5\left(\left|\overline{BA}\right| + \left|\overline{CD}\right|\right)$, pie kam vienādība ir tad un tikai tad, ja $\overline{BC}\uparrow\uparrow\overline{AD}$ un $\overline{BA}\uparrow\uparrow\overline{CD}$. Abas nevienādības saskaitot dabū

$$|EF|+|GH|\le 0{,}5(|AB|+|BC|+|CD|+|DA|)=0{,}5P,$$

kur *P* -- četrstūra perimetrs. Uzdevumā dots, ka $|EF|+|GH|=0{,}5P$, tātad dotais četrstūris ir paralelograms.

26.10. Pieņemsim, ka no viena punkta *A* iziet vairāk par diviem vienas (sarkanas) krāsas nogriežņiem *AB*, *AC*, *AD*. Tad, vai nu trijstūrim *BCD* visas malas ir zilas, vai nu veidojas sarkans trijstūris ar virsotni punktā *A*.

Norādītā savienošana ir iespējama, ja regulāra piecstūra malas nokrāso zilas, bet diagonāles sarkanas.

26.11. Izdarot identiskus pārveidojumus, iegūstam

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}=2^{\sqrt{\log_2 3}}-\left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}}=2^{\sqrt{\log_2 3}}-2^{\log_2 3\cdot\sqrt{\frac{1}{\log_2 3}}}=2^{\sqrt{\log_2 3}}-2^{\sqrt{\log_2 3}}=0$$

.

26.12. To var izdarīt ar desmit svēršanām, atsverot pakāpeniski 1g, 2g, 4g, 8g,16g, 31g, 63g, 125g, 250g, 500g. Kopā tas dod 1 kg cukura.

Ar indukciju pierāda, ka ar *n* svēršanām var nosvērt ne vairāk kā 2^n - 1 g cukura. Tātad ar 9 svēršanām 1kg cukura nosvērt nevar.

26.13. Jā, var. Piemēram, var rīkoties šādi:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\to\left(\frac{2}{1},\frac{4}{3}\right)\to\left(\frac{1}{1},\frac{1}{3}\right)\to\left(\frac{1}{1},\frac{3}{1}\right)\to\left(\frac{2}{1},\frac{4}{1}\right)\to\left(\frac{3}{1},\frac{5}{1}\right)\to\left(\frac{4}{1},\frac{6}{1}\right)\to\left(\frac{5}{1},\frac{7}{1}\right)\to\left(\frac{1}{5},\frac{1}{7}\right)\to$$
$$\left(\frac{6}{5},\frac{8}{7}\right)\to\left(\frac{5}{6},\frac{7}{8}\right).$$

26.14. Atkarībā no novilktās taisnes virziena un tā, kuru trijstūra malu tā krusto, iespējami trīs gadījumi. Trijstūra daļu laukumu attiecība šajos gadījumos ir

$$\frac{\sin\alpha}{4\sin3\alpha-\sin\alpha},\quad \frac{\sin\alpha\sin2\alpha}{4\sin4\alpha\sin3\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha},\quad \frac{\sin\alpha}{4\sin5\alpha+\sin\alpha}.$$

Laukumu attiecība ir 7:1, ja $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

26.15. Pierādīsim, ka to nevar izdarīt. Pieņemsim no pretējā, ka kubu 6×6×6 no norādītajiem ķieģeļiem var uzbūvēt. Sadalīsim šo kubu kubiņos ar izmēriem 1×1×1. Pieņemsim, ka sākumā visi kubiņi ir balti. Nokrāsosim dažus no tiem melnus šādā veidā: a) nokrāsojam melnus visus kubiņus, kas atrodas 1., 3. un 5. slānī, skatoties no apakšas,

b) nokrāsojam melnus visus kubiņus, kas atrodas 1., 3. un 5. slānī, skatoties no kreisās puses,

c) nokrāsojam melnus visus kubiņus, kas atrodas 1., 3. un 5. slānī, skatoties no priekšas.

Paliek 27 balti kubiņi. Viegli redzēt, ka katrs ķieģelis, no kuriem uzbūvēts lielais kubs, satur 0, 2 vai 4 baltos kubiņus; tātad kopējam skaitam jābūt pāra skaitlim. Iegūtā pretruna pierāda, ka kubu no norādītajiem ķieģeļiem uzbūvēt nevar.

26.16. *Lemma*. Ja *O* ir nogriežņa *AB* viduspunkts, tad $MA^2 + MB^2 = 2 \cdot MO^2 + \frac{1}{2} AB^2$.

Pierādījums seko no teorēmas par paralelograma diagonāļu kvadrātu summu.

Izmantojot lemmu, aprēķinām, ka visu nogriežņu kvadrātu summa ir vienāda ar 216 R^2.

26.17. Atbilde: $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{bc}{a\sqrt{b^2 + c^2}}$.

26.18. Ja skaitļa 2^n ciparu summa ir 5, tad tā pēdējais cipars var būt 2 vai 4. Ja pēdējais cipars ir 4, tad skaitlis uzrakstāms formā 10...04. Šāds skaitlis nedalās ar 8 un nav divnieka pakāpe. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, tad jāaplūko vairāki gadījumi, atkarībā no priekšpēdējā cipara.

Atbilde: n = 5; 2^n = 32.

26.19. Doto izteiksmi var pārveidot formā: $S = \frac{1}{2}(2\cos t + \cos x \cos y)^2 + \cos x - \cos y - 1$. Tā kā vienmēr iespējams atrast *t* vērtību, lai $2\cos t + \cos x \cos y$ būtu vienāda ar nulli, tad uzdevuma nosacījumi izpildīsies visiem (*x*, *y*), kuriem izpildās nevienādība $\cos x - \cos y > 0$.

26.20. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} 2^{\cos x}} = 2^{1+\frac{\sin x + \cos x}{2}}.$$

Tātad mums ir jāpierāda, ka

$$1 + \frac{\sin x + \cos x}{2} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ jeb } \sin x + \cos x \geq -\sqrt{2}.$$

Bet $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$, ko arī vajadzēja pierādīt.

26.21. Pieņemsim, ka $|AB| = s$ km,

laivas ātrums stāvošā ūdenī ir y km/h,

straumes ātrums -- x km/h. Tad

$$\begin{cases} \frac{s}{x} = 24 \\ \frac{s}{y+x} + \frac{s}{y-x} \geq 10 \\ \frac{s}{1{,}4y+x} + \frac{s}{1{,}4y-x} \leq 7 \\ y > x \end{cases}$$

Mums jāaprēķina $\frac{s}{x+y}$.

Ievietojot abās nevienādībās $s = 24x$, iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} 24x\left(\frac{1}{y+x} + \frac{1}{y-x}\right) \geq 10 \\ 12x\left(\frac{1}{1{,}4y+x} + \frac{1}{1{,}4y-x}\right) \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{48xy}{y^2 - x^2} \geq 10 \\ \frac{67{,}2xy}{1{,}96y^2 - x^2} \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y^2 - 24xy - 5x^2 \leq 0 \\ 9{,}8y^2 - 48xy - 5x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}x \leq y \leq 5x \\ y \leq -\frac{10}{98}x \quad \text{vai} \quad y \geq 5x \end{cases}$$

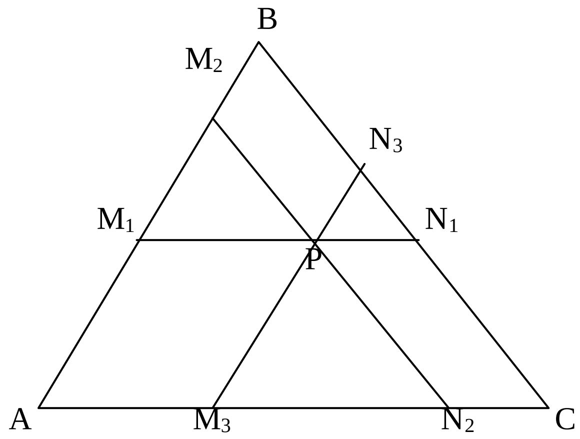
Tā kā x, $y > 0$, tad vienīgā iespēja ir $y = 5x$. Tāpēc $\frac{s}{x+y} = \frac{s}{6x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{s}{x} = \frac{1}{6} \cdot 24h = 4h$.

Atbilde: motorlaiva ceļu veiktu 4 stundās.

26.22. Apzīmējam trijstūru M_1PM_2, PN_1N_3, M_3N_2P līdzības koeficientus ar trijstūri ABC ar k_1, k_2, k_3 (Skat 26.2. zīm.) . Tad $k_1 = \frac{|M_1P|}{|AC|} = \frac{|AM_3|}{|AC|}$, $k_2 = \frac{|PN_1|}{|AC|} = \frac{|N_2C|}{|AC|}$, $k_3 = \frac{|M_3M_2|}{|AC|}$. Saskaitot šīs vienādības, iegūstam $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Līdzīgi iegūstam $k_1 + k_2 = \frac{M_1P + PN_1}{AC} = \frac{x}{b}$, $k_1 + k_3 = \frac{x}{a}$, $k_2 + k_3 = \frac{x}{c}$.

Saskaitot šīs 3 vienādības, dabūjam $2(k_1+k_2+k_3)=\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}$, no kurienes $x=\frac{2abc}{ab+ac+bc}$.



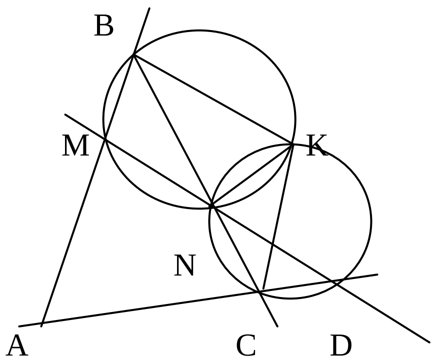
26.2. zīm.

26.23. Ja *x* ir doto skaitļu kopīgais dalītājs, tad *x* dala arī skaitli $3(7n+5)-7(3n+2)=1$. Tātad tas var būt tikai 1 vai - 1.

26.24. Apvelkam riņķa līnijas ap trijstūriem *BMN* un *NCD* (skat. 26.3. zīm.). To krustpunktu apzīmējam ar *K*. Pierādīsim, ka arī riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri ABC, iet caur punktu *K*. Šai nolūkā jāpierāda, ka $\angle BAC+\angle BKC=180°$. Bet $\angle BAC+\perp BKC=\angle BAC+\angle BKN+\angle NKC=\angle BAC+(180°-\angle BMN)+\angle NDC=$

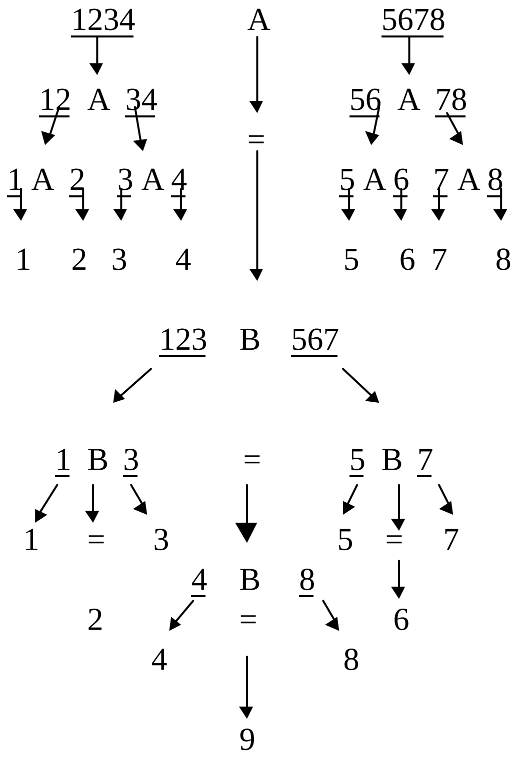
$\angle BAC+\angle AMN+\angle NDC=180°$,

ko arī vajadzēja pierādīt. Līdzīgi pierāda, ka arī riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri *AMD*, iet caur punktu *K*.



26.3. zīm.

26.25. Jā var. Svēršanas shēma parādīta zīmējumā. Svari apzīmēti ar *A* un *B*, monētas ar cipariem. Bultiņa, kas vilkta no svaru kausa, norāda, ka šis kauss izrādījies smagāks;



26.4. zīm.

bultiņa, kas vilkta vertikāli lejup caur “=“ zīmi, norāda, ka kausi bijuši līdzsvarā. Nepasvītrotais cipars norāda, kura monēta ir smagāka. Gadījumā, ja visas trīs reizes kausi palikuši līdzsvarā, mēs smagāko monētu atrodam, bet nenoskaidrojam, kuri svari ir precīzi, kuri neprecīzi. Lasītājam ieteicams noskaidrot, kāds ir minimālais svēršanu skaits *n* monētu gadījumā, kā arī aplūkot uzdevuma variantu, kad papildus jānosaka, kuri svari ir precīzie.

26.26. Varam pārbaudīt, ka daļu pārim $\left(\frac{x}{y},\frac{z}{t}\right)$ pieļautie pārveidojumi *nemaina* vērtību $|xt-yz|$. Tiešām,

$|(a-b)d-(c-d)b| = |ad-bc|$, $|(a+b)d-(c+d)b| = |ad-bc|$, $|bc-ad| = |ad-bc|$.

Sākuma dotajam daļu pārim šis invariants ir 2, bet iegūstam 4. Tātad uzdevuma prasība nav izpildāmas.

26.27. Pieņemsim, ka $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDE} = S_{ABE} = s$, bet $S_{ADE} = \frac{3s}{2}$ (skat. 26.5. zīm). Tā ka trijstūru *ABC* un *DBC* augstumi pret pamatu *BC* ir vienādi, tad *AD*||*BC*.

Analoģiski iegūstam, ka $BE||CD$ un $CE||AB$. Tātad $ABCF$ un $GBCD$ ir paralelogrami. Tātad $|AF| = |BC| = |GD|$, tāpēc $|AG| = |FD|$. Bet no šejienes seko, ka $S_{AGE} = S_{EFD} = x$. Apzīmējam $S_{GEF} = y$ un iegūstam vienādojumu $2x + y = \frac{3s}{2}$.

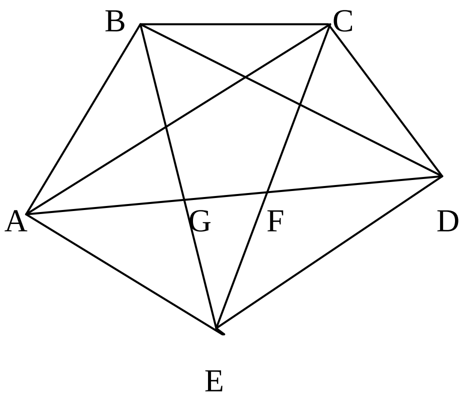
Bez tam $S_{CFD} = s - x$, $S_{ACF} = S_{ABC} = s$, $S_{AFE} = x + y$.

Tā kā $\frac{S_{AFC}}{S_{FCD}} = \frac{AF}{FD} = \frac{S_{AFE}}{S_{FED}}$, tad iegūstam vienādojumu $\frac{s}{s-x} = \frac{x+y}{x}$. Risinot sistēmu

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{3s}{2} \\ \frac{s}{s-x} = \frac{x+y}{x} \\ x < \frac{3s}{2} \end{cases}$$

iegūstam, ka $x = y = \frac{s}{2}$. Piecstūra laukums ir

$$S_{ABCF} + S_{CFD} + S_{ADE} = 2s + \left(s - \frac{s}{2}\right) + \frac{3s}{2} = 4s.$$



26.5. zīm.

26.28. Viens dotā vienādojuma atrisinājums ir (5, 2). Pieņemsim, ka vienādojuma atrisinājums naturālos skaitļos ir (a, b). Tad doto vienādojumu uzrakstām formā $a^2 - 6b^2 = 1$. Kāpinām abas puses kvadrātā: $a^4 - 12a^2b^2 + 36b^4 = 1$, jeb $\left(a^2 + 6b^2\right)^2 - 6(2ab)^2 = 1$, tātad arī skaitļu pāris $\left(a^2 + 6b^2, 2ab\right)$ ir atrisinājums. Šādā veidā no sākotnējā atrisinājuma varam iegūt bezgalīgu atrisinājumu sēriju. Skaitļu pāris $(5a + 12b, 2a + 5b)$ arī ir dotā vienādojuma atrisinājums, jo $(5a + 12b)^2 - 6(2a + 5b)^2 = a^2 - 6b^2$.

26.29. Pierādīsim, ka maksimālais novelkamo nogriežņu skaits ir 100.

Pierādīsim, ka 100 nogriežņus var novilkt. Nokrāsosim 10 punktus zilā, bet 10 -- sarkanā krāsā, un novilksim visus 100 nogriežņus, kas savieno divus dažādas krāsas punktus. Trijstūris neveidojas, jo no jebkuriem 3 punktiem vismaz 2 ir vienādā krāsā, un tie ar nogriezni nav savienoti.

Pieņemsim, ka ir novilkts kaut kāds nogriežņu daudzums. Aplūkosim punktu *A*, no kura iziet visvairāk nogriežņu; šo nogriežņu skaitu apzīmēsim ar *n*. Tie ir *n* punkti ar kuriem *A* savienots, savā starpā nedrīkst būt savienoti, tātad katrs no tiem var būt savienots ar augstākais 20 - *n* punktiem. No otras puses, *A* un tie 19 - *n* punkti, ar kuriem *A* nav savienots, katrs var būt savienots ar ne vairāk kā *n* punktiem (pēc *n* definīcijas). Tātad nogriežņu skaits nevar pārsniegt

$$\frac{1}{2}\left(n(20-n)+(20-n)n\right)=n(20-n)=100-(10-n)^2\leq 100.$$

26.30. var gadīties, ka 10 skaitļus nevar izvelēties, piemēram: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 56, 53, 52, 51, 50, 49, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 58, 57, 65.

Pierādīsim, ka 9 skaitļus vienmēr var izvēlēties. Apzīmēsim doto skaitļu virkni ar $a_1, a_2, \ldots, a_{64}, a_{65}$. Izdalīsim no tās augošu apakšvirkni $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ... šādā veidā:

1) $a_{1,1} = a_1$

2) ja $a_{1,n}$ jau izvēlēts, tad $a_{1,n+1}$ ir nākamais skaitlis šajā virknē aiz $a_{1,n}$, kas ir lielāks par $a_{1,n}$.

Iegūsim galīgu augošu virkni $a_{1,1} < a_{1,2} < \cdots < a_{1,n_1}$.

Ja $n_1 \geq 9$, tad esam atraduši monotoni augošu apakšvirkni ar vismaz 9 locekļiem. Ja $n \leq 8$, tad veidojam citu apakšvirkni $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, ... šādi:

1) $a_{2,1}$ ir pirmais vēl neizmantotais dotās virknes loceklis,

2) ja $a_{2,n}$ jau izvēlēts, tad $a_{2,n+1}$ ir nākamais vēl neizmantotais skaitlis dotajā virknē, kas lielāks par $a_{2,n}$.

Turpinām šo veidošanu, kamēr tā iespējama un katrs dotās virknes skaitlis iekļauts kādā apakšvirknē.

Ja kādā apakšvirknē ir vismaz 9 locekļi, tad vajadzīgais iegūts. Ja turpretī katrā mūsu konstruētajā augošajā apakšvirknē ir ne vairāk par 8 locekļiem, tad pašu apakšvirkņu ir vismaz 9. Pierādīsim, kā tad konstruēt monotoni dilstošu apakšvirkni ar 9 locekļiem. Mēs to konstruēsim no otra gala.

Pēdējais tās loceklis būs a_{9,n_9} . Pirms locekļa a_{9,n_9} dotajā virknē jāatrodas tādam 8. apakšvirknes loceklim a_{8,m_8} , ka $a_{8,m_8} > a_{9,n_9}$. Tiešām, ja pēdējais pirms a_{9,n_9} esošais

8. apakšvirknes loceklis būtu mazāks par a_{9,n_9}, tad a_{9,n_9} būtu ierakstīts nevis devītajā, bet astotajā apakšvirknē. Tātad tāds a_{8,m_8} eksistē. Tas būs konstruējamās apakšvirknes otrais loceklis no beigām. Līdzīgi pierāda, ka pirms a_{8,m_8} dotajā virkne jāatrodas tādam a_{7,m_7}, ka $a_{7,m_7} > a_{8,m_8}$, kas būs konstruējamas virknes trešais loceklis no beigām, utt.

26.31. Katra komanda izspēlējusi 13 spēles. Tāpēc eksistē vismaz viena komanda, kurai ir vismaz 7 uzvaras; apzīmējam to ar *A*. Aplūkojam tās 6 komandas, pār kurām *A* nav izcīnījusi minētās 7 uzvaras. Starp šīm komandām ir risinājies iekšējs turnīrs. Šajā iekšējā turnīrā vismaz vienai komandai -- *B* ir vismaz 3 uzvaras. Aplūkosim 2 iekšējā turnīra komandas, pār kurām *B* nav izcīnījusi minētās 3 uzvaras; viena no tām ir uzvarējusi otru, to arī izvēlēsimies par *C*.

26.32. Ievērojam, ka $f(t)+f(1-t)=1$. Apzīmēsim

$$S=f(0)+f\left(\tfrac{1}{m}\right)+f\left(\tfrac{2}{m}\right)+\dots+f\left(\tfrac{m-1}{m}\right)+f(1),$$

$$S=f(1)+f\left(\tfrac{m-1}{m}\right)+f\left(\tfrac{m-2}{m}\right)+\dots+f\left(\tfrac{1}{m}\right)+f(0).$$

Summējot iegūstam $2S=m+1$. Tāpēc

$$f(0)+f\left(\tfrac{1}{m}\right)+f\left(\tfrac{2}{m}\right)+\dots+f\left(\tfrac{m-1}{m}\right)+f(1)=S-f(0)=\tfrac{m+1}{2}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{3m+1}{6}.$$

26.33. Kopējais rotācijas tilpums ir $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

26.34. Konstrukcijas gaita izmanto sekojošu teorēmu. Ja leņķa *MON* malas krusto trīs stari, kas iet caur vienu punktu, tad taisne, kas novilkta caur divu radušos četrstūru diagonāļu krustpunktiem, iet caur punktu *O*.

26.35. To naturālo skaitļu *n* kopu, kuriem 5^n ciparu summa mazāka par 1976^{1976}, apzīmēsim ar *S*. Ar $S_{k_m k_{m-1}\cdots k_1}$ apzīmēsim to naturālo skaitļu kopu no *S*, kuru pēdējie cipari ir $k_m \dots k_2 k_1$. Pieņemsim no pretējā, ka *S* ir bezgalīga kopa. Tad eksistē tāds cipars a_1, ka kopa S_{a_1} ir bezgalīga. Tad eksistē tāds cipars a_2, ka kopa $S_{a_2a_1}$ ir bezgalīga utt. Ja mēs pierādīsim, ka virknē $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ bezgalīgi daudz cipari atšķirsies no 0, tad būsim ieguvuši pretrunu ar *S* definīciju.

Pieņemsim no pretējā, ka virknē $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$, sākot no a_m ir tikai nulles. Tas nozīmē, ka eksistē piecinieka pakāpe, kura beidzas ar cipariem $00\dots0a_m a_{m-1}\dots a_1$, un nuļļu skaits ir patvaļīgi liels. Tādā gadījumā skaitli $a_m a_{m-1}\dots a_1$ var izteikt kā patvaļīgi lielas piecinieka pakāpes un skaitļa, kas beidzas ar patvaļīgi lielu skaitu nullēm, starpību. Šādam skaitlim jādalās ar patvaļīgi lielu piecinieka pakāpi, bet tas nav iespējams.