SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1995./96. m.g.

5. klase

96.1. Ar divciparu skaitli atļauts veikt sekojošas operācijas:

a) mainīt tā ciparus vietām, ja pēc maiņas pirmais cipars nav nulle,

b) pieskaitīt tam 7, ja rezultāts arī ir divciparu skaitlis.

Vai ar šādiem gājieniem, veicot tos pēc patikas ilgi jebkādā secībā var no 19 iegūt 95?

96.2. Ar kādu ciparu beidzas visu naturālo skaitļu summa

a) no 1 līdz 9 ieskaitot,

b) no 1 līdz 99 ieskaitot ?

96.3. Deju ansamblī ir 5 zēni un 5 meitenes. Vai var būt, ka visām meitenēm ir dažāds draugu – zēnu skaits, bet visiem zēniem ir vienāds draudzeņu – meiteņu skaits? Visas draudzības apskatām tikai ansambļa ietvaros.

96.4. Divi velosipēdisti, starp kuriem attālums bija 24 km, devās viens otram pretī. Pēc stundas attālums starp viņiem bija 12 km. Kāds attālums starp viņiem būs vēl pēc pusstundas? Velosipēdistu ātrumi ir nemainīgi.

96.5. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai tajā var 8 rūtiņas nokrāsot melnas un 8 – baltas tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā būtu 3 vienas krāsas un 1 otras krāsas rūtiņa?

6. klase

96.6. Saskaitot 6 dažādus naturālus skaitļus, summā ieguva 24. Kādi varēja būt saskaitāmie?

96.7. Uzzīmēt trijstūri un četrstūri tā, lai to kopīgā daļa būtu daudzstūris ar 8 malām.

96.8. No skaitļa 1230123012301230 jāizsvītro vairāki cipari tā, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 9 un būtu maksimāli liels. Kuri cipari jāizsvītro?

96.9. Vai taisne var krustot visas

a) sešstūra malas,

b) septiņstūra malas.

96.10. Pierādīt, ka

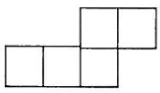
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

7. klase

96.11. Jāņa solis par 10 procentiem īsāks par Pētera soli, bet stundā viņš veic par 11 procentiem vairāk nekā Pēteris. Kurš no zēniem iet ātrāk?

96.12. Kādā valstī ir tikai 5 dilleru un 4 dilleru naudas zīmes. Pierādīt, ka ar tām var nopirkt jebkuru mantu, kuras vērtība ir no 1995 dilleriem līdz 2005 dilleriem ieskaitot.(Pārdevējiem stingri aizliegts izdot naudu atpakaļ)

96.13. Kādu lielāko daudzumu figūru, kāda parādīta 1. zīm., var izgriezt no taisnstūra ar izmēriem 5×6?



1.zīm.

96.14. Pierādīt, ka skaitļu 19951995 un 19952003 lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

96.15. Krava sver 10 tonnas. Tā sapakota kastēs tā, ka nevienas kastes svars nepārsniedz 1 tonnu. Mūsu rīcībā ir vairākas platformas; katras platformas kravnesība ir 3 tonnas. Kastes izpakot nedrīkst.

Pierādīt: lai kā arī būt sapakota krava, to var aizvest ar 5 platformām, bet var gadīties, ka ar 4 platformām nepietiek..

8. klase

96.16. Pierādīt, ka

$$2^{1995}+2^{1996}+2^{1997}+2^{1998}$$

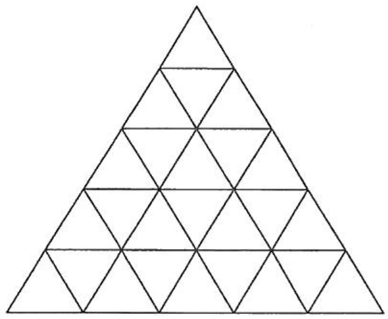
dalās ar 15.

96.17. Uz baltām, melnām, sarkanām un zaļām kartiņām uzrakstīts pa skaitlim; katra veida kartiņu skaits nav zināms. "Balto" skaitļu vidējais aritmētiskais lielāks par "sarkano" skaitļu vidējo aritmētisko, un "melno" skaitļu vidējais aritmētiskais lielāks par "zaļo" skaitļu vidējo aritmētisko.

Vai var gadīties, ka kopā ņemtu balto un melno skaitļu vidējais aritmētiskais mazāks par kopā ņemtu sarkano un zaļo vidējo aritmētisko?

96.18. Ar $\overline{xyz}$ apzīmēsim trīsciparu skaitli ar cipariem x, y, z. Pierādīt, ka, ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca}+\overline{cab}$ dalās ar 37.

96.19. Vienādmalu trijstūris sagriezts 25 mazos trijstūrīšos (skat. 2. zīm.).



2.. zīm..

96.20. Kāds ir lielākais iespējamais paralēlo malu skaits 1995-stūrī?

9. klase.

96.21. Skaitļi a, b un c nav 0. Pierādīt, ka

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

96.22. Dotas divas baltas, divas sarkanas un divas zaļas lodītes. Divu krāsu lodītes visas sver pa 100 gramiem katra, bet vienas krāsas lodītes sver 99 g un 101 g. Lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vieglāko lodīti.

96.23 Atrast visus naturālos divciparu skaitļus, kam piemīt īpašība: saskaitot skaitli ar otru skaitli, kuru iegūst, mainot ciparus vietām, rezultāts ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

96.24. Trijstūrī ABC leņķa A bisektrise krusto malu BC punktā D. Uz malas AB ņemts tāds punkts M, ka $\angle BDM = \angle BAC$. Pierādīt, ka $DM = DC$.

96.25. Pierādīt, ka pozitīviem a un b pastāv nevienādība

$$\left(\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\left(\frac{2b}{a}+1\right)\geq 9.$$

10. klase

96.26. Apklūkojam kvadrātfunkciju $f(x)=ax^2+bx+c$. Zināms, ka $f(-1)>-1$, $f(0)<0$ un $f(1)>2$. Vai skaitlis a ir pozitīvs vai negatīvs?

96.27. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y, z, ka

$$7^a = 7^x + 7^y + 7^z.$$

96.28. Ar $\overline{xyz}$ saprotam trīsciparu skaitli ar cipariem x, y, z. Pierādīt, ka ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca}+\overline{cab}$ dalās ar 37.

96.29. Plaknē uzzīmēts kvadrāts ar izmēriem 3×3. Tas jāpārklāj ar kvadrātiskiem šabloniem, kuru izmēri ir 2×2. Ar kādu mazāko šablonu daudzumu to var izdarīt? Šabloni var savstarpēji pārklāties un iziet ārpus kvadrāta 3×3.

96.30. Kādā klasē darbojas 5 pulciņi. Katru pulciņu apmeklē vairāk nekā puse skolēnu. Pierādīt, ka var atrast tādus divus skolēnus A un B, ka katru pulciņu apmeklē vismaz viens no viņiem.

11. klase.

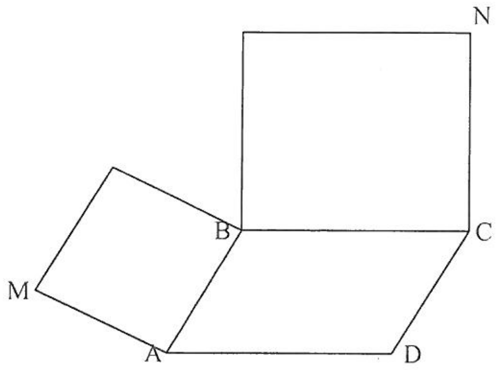
96.31. Dots, ka $x+y=a$ un $x^2+y^2=b$. Aprēķināt x^3+y^3.

96.32. Vai eksistē 3 viens otram sekojoši skaitļi, kuru reizinājums ir 19941995199620?

96.33. Atrisināt vienādojumu

$$\sqrt{\sin x-\sqrt{\sin x+\cos x}}=\cos x.$$

96.34. Uz paralelograma $ABCD$ malām konstruēti kvadrāti ārpus tā (skat. 3. zīm.). Pierādīt, ka nogriežņi DM un DN ir vienādi un perpendikulāri.



3.zīm.

96.35. Kādā valstī ir n pilsētas. Dažas pilsētas dažām citām savieno tieši viens ceļš, uz kura ieviesta vienvirziena satiksme. Ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti). Zināms, ka, izvēloties jebkuras divas pilsētas, vismaz no vienas no tām var aizbraukt uz otru.

Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, no kuras var aizbraukt uz visām citām

12. klase

96.36. Kāda trijstūra malu garumi ir a, b, c, bet pret tam novilkto augstumu garumi atbilstoši α, β, γ. Pierādīt, ka

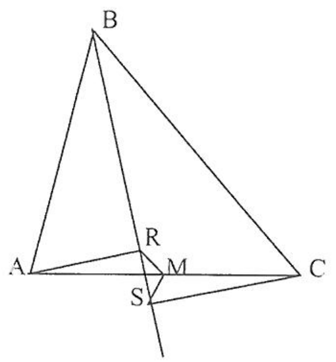
$$(a-\beta)\cdot(b-\gamma)\cdot(c-\alpha)=(a-\gamma)\cdot(b-\alpha)\cdot(c-\beta).$$

96.37. Vai $19^{95}+95^{19}$ dalās ar 3 ?

96.38. Dots, ka $|\sin\alpha|+|\sin\beta|+|\sin\gamma|$ ir pāra skaitlis.

Pierādīt, ka $|\cos\alpha|+|\cos\beta|+|\cos\gamma|\geq 1$.

96.39. Šaurleņķa trijstūrī ABC ar M apzīmējam malas AC viduspunktu, ar R un S -- virsotņu A un C projekcijas uz leņķa B bisektrises (skat. 4. zīm.).



4. zīm.

Pierādīt, ka $RM = SM$.

96.40. Dotas 2^n kartiņas, n – naturāls skaitlis. Tās sakārtotas kaudzītē. Ar vienu gājienu kaudzīti var pārdalīt patvaļīgā vietā un pēc tam abas iegūtās daļas "sajaukt" savā starpā tā, ka iepriekšējās "augšējās" daļas kartīšu savstarpējais novietojums paliek nemainīgs un iepriekšējās "apakšējās" daļas kartīšu savstarpējais novietojums – tāpat.

Pierādīt, ka ar n gājieniem pietiek, lai iegūtu jebkuru mums vēlamu kartīšu sakārtojumu.