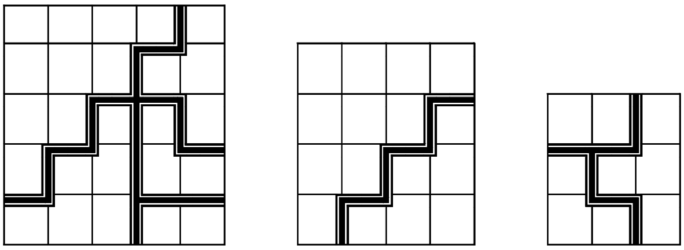
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Jā. Skat., piem., 6.zīm.



6.zīm.

5.2. a) jā; der, piemēram, secība 1; 5; 2; 6; 3; 7; 4; 8.
b) nē; skaitlim 4 blakus var atrasties tikai 8.

5.3. Vai nu Aija, vai Maija apēda vismaz 13 konfektes, tāpēc Paija – vismaz 14. Tātad A., M., P. kopā apēda vismaz 25+14=39 konfektes, tātad K. – ne vairāk kā 1. Tāda situācija ir iespējama: P – 14, A – 13, M – 12, K – 1.

5.4. $\overline{abcd} > \overline{ab00} = \overline{ab} \cdot 100 > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$

5.5. Nē. Apskatīsim otro nepāra skaitli x, kas parādās rindā. Pirms tā uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis, un tai jādalās ar x+1 – ar pāra skaitli. Tā nevar būt.

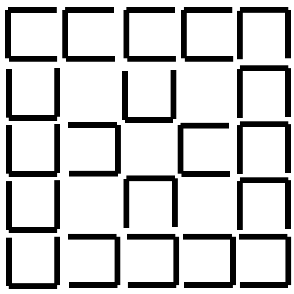
6.1. Nē. Tad $(k_1+k_2+k_3)+(r_1+r_2+r_3)=57$, tātad visu ierakstīto skaitļu summa būtu 28,5. Bet tai jābūt 10-u un 9-u summai – pretruna.

6.2. Ja skaitļi ir a; b; a+b; a+2b; 2a+3b; 3a+5b, tad to summa *S* ir 8a+12b. Redzam, ka piektais skaitlis ir $\frac{1}{4}S$.

6.3. Apzīmējam ciparus ar *a*; *b*; *c*. Tad $\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c)$. Pirmais saskaitāmais noteikti dalās ar 3; otrais ir viens un tas pats visiem minētajiem trīsciparu skaitļiem. No dotā seko, ka 2(*a*+*b*+*c*) nedalās ar 3. Tāpēc arī 4(*a*+*b*+*c*) nedalās ar 3, no kurienes seko vajadzīgais.

6.4. Skaitlis $5040=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ dalās ar divciparu skaitļiem 10; 12; 14; 15; 18 20; 21; 24; 28; 30; 35; 36; 40; 42; 48; 56; 60; 70; 72; 84. Tātad der, piemēram, skaitlis 5043.

6.5. Jā. Skat., piem., 7. zīm.



7. zīm.

7.1. a) nē, jo summa satur tieši 5 nepāra saskaitāmos, tātad ir nepāra skaitlis.
b) jā; (-5)+(-4)+...+4+5=0.

7.2. Atbilde: 10 figūras.

7.3. Atbilde: jā.

Risinājums. Izveidosim 50 pārus: (1g, 100g), (2g, 99g), ..., (50g, 51g). Katrā pārī zelta gabalu kopējā masa ir 101g. pieņemsim, ka Ņurga jau paņēmis x pilnus pārus, tad viņš paņēmis pa vienam zelta gabalam no 25-2x pāriem, bet 50-x-(25-2x)=25+x pāri vēl vispār nav aiztikti. Tagad Ņurga ņem atlikušos zelta gabalus no tiem pāriem, no kuriem viens gabals jau paņemts (tādu ir 25-2x) un vēl x pilnus pārus; kopā viņš būs paņēmis x+(25-2x)+x=25 pilnus pārus, t.i., 50 zelta gabalus, kas veido pusi no kopējās masas.

7.4. Atbilde: jā.

Risinājums. Pietiek atrast 10 dažādus skaitļus ar īpašību: visu 10 skaitļu summa dalās ar jebkuras šo skaitļu grupas summu. Tādi skaitļi ir, piemēram, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 un 45!-45 (ievērojam, ka 1+2+...+9=45).

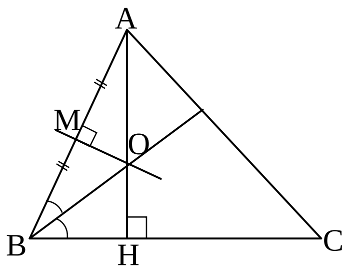
7.5. Ja katrai lampai būtu piestiprināti ne vairāk kā 2 lentu gali, tad lentu būtu ne vairāk kā $\frac{6\cdot 2}{2}=6$ – pretruna. Tātad ir lampa A, kurai piestiprinātas (vismaz) 3 lentas; pieņemsim, ka tās iet uz lampām x, y, z. Vismaz divas no lampām x, y, z savienotas ar lentu; tās kopā ar A veido meklējamo trijnieku.

8.1. Atbilde: 13 grafiki.

8.2. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Novelkam vēl vienu taisni t, kas nav ne paralēla, ne perpendikulāra nevienai no dotajām. Uz taisnes t virzienu izvēlamies patvaļīgi, uz citām – tā, lai šie virzieni veidotu šaurus leņķus ar t virzienu. Tad jebkuras kustības gaitā kustīgā objekta projekcija uz t pārvietojas t virzienā, tātad nevar atgriezties kustības sākuma stāvoklī.

8.3.



8.zīm.

Apzīmējam $\angle BAO=\alpha$. Tā kā $\Delta AMO=\Delta BMO$ (*kk*), tad arī $\angle ABO=\alpha$. Tāpēc $\angle ABC=2\alpha$ un no ΔABH iegūstam $\alpha+2\alpha+90°=180°$, $\alpha=30°$, $\angle ABC=2\alpha=60°$.

8.4. Sauksim skolēnu, kas nav noslēgts, par atklātu. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Ja visi skolēni ir noslēgti, tad tie visi savā starpā draudzējas – pretruna, jo katram ir 24 draugi. Pieņemsim, ka ir kāds atklāts skolnieks A. Apskatām viņa draugus; to ir vismaz 21, un tie visi ir noslēgti. Tāpēc tie visi draudzējas savā starpā. Tāpēc katram no tiem ir vismaz 21 draugs (pārējie 20 un A), un viņi ir atklāti – pretruna.

8.5. Atbilde: nē, neeksistē.

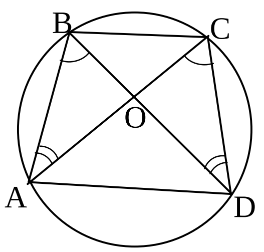
Risinājums. Šķirojam divus gadījumus:

1) a+b+c+d dalās ar 2003. Tad katrā pārī (a; b+c+d), (b; a+c+d), (c; a+b+d), (d; a+b+c), (a+b; c+d), (a+c; b+d), (a+d; b+c) vai nu neviens, vai abi skaitļi dalās ar 2003. Tātad ar 2003 dalās nepāra daudzums apskatīto skaitļu.

2) a+b+c+d nedalās ar 2003. Tad katrā no minētajiem pāriem ne vairāk kā viens skaitlis dalās ar 2003; tātad ar 2003 dalās ne vairāk kā 7 apskatāmie skaitļi.

9.1. Ievērojam, ka $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2}=3+\sqrt{8}$, $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=7-2\sqrt{10}=7-\sqrt{40}$ un $\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}=6+\sqrt{20}$. Tāpēc abas izteiksmes vienādas savā starpā.

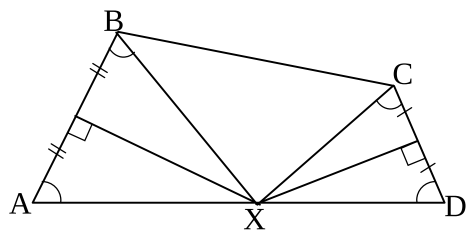
9.2. Apzīmējam AC un BD krustpunktu ar O, bet no A un D izbraucošo laivu ātrumus attiecīgi ar u un v. No uzdevumā dotā seko, ka $\frac{AB}{u}=\frac{DC}{v}$ jeb $\frac{AB}{DC}=\frac{u}{v}$.Ievilkto leņķu vienādības dēļ $\Delta AOB\sim\Delta DOC$, tāpēc $\frac{BO}{CO}=\frac{AB}{DC}$. Tātad $\frac{BO}{CO}=\frac{u}{v}$, t.i., laivas ceļā no B resp. C līdz O pavadīs vienādu laiku.



9. zīm.

9.3. Tā kā $\left(\sqrt{2ab}\right)^2 = 2ab \le a^2 + b^2$, tad uz tāfeles esošo skaitļu kvadrātu summa gājienu rezultātā nepalielināsies. Sākumā tā ir 2003. Ja uz tāfeles paliek viens skaitlis X, tad $x^2 \le 2003 < 2025 = 45^2$; tāpēc $x<45$.

9.4.



10. zīm.

Apzīmēsim vidusperpendikulu krustpunktu ar X. Tad ΔAXB un ΔDXC vienādsānu, tāpēc XA=XB un XC=XD. Bez tam $\angle AXB=180°-2\angle A=180°-2\angle D=\angle CXD$. Tāpēc $\angle AXC=\angle DXB$ un $\Delta AXC=\Delta BXD$ (*mlm*). Tāpēc arī AC=BD.

9.5. Pavisam ir 98 summas. Pieņemsim, ka tās visas ir nepāra skaitļi. Apzīmējot pāra skaitļus ar p, bet nepāra – ar n, viegli iegūt, ka pastāv tikai šādas iespējas:

a) n n n n n n n…
b) n p p n p p n p p…
c) p n p p n p p n p p n…
d) p p n p p n p p n p…

Visos gadījumos skaidrs, ka n un p daudzumi atšķiras, bet tiem jābūt vienādiem.

To, lai 97 summas būtu nepāra skaitļi, var panākt šādi: $\underbrace{\text{nppnpp...npp}}_{75\,\text{skaitļk}}\underbrace{\text{nnn...n}}_{25\,\text{skaitļk}}$.

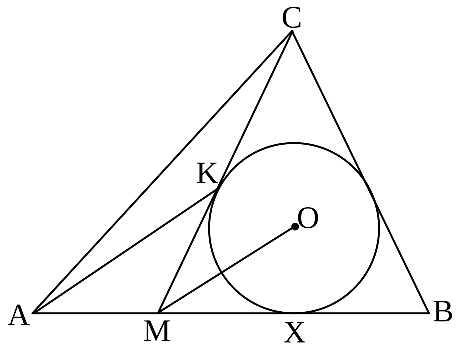
10.1. Nē, nevar. Parabola krusto Oy asi punktā (0;q), bet taisne – punktā (0;1); tāpēc q=1. Tāpēc taisne krusto OX asi punktā (-1;0). Šis punkts atrodas uz parabolas, tāpēc $(-1)^2+p(-1)+1=0$ un p=2. Bet tad parabolas vienādojums ir $y=x^2+2x+1$ jeb $y=(x+1)^2$, un tai ir tikai viens kopīgs punkts ar Ox asi.

10.2. Ja c ir vienādojuma $x^4+px+q=0$ sakne, tad $c^4+pc+q=0$; tas nozīmē, ka c ir vienādojuma $c^2 \cdot x^2+px+q=0$ sakne. Tātad šī vienādojuma diskriminants nav negatīvs, no kurienes seko vajadzīgais.

10.3. Skaidrs, ka x>1 (citādi x^2-1 dalītos ar 2003). Tā kā $2\cdot 501-1001=1$, tad LKD(501, 1001)=1. Tāpēc mums jāmeklē tādu x, ka x^2-1 dalās ar reizinājumu $501\cdot 1001$.

Ievērojam, ka $2003^2-1=(2003-1)(2003+1)=2002\cdot 2004=8\cdot 501\cdot 1001$, un atliek pierādīt, ka skaitļi $n\cdot 501\cdot 1001$, $1\le n\le 7$, nav izsakāmi formā x^2-1, $x\in N$, $x>1$. To izdara ar tiešu pārbaudi.

10.4. Tā kā ΔMCD – vienādsānu, tad riņķa līnija pieskaras malai MB tās viduspunktā X. Tāpēc MX=MA. Bez tam MX=MK kā pieskares. Tāpēc $\angle MAK=\angle MKA=\alpha$. No ārējā leņķa īpsšībām $\angle KMX=2\alpha$; tā kā MO ir $\angle KMX$ bisektrise, tad $\angle OMX=\alpha=\angle KAM$, no kurienes seko vajadzīgais.



11. zīm.

10.5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Sanumurējam rindiņas no lejas uz augšu un kolonnas no kreisās uz labo ar skaitļiem 1; 2; 3; ...; 9; 10. Nokrāsoto rūtiņu visu „koordinātu" summa ir 2(1+2+...+10)=110. Tāpēc visu atlikušo rūtiņu koordinātu summa ir 10(1+2+...+10)+10(1+2+...+10)-110, t.i., pāra skaitlis.

Katram 1×2 rūtiņu taisnstūrim visu koordinātu summa ir nepāra skaitlis un šo taisnstūru skaitam jābūt 45 – nepāra skaitlim. Tātad visu 45 taisnstūru visu rūtiņu visu koordinātu summai jābūt nepāra skaitlim – pretruna.

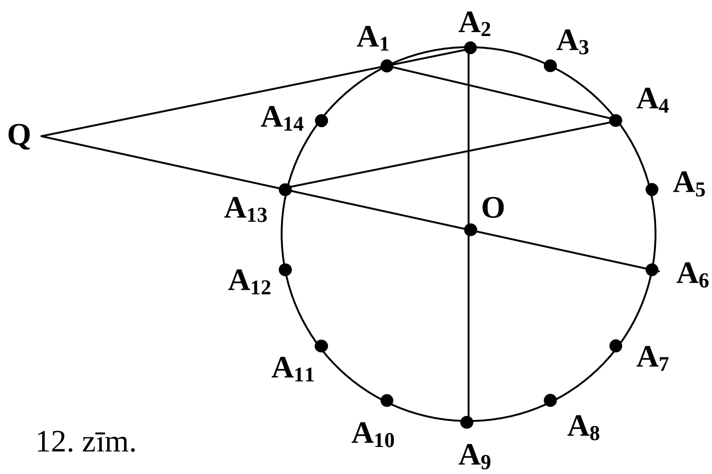
11.1. Ievērojam, ka pie $k \geq 1$

$\frac{1}{F_k F_{k+2}} = \frac{F_{k+1}}{F_k F_{k+1} F_{k+2}} = \frac{F_{k+2} - F_k}{F_k F_{k+1} F_{k+2}} = \frac{1}{F_k F_{k+1}} - \frac{1}{F_{k+1} F_{k+2}}$. Tāpēc vienādības kreisā puse pārveidojas par

$$\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \ldots + \frac{1}{F_nF_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} = \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} = 1 - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}},$$

k.b.j. Var lietot arī matemātisko indukciju.

11.2. Skaidrs, ka $QA_1A_4A_{13}$ ir paralelograms. Tāpēc $QA_1=A_4A_{13}$ un $QA_{13}=A_1A_4$. Tā kā $\angle A_1A_2A_9=\angle A_2OA_{13}$, seko $OQ=A_2Q$. Tāpēc $R+QA_{13}=A_1A_2+QA_1$ jeb $R+A_1A_4=A_1A_2+A_4A_{13}=A_1A_2+A_1A_6$, k.b.j.



12. zīm.

11.3. Atverot iekavas, iegūstam ab-a+2b=n. Tā kā n dalās ar b, tad arī a dalās ar b, tāpēc a>b (atceramies, ka a≠b); tātad a≥2b. Tā kā n dalās ar a, tad 2b dalās ar a; tāpēc 2b≥a. Skaidrs, ka a=2b. Tad n=ab-a+2b=$2b^2$-2b+2b=$2b^2$ un 2n=$4b^2$=$(2b)^2$.

11.4. Pieņemsim pretējo. Ar a(n) resp. b(n) apzīmēsim ciparu skaitu Aļģirda resp. Benedikta uzrakstītajā skaitlī, kas satur ciparu n. Tā kā jau četru mazāko naturālo skaitļu summa 1+2+3+4=10 ir lielāka par 9

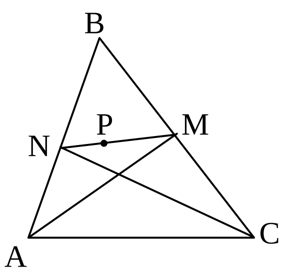
– nenulles ciparu skaitu, tad a(n) iespējamas augstākais 3 dažādas vērtības; tas pats attiecas uz b(n). Tāpēc iespējami augstākais 9 dažādi pāri (a(n), b(n)). Tā kā saskaņā ar pieņēmumu dažādiem nenulles cipariem n ir dažādi pāri (a(n),b(n)), tad katrs iespējamais pāris (a(n), b(n)) sastopams tieši vienu reizi. Tāpēc a(n) ir trīs dažādas vērtības, katra tieši trim dažādiem cipariem n. Ja būtu a(n)≥4, tad tieši trīs cipari būtu četrciparu vai vēl garākos skaitļos – pretruna. Ja būtu a(n)=2, tad tieši trīs cipari būtu divciparu skaitļos – pretruna. Tāpēc a(n) iespējamas tikai divas vērtības 1 un 3 – pretruna.

11.5. Katram pozitīvam veselam A ir augstākais 2003·A pāri (x,y), kam izpildās nosacījums f(x,y)=A. Pieņemsim, ka visiem m un n pastāv nevienādība f(m,n)≤m·n. Tad no m·n≤A seko f(m,n)≤A. Tāpēc no m·n≤A seko, ka vai nu f(m,n)=1 vai f(m,n)=2, ..., vai f(m,n)=A. Tātad tādu pāru (m,n), kam izpildās m·n≤A, ir ne vairāk par 2003·A. Bet pie fiksēta m ir $\left[\frac{A}{m}\right]$ tādu pāru (m,n), ka m·n≤A. Tāpēc $\left[\frac{A}{1}\right]+\left[\frac{A}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{A}{A}\right]\le 2003\cdot A$. Tā kā [x]≥x-1, iegūstam $A\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{A}\right)-A\le 2003A$ un $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{A}\le 2004$ katram veselam pozitīvam A. Bet tā ir pretruna ar labi zināmu faktu, ka $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{A}$ neierobežoti aug, augot A.

12.1. Vispirms pieņemsim, ka a≠0. No dotā seko, ka $b^2<ac$ un a<0. Tā kā pirmās nevienādības abas puses ir nenegatīvi skaitļi, tad no tās seko $b^4<a^2c^2$. Tātad trinoma $a^2x^2+2b^2x+c^2$ diskriminants ir negatīvs. Tā kā $a^2>0$, tad vajadzīgais pierādīts.

Ja a=0, tad jābūt b=0 un c<0. Tad uzdevuma apgalvojums acīmredzams.

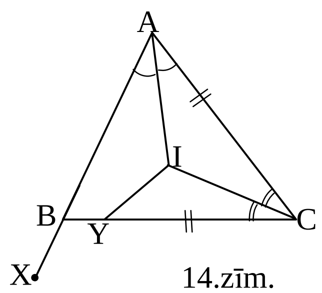
12.2.



13.zīm.

Apzīmēsim NP=s, 0≤s≤MN. Skaidrs, ka d(P,AB), d(P,AC), d(P,BC) ir argumenta s lineāras funkcijas. Tāpēc arī f(s)=d(P,AB)+d(P,BC)-d(P,AC) ir argumenta s lineāra funkcija. Bet f(s)=0 pie s=0 un s=MN (seko no bisektrises punktu īpašības). Atliek ievērot, ka lineāra funkcija, kas ir 0 pie divām dažādām argumenta vērtībām, ir 0 visā definīcijas apgabalā.

12.3.

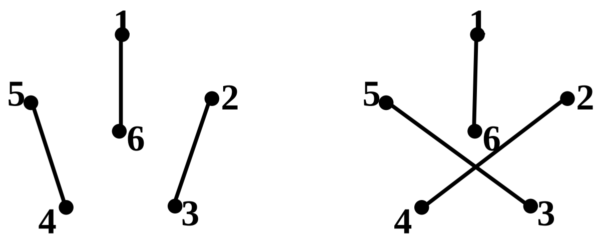


14.zīm.

Apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru ar I. Tad $\angle AIC=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-60°)=120°$. Tā kā $\Delta ACI=\Delta YCI$ (*mlm*), tad arī $\angle CIY=120°$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle AIX=120°$. Bet no tā seko, ka stari IY un IX sakrīt.

12.4. Ievērosim, ka $2n^3-8n^2-6n+2003=2n(n-1)(n-3)-12n+2000+3$. Tā kā vai nu n, vai n-1 ir pāra skaitlis, tad izteiksmes vērtība dod atlikumu 3, dalot ar 4. Bet kvadrāts dod atlikumu 0 vai 1, dalot ar 4: $(2k)^2=4k^2$, $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$. Tātad uzdevumā minētais nav iespējams.

12.5. Tā kā katrai komandai jāspēlē 10 spēles, tad vajadzīgas vismaz 10 dienas. Parādīsim, ka ar 10 dienām pietiek. Apskatīsim regulāru piecstūri; sanumurēsim tā virsotnes un centru ar skaitļiem no 1 līdz 6 (tie ir komandu numuri).



15. zīm.

Apskatām 2 figūras, katra no kurām sastāv no 3 nogriežņiem (15.zīm.). Katrai no tām iespējami 5 dažādi stāvokļi. Katrs stāvoklis atbilst vienai dienai; nogriežņi savieno punktus ar tiem numuriem, kuriem atbilstošās komandas šajā dienā spēlē. Skaidrs, ka katri punkti tiek savienoti divos stāvokļos, un katrām divos dažādos stāvokļos esošām figūrām ir augstākais viens kopīgs nogrieznis.