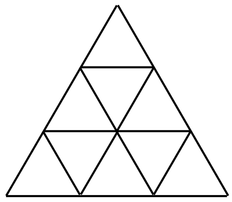
Valsts matemātikas olimpiādes 1. posma uzdevumi

5. klase

5.1. a) Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 20 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?
b) Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 12-stūri, kura laukums ir 4500 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

5.2. Vai eksistē tādi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A + B$ ciparu summas visas savā starpā vienādas?

5.3. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem (skat. 1. att.) ierakstīts viencipara naturāls skaitlis; dažādos trijstūrīšos ierakstīti dažādi skaitļi. Aplūkojam visas tādas divu skaitļu summas, kuri ierakstīti trijstūrīšos ar kopīgu malu.
a) Vai var gadīties, ka neviena no šīm summām nepārsniedz 10?
b) Kāds mazākais skaits no šīm summām var būt pāra skaitļi?



1. att.

6. klase

6.1. a) Vai kvadrātu var sagriezt 10 kvadrātos?
b) Vai kvadrātu var sagriezt 103 kvadrātos?

6.2. Volejbola turnīrā katra komanda ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Volejbolā neizšķirtu nav. Turnīru beigās izrādījās, ka astotdaļai visu komandu nav nevienas uzvaras. Cik spēļu izspēlēja turnīrā?

6.3. Vai eksistē tādi trīs dažādi naturāli skaitļi, ka katru divu skaitļu reizinājums dalās ar to summu?

7. klase

7.1. a) Vai kvadrātu var sagriezt 11 kvadrātos?
b) Vai kvadrātu var sagriezt 113 kvadrātos?

7.2. Vai plaknē var atlikt četrus punktus tā, lai trīs attālumi starp punktiem būtu 5 cm, 6 cm un 10 cm, bet katrs atlikušais attālums nepārsniegtu 4 cm?

7.3. Kādu lielāko skaitu skaitļu var uzrakstīt rindā tā, lai katru trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu pozitīva, bet katru piecu pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu negatīva?

8. klase

8.1. Aprēķināt izteiksmes vērtību!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{70}\right)$$

8.2. Punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes; B atrodas starp A un C. Trijstūri AMB un BNC ir vienādmalu. Pierādīt, ka $AN = CM$.

8.3. Atrast tādu divpadsmitciparu skaitli (kas nesatur ciparu 0) tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari veidotu pirmskaitli un visi šie pirmskaitļi būtu dažādi!

9. klase

9.1. a) Vai var atrast tādus trīs dažādus naturālus skaitļus a, b, c, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$?

b) Vai var atrast tādus desmit dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, ka $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=1$?

9.2. Vai šaurleņķu trijstūrī mediānas garums var būt vienāds ar viduslīnijas garumu?

9.3. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās?

10. klase

10.1. Pierādīt, ka katram naturālam n ir patiesa vienādība

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

10.2. Uz leņķa MON malām OM un ON atlikti attiecīgi nogriežņi $OA=AB=BC$ un $OD=DE=EF$. Pierādīt, ka trijstūru AEC un DBF laukumi ir vienādi!

10.3. Uz šaha galdiņa novietotas dažas figūras, katrā lauciņā ne vairāk kā viena. Gan katrā rindā, gan katrā kolonnā atrodas nepāra skaits figūru. Pierādīt, ka uz melnajiem lauciņiem kopā ir pāra skaits figūru!

11. klase

11.1. Pierādīt, ka 10^n-9n-1 dalās ar 81 visām naturālām n vērtībām!

11.2. Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes; B atrodas starp A un C. Trijstūri AMB un BNC ir vienādmalu, pie tam M un N atrodas vienā pusē no taisnes AC. Pierādīt, ka leņķis starp taisnēm AN un CM $60°$.

11.3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, $a>b$. Zināms, ka a dalās ar b un $a+1$ dalās ar $b+1$. Pierādīt, ka $a>b^2$.

12. klase

12.1. Virkne uzdota rekurenti ar formulu $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n-1$, kur $x_1=3$ un $x_2=6$. Pierādīt, ka virkni var definēt ar formulu $x_n=2^n+n$.

12.2. Uz riņķa līnijas diametra AB atlikts punkts C, bet X un Y ir punkti uz riņķa līnijas, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Pierādīt, ka $\frac{\operatorname{tg}\sphericalangle AXC}{\operatorname{tg}\sphericalangle XAC}=\frac{\operatorname{tg}\sphericalangle AYC}{\operatorname{tg}\sphericalangle YAC}$.

12.3. Turnīrā piedalās n šahisti ($n\geq 2$), katrs ar katru citu spēlē vienu reizi. Par uzvaru spēlētājs iegūst 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Pēc turnīra beigām katrs spēlētājs aprēķināja divus skaitļus: Z – visu to spēlētāju punktu summu, kam viņš zaudējis, un U – visu to spēlētāju punktu summu, kurus viņš uzvarējis. Vai var gadīties, ka katram spēlētājam pastāv nevienādība $Z>U$?