39. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1988./ 89. m.g.

UZDEVUMI

6. klase

89.1. Plaknē novietotas 16 taisnes. Kāds ir lielākais nogriežņu daudzums, kāds var rasties, tām krustojoties?

89.2. Funkcijas definīcijas apgabals ir kopa $\{0; 1; 2\}$, bet vērtību apgabals ir kopa $\{0; 1;\}$.

Cik tādu funkciju ir?

89.3. Neviens no skaitļiem *a, b, c, d, e* nav nulle.

Pieradīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem

$$ax + b = 0$$
$$bx + c = 0$$
$$cx + d = 0$$
$$dx + e = 0$$
$$ex + a = 0$$

atrisinājums ir negatīvs.

89.4. Naturāli skaitļi *a* un *b* ir tādi, ka $34a = 43b$.

Vai $a + b$ var būt pirmskaitlis?

89.5. Kādā klasē katrs zēns draudzējas tieši ar 3 meitenēm, bet katra meitene – tieši ar 6 zēniem.

Pierādīt, ka zēnu ir divas reizes vairāk nekā meiteņu.

7. klase.

89.6. Aprēķināt izteiksmes

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

vērtību, ja $x = 37^2$, $a = 19^2$, $b = 17^2$, $c = 13^2$.

89.7. Kāds lielākais daudzums veselu skaitļu var būt starp skaitļiem

$$\sqrt{n};\ \sqrt{n+1};\ \sqrt{n+2};\ldots;\ \sqrt{n+100}\ \ ?$$

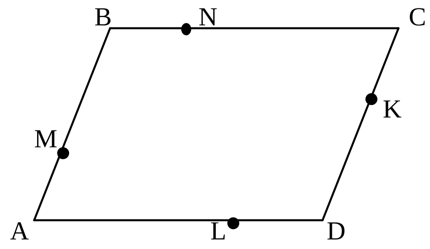
Atrast mazāko tādu naturālu skaitli *n*, ka neviens no skaitļiem

$$\sqrt{n};\ \sqrt{n+1};\ \sqrt{n+2};\ldots;\sqrt{n+1000\,000}$$

nav vesels.

89.8. Uz paralelograma *ABCD* malām ņemti punkti M, N, K, L tā, ka

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CK}{KD}=\frac{DL}{LA}=\frac{1}{2}$$ (skat. 1. zīm.).



1. zīm.

Pierādīt, ka *MNKL* ir paralelograms.

89.9. Vai var būt pionieru pulciņš ar 10 biedriem, kuriem draugu skaits šajā pulciņā ir attiecīgi 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1 ?

89.10. Dots, ka *a*, *b*, *c* – naturāli skaitļi un

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1.$$

Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{41}{42}$.

8. klase.

89.11. Uzrakstīt tās parabolas vienādojumu, kuru iegūst no parabolas $y=x^2$, pārbīdot to par 2 vienībām pa labi un par 2 vienībām uz augšu.

89.12. Dots, ka $0\le x\le 1$ un $0\le y\le 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\le 1.$$

89.13. Dots, ka $abc=1$ un $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem *a*, *b*, *c* ir 1.

89.14. Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūri ievilktās riņķa līnijas rādiusu var aprēķināt pēc formulas

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

kur *a*, *b* ir katetes, bet *c* – hipotenūza.

89.15. Uzrādīt kaut vienu 100-ciparu skaitli, kas nesatur nevienu ciparu 0 un dalās ar savu ciparu summu.

9. klase

89.16. Konstruēt kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķēlumu ar plakni, kas iet caur šķautņu AA_1, BB_1 un CD viduspunktiem.

89.17. Dots, ka $\sin x = \sin y$ un $\cos x = \cos y$. Pierādīt, ka $\dfrac{x-y}{\pi}$ ir pāra skaitlis.

89.18. Izliekta četrstūra pēc kārtas ņemtu malu garumi ir *a*, *b*, *c* un *d*, bet laukums – *L*. Pierādīt, ka

$$L \le \frac{ab+bc+cd+da}{4}.$$

89.19. Dots, ka naturāli skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* katrs dalās ar skaitli $ab-cd$ (dots, ka $ab-cd>0$). Pierādīt, ka $ab-cd=1$.

89.20. Pierādīt, ka skaitļa 2^n ciparu summa nevar būt 3, ja *n* naturāls skaitlis.

10. klase

89.21. Atrast funkcijas

$$y = \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$$

atvasinājumu.

89.22. Atrast kosinusu leņķim starp kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ skaldņu diagonālēm CD_1 un DA_1.

89.23. Kādiem naturāliem skaitļiem *n* skaitlis n^3+3 dalās ar n^2-n+1 ?

89.24. Dots, ka $a<b<c<d$. Pierādīt, ka vienādojumam

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}=0$$

ir vismaz trīs dažādas saknes.

89.25. Katrā bezgalīgas rūtiņu lapas rūtiņa ierakstīts pa naturālam skaitlim, pie tam katrs skaitlis vienāds ar 8 tam apkārt ierakstīto skaitļu vidējo aritmētisko.
Pierādīt, ka visi ierakstītie skaitļi ir vienādi.

11. klase

89.26. Atrast laukumu, ko ierobežo parabolas $y=(x-2)^2$ un $y=-4+6x-x^2$.

89.27. Vai eksistē daudzskaldnis ar 6, 1988, 1989 skaldnēm, kuram visas skaldnes ir trijstūri?

89.28. Telpa sadalīta kubiskā režģī. Katrā kubā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrā kubā α ierakstītais skaitlis vienāds ar 6 kubos ierakstīto skaitļu vidējo aritmētisko, kam ar α ir kopīga skaldne.
Pierādīt, ka visi ierakstītie skaitļi ir vienādi.
Vai šis apgalvojums paliek spēkā, ja ieraksta veselus skaitļus?

89.29. Dots, ka skaitli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veido aritmētisku progresiju un arī skaitļi $\sin a_1, \sin a_2, \ldots, \sin a_n$ veido aritmētisku progresiju. Vēl dots, ka $\sin a_1 = \frac{1}{2}$ un $\sin a_n = -\frac{1}{2}$.
Aprēķināt $\sin a_2$.

89.30. Uz vienas no šaha galdiņa rūtiņām stāv zirdziņš. Zirdziņam pārejot no vienas rūtiņas uz otru, mainās tās rūtiņas krāsa, no kuras tas aiziet.
Vai zirdziņš var staigāt tā, lai rezultātā visas rūtiņas kļūtu baltas?