47. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1996./97. m.g.

ATRISINĀJUMI

97.1. Viena no iespējām ir šāda

$$25 \times 3 = 75.$$

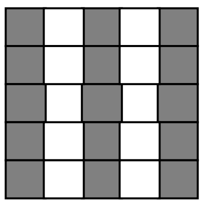
97.2. Ja skaitlis nedalās ar 3, tad reizinot to ar 2, tas arī nedalīsies ar 3; ja skaitlis nedalās ar 3, tad mainot tā ciparus vietām, tas arī nedalīsies ar 3. Tā kā 1 nedalās ar 3, tad ar dotajām operācijām no 1 nevar iegūt skaitli 96.

Skaitli 116 var iegūt šādi:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 46 \to 92 \to 29 \to 58 \to 116 .$$

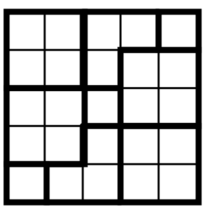
97.3. Uzskatīsim, ka sakumā sienāži sākumā sēž uz koordinātu ass punktos ar koordinātēm 0, 1, 2. Izpildot vienu lēcienu nemainās sienāža koordinātes paritāte. Tā kā sākumā tieši viens sienāzis atrodas punktā ar nepāra koordināti, tad viņš atgriezīsies savā vietā; tā kā sienāži izveitojušies citā kārtībā, tad malējie sienāži ir samainījušies vietām.

97.4. Var nokrāsot 15 melnas rūtiņas (skat. 6. zīm.)



6. zīm.

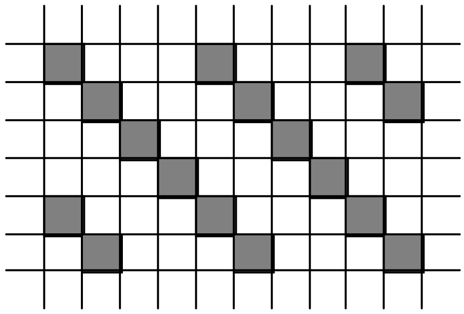
Lielāku skaitu rūtiņu iekrāsot nevar. Sadalīsim kvadrātu, kā parādīts 7. zīm.



7. zīm.

Katrā no kvadrātiem 2×2 un katrā stūrītī var iekrāsot augstākais 2 rūtiņas, atlikušajos 3 vienības kvadrātos – vēl 3 rūtiņas; tātad kopā ne vairāk par 15 rūtiņām.

97.5. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.

97.6. Jā, to var izdarīt, piemēram, šādi: $\{1, 1, -1, -1\}$.

97.7. Nē, šis skaitlis nav vesels

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+\left(1-\frac{1}{32}\right)+\left(1-\frac{1}{64}\right)=$$

$$6-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)=$$

$$6-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{64}=$$

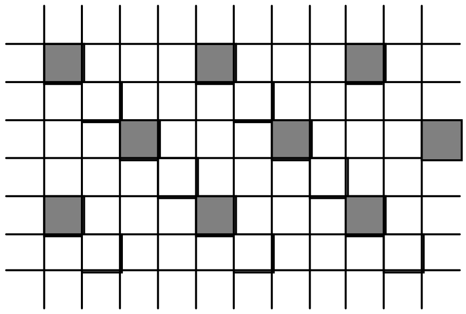
$$6-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)+\frac{1}{64}=\cdots$$

$$6-1+\frac{1}{64}=5\frac{1}{64}.$$

97.8. Sadalīsim doto kvadrātu 16 kvadrātos ar izmēriem 3×3. Vismaz viens no tiem satur ne mazāk par 3 melnām rūtiņām. Viegli pārbaudīt, ka jebkurā gadījumā atradīsies rūtiņa, kurai ir divas kopīgas malas ar melno rūtiņu.

97.9. Skaitli $2^3 \cdot 3^1$ ir jāpārveido par skaitli $2^2 \cdot 3^3$. Katrā gājienā kāpinātāju summa mainās par 1. Tā kā sākumā šī summa ir 4 – pāra skaitlis, un mēs izpildīsim 60 gājienus, tad arī beigās šai summai ir jābūt pāra skaitlim; taču $2+3$ nav pāra skaitlis. Tātad tieši stundas laikā nav iespējams no skaitļa 24 iegūt skaitli 108.

97.10. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 9. zīmējumā.



9. zīm.

97.11. Pārveidojot, iegūstam

$$1-(2-(3-(4-(5-(6-(7-(8-(9-x)))))))) =$$
$$(1-2+3-4+5-6+7-8+9)-x =$$
$$(-1)\cdot x+5.$$

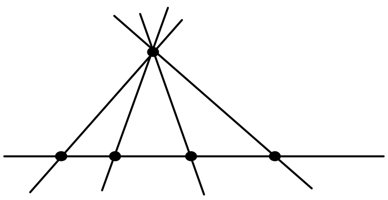
97.12. Jā, var izvēlēties, piemēram, skaitļus $n = 12^2$, $k = 12$.

97.13. Šķirosim gadījumus, atkarībā no tā kāds lielākais punktu skaits atrodas uz vienas taisnes.

1) Uz vienas taisnes atrodas 5 punkti; tad citu punktu nav un taisne ir viena (skat. 10. zīm.)

10. zīm.

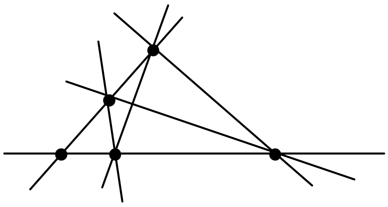
2) Uz vienas taisnes atrodas 4 punkti; tad piektais punkts nepieder šai taisnei un veidojas 5 taisnes (skat. 11. zīm.)



11. zīm.

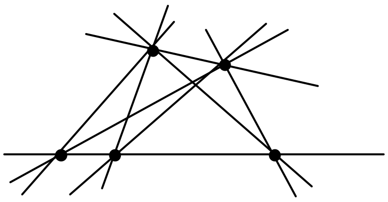
3) Uz vienas taisnes atrodas 3 punkti (teiksim *A*, *B* un *C*); tad iespējami divi gadījumi:

a) pārējie divi punkti *X* un *Y* atrodas uz vienas taisnes ar kādu no minētajiem 3 punktiem; tad iegūstam 6 taisnes (skat. 12. zīm.),



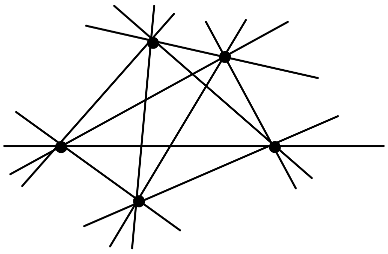
12. zīm.

b) pārējie divi punkti *X* un *Y* neatrodas uz vienas taisnes ar kādu no minētajiem 3 punktiem; tad iegūstam 8 taisnes (skat. 13. zīm.).



13. zīm.

4) Nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes; tad veidojas 10 taisnes (skat. 14. zīm.).

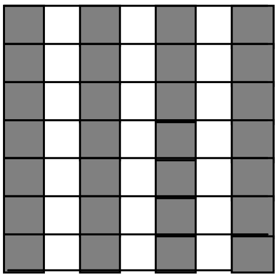


14. zīm.

97.14. Ja 0,5 l un 1 l pudeles kopā satur ne mazāk kā 50 l "Fanta"-s, tad ar tām var izveidot 50 litru daļu Jānim, pārējo atdodot Jurim.

Pretējā gadījumā 0,7 l pudeles kopā satur vairāk par 50 litriem "Fanta"-s. Tad ar tām var izveidot 49 l "Fanta"-s. Tā kā ne 100 l ne 99,5 l nevar izveidot no pudelēm 0,7 l, tad ir vai nu vismaz viena 1 l pudele, vai divas 0,5 l pudeles; pievienojot 1 litru 49 litriem, iegūsim 50 l "Fanta"-s.

97.15. Nē, nevar. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas, kā parādīts 15. zīmējumā.



15. zīm.

Šajā kvadrātā melno rūtiņu ir par 7 vairāk nekā balto. Katrā kvadrātā 2×2 ir vienāds skaits melno un balto rūtiņu; bet kvadrātā 3×3 vienas krāsas rūtiņu ir par 3 vairāk nekā otras krāsas rūtiņu. Tā kā 7 nedalās ar 3, tad prasītais sadalījums nav iespējams.

97.16. Pārveidojot, iegūstam:

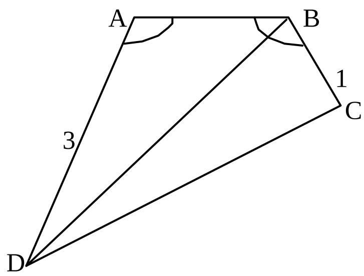
$$\frac{x^8-1}{x^2+1}=\frac{\left(x^4-1\right)\cdot(x^4+1)}{x^2+1}=\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^4+1\right)}{x^2+1}=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^4+1\right)$$

97.17. Virknes turpinājumu viennozīmīgi nosaka tās pēdējie 2 cipari (protams jāņem vērā, ka šajā vietā pilnībā uzrakstīts pēdējais skaitlis); uzrakstām virkni:

2, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, <u>3, 2</u>, 6, 1, 2, 2, 4, 8, <u>3, 2</u>, ...

Redzam, ka virkne tālāk periodiski atkārtosies, un cipara 7 šajā virknē nav

97.18. Skat. 16. zīm.



16. zīm

No dotā seko, ka $\angle DAB=\angle ABC>\angle ABD$. Tā kā trijstūrī ABD pretī lielākam leņķim atrodas lielāka mala, tad $BD>AD=3$; no šejienes iegūstam prasīto nevienādību:

$DC>DB-BC>3-1=2$.

97.19. Aplūkosim skaitļu grupas

{1, 4, 9, 16, 25}, {2, 8, 18}, {3, 12}, {5, 20}, {6, 24}.

Tās kopā satur 14 skaitļus; ārpus šīm grupām ir 11 skaitļi no 1 līdz 25. Tātad no 17 izvēlētajiem skaitļiem vismaz 6 pieder izvēlētajām 5 grupām. Tas nozīmē, ka vismaz divi no izvēlētajiem skaitļiem pieder vienai grupai; viegli pārbaudīt, ka to reizinājums ir vesela skaitļa kvadrāts.

97.20. Astoņstūri ar diagonālēm (kas savā starpā nešķeļas) sadalām 6 trijstūros. Astoņstūra virsotnes sanumurējam ar skaitļiem 1, 2, 3 tā, lai katrā trijstūrī būtu visi numuri. Vismaz viens no skaitļiem tiks lietots ne vairāk par 2 reizēm. Virsotnēs, kurās ierakstīts šis skaitlis, ievietojam lampas; acīmredzot viss astoņstūris būs apgaismots.

97.21. Izmantojot identitāti

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}=\frac{y}{x\cdot(x+y)}$$

Pārveidojam identitātes kreiso pusi

$$\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(c+b)}+\frac{c}{a(a+c)}=$$

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+b}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+c}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c+b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+c}\right)=$$

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}.$$

97.22. Jā, var. Skat., piemēram, 17. zīmējumu.

11	4	10
8	5	3
5	6	9

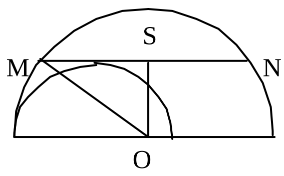
17. zīm.

97.23. Dotie skaitļi, dalot ar 3, dod dažādus atlikumus; tiešām

$$n\equiv n\ (\mathrm{mod}\,3),\quad n-1996\equiv n+2\ (\mathrm{mod}\,3),\quad n+1996\equiv n+1\ (\mathrm{mod}\,3).$$

Tātad viens no šiem skaitļiem dalās ar 3. Šis skaitlis nav pirmskaitlis tikai, ja ir vienāds ar 3; tātad $n-1996=3$. Bet tādā gadījumā $n+1996=3995$ nav pirmskaitlis, jo dalās ar 5. Tātad šāda skaitļa *n* nav.

97.24. Skat. 18. zīmējumu.



18. zīm.

No Pitagora teorēmas seko, ka $MS^2 = R^2 - r^2$, tāpēc meklējamais laukums ir

$$\frac{1}{2}\pi\left(R^2 - r^2\right) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = 50 \cdot \pi.$$

97.25. Dotos nosacījumus pierakstīsim vienādojumu sistēmas veidā.

(x – 5 santīmu monētu skaits, y – 10 santīmu monētu skaits, z – 20 santīmu monētu skaits.

$$\begin{cases} x + y + z = 39 \\ 5x + 10y + 20z = 500. \end{cases}$$

Pareizinot pirmo vienādojumu ar 10 un atņemot no otrā iegūsim:

$$-5x + 10z = 110.$$

Pieņemsim pretējo, ka $x > z$; tad

$$10z = 110 + 5x > 110 + 5z \Rightarrow 5z > 110 \Rightarrow z > 22;$$

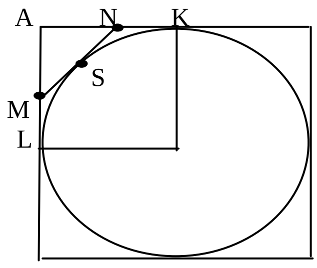
Taču tad $5x + 10y + 20z \geq 5z + 20z > 25 \cdot 22 > 500$. Iegūta pretruna.

97.26. Doto nevienādību var pārveidot formā

$$a^2b + b^2a \leq a^3 + b^3 \Leftrightarrow$$
$$a^3 - a^2b + b^3 - b^2a \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(a^2 - b^2\right)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

kas, protams, ir patiesa.

97.27. Skat. 19. zīmējumu.



19. zīm.

No pieskaru īpašības, kas vilktas no viena punkta seko vienādība

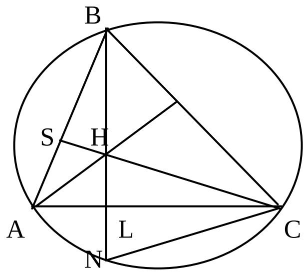
$$AM + AN + MN = (AM + MS) + (AN + NS) =$$
$$(AM + ML) + (AN + NK) = 2R.$$

Ievērosim, ka $AM + AN > MN$; tātad

$$MN < R\,.$$

97.28. Nē, nevar. Iekrāsosim doto kvadrātu šaha galdiņa kārtībā. Tad melno un balto lauciņu skaits nav vienāds. Taču katra no dotajām figūrām pārklāj vienādus baltos un melnos laukumus; pretruna.

97.29. Apvilksim ap doto trijstūri *ABC* riņķa līniju (skat. 20. zīm.).



20. zīm.

Mums ir jāpierāda, ka $HL = NL$. Lai to pierādītu, pierādīsim, ka trijstūri *HLC* un *NLC* ir vienādi; tā kā tie ir taisnleņķa trijstūri ar kopīgu kateti, atliek pierādīt, ka leņķi *HCL* un *NCL* ir vienādi. Tiešām

$$\angle HCL = \angle SCA = 90^\circ - \angle BAC =$$
$$\angle ABL = \angle ABN = \angle ACN = \angle LCN.$$

Izmantota teorēma par ievilktajiem leņķiem.

97.30. Pieņemsim pretējo, ka $a + b + c + d$ ir pirmskaitlis. Tad

$$a \cdot (a + b + c + d) = a^2 + ab + ac + ad =$$
$$a^2 + cd + ac + ad = (a + c) \cdot (a + d).$$

Tātad $(a + c) \cdot (a + d)$ dalās ar $(a + b + c + d)$. Tā kā $(a + b + c + d)$ ir pirmskaitlis, tad $a + c$ vai $a + d$ dalās ar $(a + b + c + d)$, bet tas nav iespējams, jo dalītājs ir lielāks par dalāmo.

97.31. a) Pielietojam nevienādību par divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2\,.$$

b) Izmantojot iepriekšējo nevienādību, iegūstam

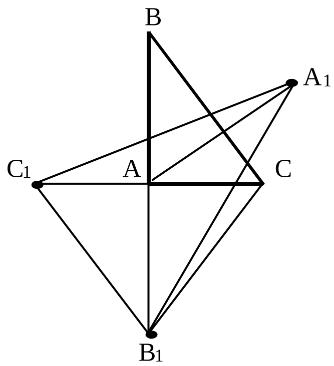
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)=$$
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 2+2+2=6.$$

Tātad vismaz viens no dotajiem skaitļiem ir ne mazāks par 3.

Faktiski, izmantojot nevienādību par 3 skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, var pierādīt, ka abi dotie skaitļi ir ne mazāki par 3.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$$

97.32. Skat. 21. zīm.



21. zīm.

Ja trijstūriem ir vienādi pamati un augstumi, tad to laukumi ir vienādi; tāpēc

$$S_{A_1AB_1}=S_{A_1AB} \quad \text{un} \quad S_{A_1AC_1}=S_{A_1AC}.$$

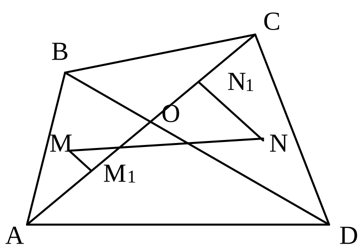
No šejienes

$$S_{A_1AB_1}+S_{A_1AC_1}=S_{ABA_1C}=2\cdot S_{ABC}=2.$$

Tā kā

$$S_{AC_1B_1}=S_{ABC}=1, \text{ tad}$$
$$S_{A_1B_1C_1}=2+1=3.$$

97.33. Skat. 22. zīm.



22. zīm.

MM_1 ir nogriežņa OA vidusperpendikuls, NN_1 -- nogriežņa OC vidusperpendikuls. Iegūstam

$$MN \geq M_1N_1 = OM_1 + ON_1 = \frac{1}{2}AC.$$

Līdzīgi pierāda, ka $MN \geq \frac{1}{2}BD.$ Tāpēc

$$MN \geq \frac{1}{4}(AC + BD) = \frac{1}{4}((AO + BO) + (CO + DO)) >$$
$$\frac{1}{4}(AB + CD).$$

97.34. Var izvēlēties, piemēram, šādus 10 sarkanos skaitļus:

$$2p_1,\ 2p_2, \ldots, 2p_{10},$$

kur $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ -- dažādi nepāra pirmskaitļi, bet zilo skaitli 2^6. Viegli pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildās.

97.35. Apzīmēsim skolēnu draudzību skaitus mēneša sākumā un beigās attiecīgi ar a_1 un b_1, a_2 un b_2, ... , a_n un b_n .
Ievērosim, ka $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ un $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ ir pāra skaitļi, jo katra draudzība tiek ieskaitīta 2 reizes. Iegūstam

$$2k = (a_1 - b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$
$$\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{n \text{ reizes}}$$

No šejienes seko, ka n ir pāra skaitlis.

97.36. Izmantojot vienādību

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y}{x \cdot (x+y)}$$

pārveidojam prasītās identitātes kreisās puses izteiksmi.

$$\frac{a_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n}{a_1(a_n + a_1)} =$$
$$\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n + a_1}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + a_1}\right) =$$
$$\frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n(a_n + a_1)}.$$

97.37. Nē, nevar. Piemēram, rūtiņai a2 ir trīs kopīgas malas ar blakus rūtiņām, bet ienākot un izejot no rūtiņas tornis krusto 2 malas.

97.38. Pierādījumā izmanto faktu, ka skaitļi $p, 2p, \ldots, (q-1)p$ dod visus nenulles atlikumus pēc moduļa *q*.

97.39. Aplūkosim 5 intervālus $(0; 0{,}2), (0{,}2; 0{,}4), (0{,}4; 0{,}6), (0{,}6; 0{,}8), (0{,}8; 1)$. Tā kā ir doti 4 punkti, tad vismaz vienā no šiem intervāliem neatradīsies neviens no dotajiem punktiem. Par skaitli *x* izvēlēsimies šā intervāla viduspunktu (vēl varam uzskatīt, ka ne visi punkti *a*, *b*, *c*, *d* atrodas šā nogriežņa galapunktos. Tādā gadījumā visi skaitļi $|x-a|, |x-b|, |x-c|, |x-d|$ ir ne mazāki par 0,1 (piedevām vismaz viens no skaitļiem ir lielāks par 0,1); no šejienes seko pierādāmā nevienādība.

97.40. Apgalvojums seko no tā, ka iesvītrotie četrstūri ir vienādi. Atņemot no to laukumiem dotā taisnleņķa trijstūra laukumu, iegūsim Pitagora teorēmu.