38. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1987./88. m.g.

UZDEVUMI

4. klase

88.1. Aizstājiet zvaigznītes ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu saskaitīšanas piemēru (zināms, ka pirmais saskaitāmais lielākas par otro):

$$\begin{array}{r} *{*}{*}6{*} \\ +\,{*}{*}3{*}1 \\ \hline {*}98236 \end{array}.$$

Atrodiet visas iespējas un parādiet, kāpēc citu bez Jūsu atrastajām nav.

88.2. Rindā uzrakstīti visi veselie skaitli no 1 līdz 1987 ieskaitot, katrs vienu reizi. Cik ciparu uzrakstīts?

88.3. Vai var plaknē uzzīmēt 8 punktus tā, ka nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes, un dažus no tiem savienot ar taisnes nogriežņiem tā, lai katrs punkts būtu savienots ar tieši četriem citiem? Nogriežņi nedrīkst krustoties.

88.4. Parādīt, ka 4 stari var sadalīt plakni 2; 3; 4; 5; 6; 7 daļās.

88.5. Robots "Robis" prot paņemt no plaukta jebkuras 3 blakus stāvošas grāmatas un tādā pašā kārtībā nolikt plauktā citā vietā

1) Plauktā stāv piecas grāmatas šādā secībā: *ABCDE*. Kā ar robota palīdzību var iegūt secību *BACDE* ?

2) Plaukta stāv septiņas grāmatas. Kā ar robota palīdzību pārlikt tās pretējā secībā?

5. klase

88.6. Cik dažādos veidos var izvēlēties veselus skaitļus a un b tā, ka

$$|a|+|b|<6\ ?$$

88.7. Visa bezgalīgā plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa un izkrāsota melnā un baltā krāsā šaha galdiņa kārtībā.

1) Kur atrodas tādi punkti *O*, ka katram melnajam punktam simetriskais attiecībā pret *O* ir malas un katram baltajam punktam simetriskais attiecībā pret *O* ir balts?

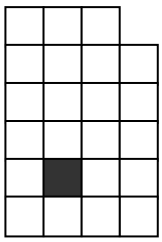
2) Kur atrodas tādi punkti *S*, ka katram melnajam punktam simetriskais attiecībā pret *S* ir balts un katram baltajam punktam simetriskais attiecībā pret *S* ir melns?

Piezīme. Rūtiņu malu punktus un virsotnes varam vienlaicīgi uzskatīt gan par melniem, gan par baltiem punktiem.

88.8. Sienāzis lēkā pa taisni, sākot no punkta *O*. Viņš izdara vienu lēcienu garumā 1 cm, vienu lēcienu garumā 2 cm, vienu lēcienu garumā 3 cm, ... , vienu lēcienu garumā 1987 cm.

Vai sienāzis var lēkāt tā, lai beigās atkal atrastos punktā *O*?

88.9. 1. zīmējumā attēloto figūru sagriezt divās vienādās daļās (iekrāsota rūtiņa ir caurums).



1. zīm.

88.10. Jānis iedomājies 5 veselus skaitļus. Pierādiet, ka Andris no šiem skaitļiem varēs atrast 3 tādus, kuru summa dalās ar 3.

6. klase

88.11. Vai vienādība

$$a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)=$$
$$a(d-c)+b(a-d)+c(b-a)+d(c-b)$$

ir identitātes?

Kā ērti ģeometriski aprakstīt labās un kreisās puses veidošanos?

88.12. Dots, ka $\Delta ABC = \Delta BCA$. Pierādīt, ka $\Delta BCA = \Delta CAB$.

Piezīme. Dotajā laika periodā trijstūri *ABC* un *BCA* tika uzskatīti par dažādiem.

88.13. Apskata vienādojumus $ax+b=cx+d$, kur *a*, *b*, *c*, *d* katrs ir ar vērtību 1, 2 vai 3.

1) uzradīt vienu no šiem vienādojumiem, kuram ir sakne (atrisinājums) 0;

2) uzradīt vienu no šiem vienādojumiem, kuram sakņu (atrisinājumu) nav;

3) cik starp šiem vienādojumiem ir tādu, kuriem nav atrisinājumu?

88.14. Iedomāsimies, ka atvērtas iekavas un savilkti līdzīgie saskaitāmie izteiksmē

$$(511x+397y+481z)(119x+317y+813z)(7x+6y+z).$$

Cik saskaitāmo paliks?

Cik no tiem skaitliskais reizinātājs būs pāra skaitlis?

88.15. Ar kādu vismazāko dažādu pirmskaitļu daudzumu var dalīties skaitlis

$$3x(x+2y+1)(7y+1),$$

ja *x* un *y* – veseli pozitīvi skaitļi?

7. klase

88.16. Atrast tādus veselus pozitīvus *A* un *B*, lai vienādība

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{7x+10}{(x+1)(x+2)}$$

būtu identitāte.

88.17. Izliektā četrstūrī $ABCD$ dots, ka $AB=BC$ un $AD=DC$. Pierādīt, ka $AC\perp BD$.

88.18. Apskatām izteiksmi

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

(15 daļsvītras).

Uzrakstīt to kā racionālu skaitli ar vienu daļsvītru.

88.19. Ja katrs klases zēns nopirktu pīrādziņu, bet katra meitene – bulciņu, tad visa klase kopā izdotu par 1 kap. vairāk nekā tad, ja katrs zēns nopirktu bulciņu, bet katra meitene – pīrādziņu. Zināms, ka zēnu ir vairāk nekā meiteņu. par cik zēnu ir vairāk?

88.20. Dotas 1000 kartiņas. Daļa no tām nokrāsotas zilas, pārējās – sarkanas. Uz katras kartiņas uzrakstīts vesels pozitīvas skaitlis, kas mazāks par 1000. Zināms, ka nekādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz zilajām kartiņām, nav savā starpā vienādi, un nekādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz sarkanajām kartiņām, arī nav savā starpā vienādi. Pierādīt, ka var atrast vienu zilu un vienu sarkanu kartiņu tā, ka uz tām uzrakstīto skaitļu summa ir 1000.