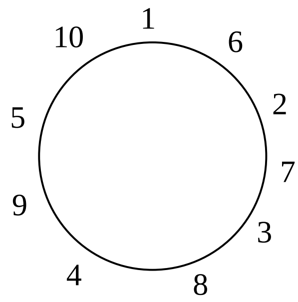
Īsi atrisinājumi

5.1. „–” zīmes var likt pirms 4 un 9; 5 un 8; 6 un 7. Starp citu, tās ir vienīgās iespējas (tas bērniem nav jāpamato).

5.2. a) var. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.

b) nē, nevar. Skaitlim „5” iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis „10”.

5.3. a) Nē, nevar; neviena meitene nav garāka par visgarāko zēnu.
b) jā, var; skat. sekojošo tabulu, kur doti augumi centimetros.

Zēni	Meitenes
170	169
168	167
166	165
164	163
162	161

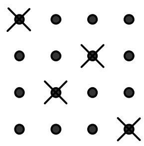
„Alfa”

Zēni	Meitenes
170	161
168	169
166	167
164	165
162	163

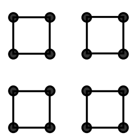
„Gamma”

5.4. Nē. Rūtiņu kopskaits ir 17. Vienīgais veids, kā 17 sadalās naturālos reizinātājos, ir $1\cdot 17 = 17\cdot 1$. Bet divas no dotajām figūrām nevar ietilpināt joslā ar platumu „1”.

5.5. To, ka ar 4 punktiem pietiek, skat. 5. zīm.



5.zīm.

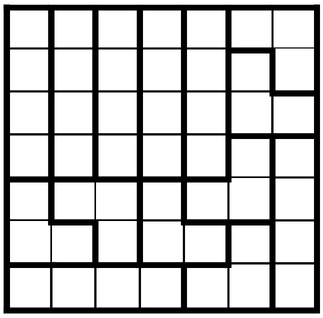


6.zīm.

Skaidrs, ka vismaz 4 punkti jānodzēš, lai „likvidētu” kaut vai tikai 6. zīm. redzamos kvadrātus.

6.1. Acīmredzami, 62.

6.2. **a)** nē. 12 figūriņām ir pats lielākais $12\cdot 4 = 48 < 7\cdot 7$ rūtiņas;
b) jā. Skat., piem., 7. zīm.



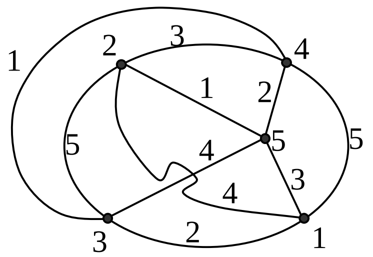
7. zīm.

6.3. **a)** nē. Ja x vai y ir pāra skaitlis, tad xy(x-y) ir pāra skaitlis; ja gan x, gan y ir nepāra, tad x-y ir pāra, un xy(x-y) atkal ir pāra.

b) piemēram, x = 10; y = 6.

6.4. Var ņemt, piemēram, n = 1111111.

6.5. Piemēru ar n = 5 skat. 8. zīm.



8. zīm.

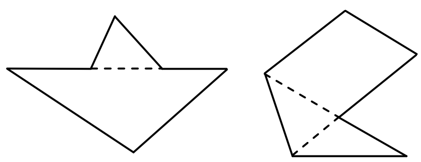
Tā kā lampai un 4 vītnēm, kas tai piestiprinātas, visām jābūt dažādās krāsās, tad ar mazāk nekā 5 krāsām nepietiek.

7.1. Jebkuru: $n = \left(n^3\right)^3 : \left(n^2\right)^4$.

7.2. Jā. Pieņemsim, ka x = 4; y = 5; z = 6; t = 10. Ja Maija ēd y vai z, Andris paspēj sākt ēst t, un 4 + 10 > 5 + 6. Ja Maija ēd t, Andris pēc x ēd y un vēl paspēj sākt ēst z, iekāms Maija pabeigusi ēst t.

7.3. Ja cīkstoņu ir c un vingrotāju – v, tad cīkstoņu kopsvars ir 84c un vingrotāju kopsvars – 54v. Tāpēc $\frac{84c + 54v}{c + v} = 71$, no kurienes iegūstam 13c = 17v. Tātad 13c dalās ar 17. Tā kā LKD(13; 17) = 1, tad c dalās ar 17.

7.4. Jā. Skat. 9. zīm.



9. zīm.

7.5. Atbilde: n = 13.

Parādīsim, ka šī vērtība der. Izkrāsojam rūtiņas šaha galdiņa kārtībā tā, ka stūra rūtiņas ir melnas. Melnajās rūtiņās ierakstām „1”, 8 baltajās rūtiņās „2”, citās baltajās rūtiņās „0”. Tiešām, $85 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 85 + 16 = 101$.

Ja n – pāra skaitlis, tad gan balto, gan melno rūtiņu ir pāra skaits. Melnajās rūtiņās ir vienas paritātes skaitļi, baltajās – otras. Tātad kopā jābūt ierakstītam pāra skaitam nepāra skaitļu; tāpēc ierakstīto skaitļu summa nevar būt nepāra skaitlis 101.

Ja n – nepāra skaitlis, $n \geq 15$, tad katras krāsas rūtiņu ir vismaz $(225 - 1) : 2 = 112$. Vienas krāsas rūtiņās visi skaitļi ir nepāra, tātad vismaz 1; tāpēc to summa ir vismaz 112>101 – pretruna.

8.1. Ja mazākā laimīgā skaitļa pēdējais cipars nav 9, tad abu skaitļu ciparu summas ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi; tāpēc viena no tām ir nepāra – pretruna.

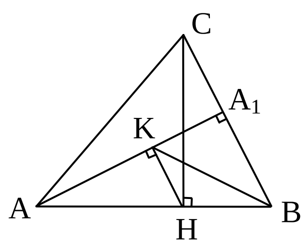
8.2. Katrā griežot iegūtajā kvadrātā vienas krāsas rūtiņu ir par 1 vairāk nekā otras krāsas rūtiņu, un vairākums rūtiņu ir tajā krāsā, kurā ir centrālā rūtiņa. „Vairākumu nodrošinošo” balto rūtiņu jābūt tikpat, cik „vairākumu nodrošinošo” melno rūtiņu, jo lielajā kvadrātā melno un balto rūtiņu ir vienāds daudzums.

8.3. No nevienādības $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$, atverot iekavas, seko $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$.

8.4. **Atbilde**: zaļu.

Risinājums. Cepuru virkne ir periodiska ar periodu ZBVSD. Ja Katrīna nekļūdītos, tad 2008. dienā viņa nēsātu violetu cepuri, jo $2008 = 401 \cdot 5 + 3$. Tātad kļūdas dēļ notika pārbīde par 2 cepurēm uz priekšu. Varam uzskatīt, ka dienā pirms kļūdainās izvēles Katrīna pareizajā secībā valkāja **trīs** cepures, no kurām pirmā ir tā, kuru viņa valkāja patiesībā. Skaidri redzams, ka tā ir zaļa.

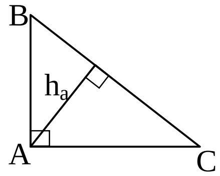
8.5. Ievērosim, ka $\angle KAH = 90° - \angle B = \angle HCB$. Tāpēc $\Delta KAH = \Delta HCB$ (hl). Tāpēc HK = BH. Tātad ΔKHB – vienādsānu un $\angle HBK = \angle HKB$. Bet $\angle HKB = \angle KBC$, jo HK||BC. Tātad $\angle HBK = \angle KBC$, k.b.j.



10. zīm.

9.1. Ievērojam, ka $3^{32} - 2^{32} = (3^{16} + 2^{16})(3^8 + 2^8)(3^4 + 2^4)(3^2 + 2^2)(3 + 2)(3 - 2)$ (vairākas reizes lietojam formulu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$). Tā kā 3+2=5; $3^2+2^2=13$; $3^4+2^4=97$; $3^8+2^8=6561+256=6817=17 \cdot 401$, uzdevums atrisināts. (Skaitlis 401 ir pirmskaitlis, jo nedalās ne ar vienu skaitli no 2 līdz $\lfloor \sqrt{401} \rfloor = 20$ ieskaitot.)

9.2. Saskaņā ar teorēmu par slīpnes un perpendikula garumu CA≥h_c≥5. Tāpēc $L(ABC)=\frac{1}{2}AC\cdot h_b\geq\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4=10$. Vērtība L(ABC)=10 tiek sasniegta, piemēram, taisnleņķa trijstūrī ABC, kur AB=4; AC=5; ∠A=90°. Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus: h_b=AB=4, h_c=AC=5, $h_a=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{4\cdot 5}{\sqrt{41}}=\sqrt{\frac{400}{41}}=\sqrt{9\frac{31}{41}}>\sqrt{9}=3$ (skat. 4.zīm.)



4. zīm.

9.3. a)Ja visi iespējamie policistu trijnieki ir nodežurējuši pa vienai reizei, tad katrs pāris ir dežurējis kopā ar pieciem citiem policistiem; tātad var būt n=5.

b)attēlosim policistus ar regulāra 7-stūra virsotnēm. Ja pa reizei dežurēs visi tie policistu trijnieki, kuru atbilstošās virsotnes veido vienādsānu trijstūri, iegūsim situāciju ar n=3.

9.4. Vienādojumam $x^2+ax+b=x^2+cx+d$ ir sakne $x_0=\frac{d-b}{a-c}$ (tā eksistē, jo $a\neq c$). Apzīmējot doto kvadrāttrinomu saknes attiecīgi ar x_1, x_2; x_3, x_4, iegūstam, ka $x_1+x_2+x_3+x_4=-(a+c)$. Tāpēc $\frac{d-b}{a-c}=-\frac{a+c}{2}$ no kurienes $2d-2b=c^2-a^2$. No Vjeta teorēmas iegūstam $2x_3x_4-2x_1x_2=(x_3+x_4)^2-(x_1+x_2)^2$, no kurienes tieši seko vajadzīgais.

9.5. Iedomāsimies, ka no katras pilsētas pa **katru** ceļu nobrauc automašīna (kopā ir 500 automašīnu). Kopējais nobrauktais attālums ir 2·30000 km=60000 km. Automašīnas, kas brauca pa uzdevumā minētajiem īsākajiem ceļiem, kopā nobrauca 10000 km; tāpēc 400 pārējās automašīnas kopā nobrauca 50000 km; tāpēc vismaz viena no tām nobrauca $\geq\frac{50000}{400}=125$ (km).

10.1. Šādam skaitlim jādalās gan ar 15 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+8)+...+(n+14)+(n+15)=15(n+8)$, gan ar 17, gan ar 8 (jo $(n+1)+...+(n+16)=8((n+1)+(n+16))$. Tā kā 15, 17 un 8 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tam jādalās ar 15·17·8=2040. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 2040, ir 2040. Viegli pārbaudīt, ka visi 15 (16; 17) saskaitāmie iznāk **naturāli** skaitļi (šī pārbaude nepieciešama).

10.2. Ievērosim, ka $f(x)=(x+4)^2-4$. Tāpēc $f(f(x))=((x+4)^2-4+4)^2-4=(x+4)^4-4$, $f(f(f(x)))=((x+4)^4-4+4)^2-4=(x+4)^8-4$ un līdzīgi $f(f(f(f(x))))=(x+4)^{16}-4$.

Risinot vienādojumu $(x+4)^{16}-4=0$, iegūstam

$(x+4)^{16}=4$

$x+4=\pm\sqrt[8]{2}$

$x=-4\pm\sqrt[8]{2}$

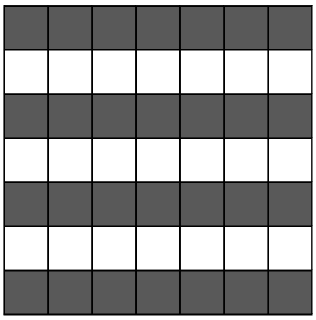
10.3. Saskaņā ar uzdevumā doto ap AMKC var apvilkt riņķa līniju, jo ∠M+∠C=90°+90°=180°. Bez tam ∠AMC=∠HMC=60°, jo taisnleņķa trijstūrī CHM hipotenūza divas reizes garāka par kateti. Tāpēc no ievilktu leņķu īpašībām ∠AKC=∠AMC=60°.

10.4. Vispirms reizināsim nevienādības abas puses ar 2. Tālāk nevienādības pareizība seko no identiskiem pārveidojumiem:

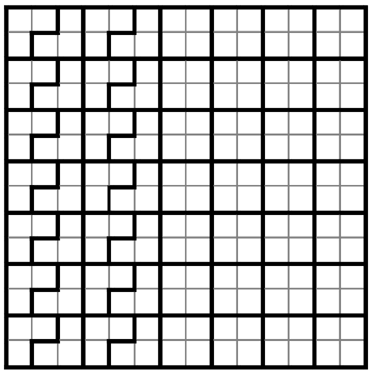
$$2(1+x^2)(1+y^2)-2x(1+y^2)-2y(1+x^2)=$$
$$=(1+x^2)(1+y^2)-2x(1+y^2)+(1+x^2)(1+y^2)-2y(1+x^2)=$$
$$=(1-x)^2(1+y^2)+(1-y)^2(1+x^2)\geq 0.$$

10.5. Ja katra veida figūru ir k, tad kopējais rūtiņu skaits tajās ir $4k+3k=7k$; tātad $n^2=7k$ un n jādalās ar 7. Mazākās iespējamās n vērtības ir $n=7$ un $n=14$.

A. Pie $n=7$ uzdevuma prasības nav izpildāmas. Pieņemsim, ka tas izdevies, un izkrāsosim rūtiņas, kā parādīts 5. zīm. Katrs no 7 kvadrātiem satur 2 melnas rūtiņas, tāpēc 7 „stūrīši” kopā satur 28-14=14 melnas rūtiņas. Tāpēc katrs „stūrītis” satur tieši 2 melnas un 1 baltu rūtiņu (jo katrs stūrītis noteikti satur ne vairāk kā 2 melnas rūtiņas). Bet melnās rūtiņas nevar sadalīties pa pāriem, kas ietilpst kvadrātos un stūrīšos, jo katrā rindiņā, kurā tās vispār ir, tās ir nepāra skaitā.



5. zīm.

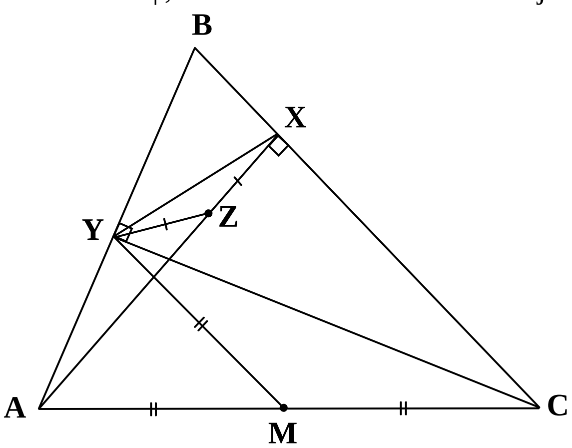


6. zīm.

B. Risinājumu pie $n=14$ skat. 6. zīm.

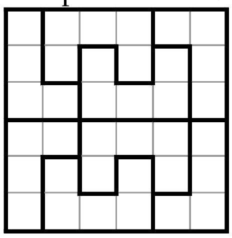
11.1. Tā kā ∠AYC=90°=∠AXC, tad ap AYXC var apvilkt riņķa līniju; tāpēc ∠ACY=∠AXY kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku.

Apzīmēsim ∠ACY=∠AXY=φ. Izmantojot trijstūra leņķu summu, viegli iegūt, ka ∠AMY=2φ un ∠AZY=2φ, tātad ∠AMY=∠AZY. No šejienes seko vajadzīgais.



7.zīm

11.2. Apzīmēsim katra veida figūru skaitu ar k; tad tās kopā satur $4k+5k=9k$ rūtiņas. Iegūstam vienādību $9k=n^2$, tātad n dalās ar 3. Mazākās iespējamās n vērtības ir $n=3$ un $n=6$. Vērtība $n=3$ acīmredzami neder. Atrisinājumu pie $n=6$ skat. 8. zīm.



8. zīm.

11.3. No uzdevumā dotā seko, ka gan $2f(x)+g(x)$, gan $f(x)-g(x)$ ir vai nu nenegatīva, vai nepozitīva funkcija. Ja tās abas būtu viena tipa, tad arī to summa $3f(x)$ būtu vai nenegatīva, vai nepozitīva; bet tas ir pretrunā ar to, ka $f(x)$ ir divas dažādas saknes. Tāpēc viens no polinomiem $2f(x)+g(x)$ un $f(x)-g(x)$ ir nenegatīvs, bet otrs – nepozitīvs, turklāt to (vienīgās) saknes atšķiras viena no otras. Bet tad polinoms $\left(2f(x)+g(x)\right)-2\left(f(x)-g(x)\right)=3g(x)$ pieņem vai nu tikai pozitīvas, vai tikai negatīvas vērtības, no kā seko uzdevuma apgalvojums.

11.4. Viegli aprēķināt, ka $f(1)=10$, $f(2)=30$, $f(3)=100$. Pierādīsim, ka pie $n>3$ skaitlis $f(n)$ nedalās ar 1000. Tad būs skaidrs, ka uzdevuma atbilde ir „ar 2 nullēm”.

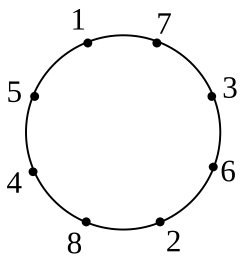
Pie $n>3$ skaitļi 2^n un 4^n dalās ar 8, bet $1^n=1$. Savukārt 3^n, dalot ar 8, pārmaiņus dod atlikumus 3 un 1: pie nepāra n, $n=2k+1$, iegūstam $3^n=3^{2k+1}=3\cdot 9^k=3\cdot(8+1)^k=3\cdot(8Q+1)=24Q+3$, bet pie pāra n, $n=2k$, iegūstam $3^n=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8P+1$ (Q, $P\in\mathbf{Z}$). Tāpēc summa $f(n)$ dod atlikumu 4 vai 2, dalot ar 8; tāpēc nedalās ar 8; tāpēc tā nedalās ar 1000.

11.5. a) jā, var; skat. 9.zīm.

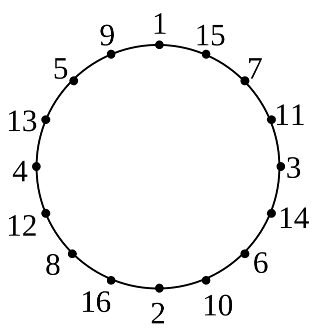
b) nē, nevar. Pieņemam, ka tas izdevies. Apzīmējam skaitļus izrakstīšanas secībā ar a_1; a_2; ...; a_7; varam pieņemt, ka $a_1<a_2$. Tad jābūt $a_2>a_3$, $a_3<a_4$, $a_4>a_5$, $a_5<a_6$, $a_6>a_7$, $a_7<a_1$, $a_1>a_2$ – pretruna. (Izšķirošais bija tas, ka 7 – nepāra skaitlis.)

c) nē, nevar. Apskatām piecas desmitstūra virsotnes, kas veido regulāru piecstūri, un spriežam par tām kā b) gadījumā.

d) jā, var. Skat. 10. zīm.



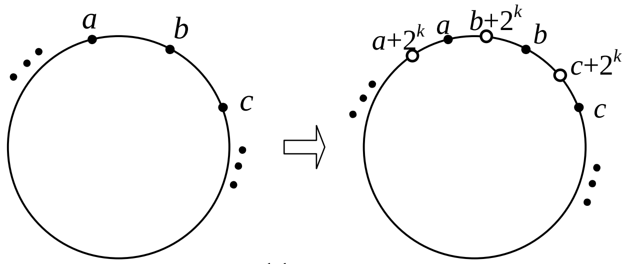
9. zīm.



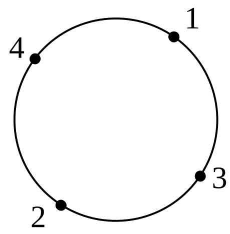
10. zīm.

Komentārs. Uzdevuma prasības ir izpildāmas tad un tikai tad, ja n ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Ja n dalās ar kādu nepāra pirmskaitli p, apskatām regulāru p-stūri ar virsotnēm n-stūra virsotnēs un spriežam kā b) gadījumā. Induktīvā pāreja no $n=2^k$ uz $n=2^{k+1}$

shematiski attēlota 11.zīm.; ar tās palīdzību no 12. zīm. iegūts 9. zīm. un no 9. zīm. – 10. zīm.



11. zīm.



12. zīm.

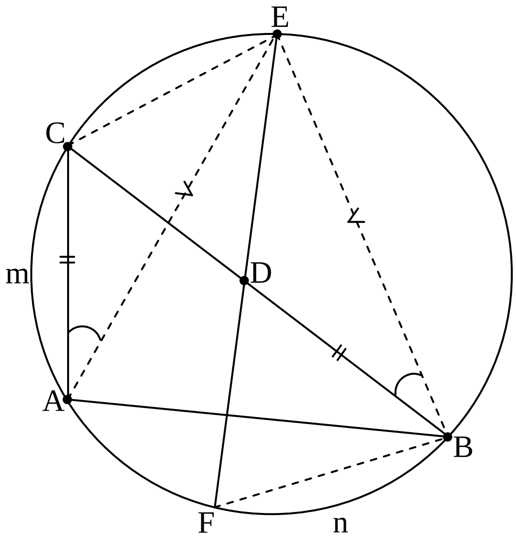
12.1. Padomāsim kā šādu virkni uzrakstīt. Vispirms uzrakstīsim 1; 2; 3; 4; 5; 6; augošā secībā. Skaitļus 7; 8; 9; 10 jāieraksta vai nu intervālos starp šiem skaitļiem, vai pirms vai pēc visiem. No šīm iespējām skaitlim „7" atvēlētas tikai sešas – to nevar rakstīt aiz „6". Pēc tam skaitļu „8" ierakstīšanai ir astoņas vietas, „9" ierakstīšanai – deviņas vietas un „10" ierakstīšanai – 10 vietas. Tāpēc meklējamo virkņu ir $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 4320$.

12.2. Tieša pārbaude parāda, ka neder n=1; 2; 3; 4; 5, tātad $\mathrm{n} \geq 6$. Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1 resp. 2, tad n-1 resp. n+1 nav pirmskaitlis. Tāpēc n dalās ar 3. Ja n-nepāra skaitlis, tad n-1 un n+1 nav pirmskaitļi, tāpēc n dalās ar 2. Tātad n dalās ar 6. Tad n ir dalītāji 1; $\frac{\mathrm{n}}{6}$; $\frac{\mathrm{n}}{2}$; $\frac{\mathrm{n}}{3}$; n. Bet $\frac{\mathrm{n}}{6}+\frac{\mathrm{n}}{2}+\frac{\mathrm{n}}{3}+\mathrm{n}=2\mathrm{n}$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 1 jābūt vienam no skaitļiem $\frac{\mathrm{n}}{6}$; $\frac{\mathrm{n}}{2}$; $\frac{\mathrm{n}}{3}$; n. Mums der tikai $1=\frac{\mathrm{n}}{6}$; tad $\mathrm{n}=6$. Pārbaude parāda, ka šī vērtība der.

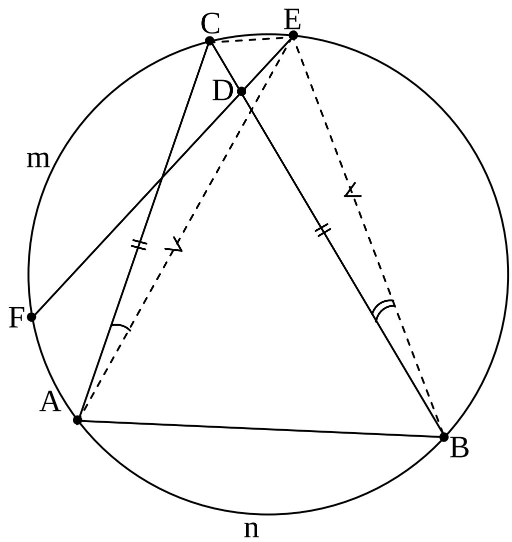
12.3. Tā kā $|\cos t| \leq 1$, tad $\cos\left(x^2\right)+\cos\left(y^2\right)-\cos(xy) \leq 1+1-(-1)=3$. Lai pierādītu stingro nevienādību, jāpierāda, ka nevar vienlaicīgi būt $\cos x^2=1$, $\cos y^2=1$, $\cos(xy)=-1$. Pieņemsim pretējo. Tad $x^2=2\pi n$, $y^2=2\pi k$, $xy=\pi(2l+1)$, $n,k,l \in \mathrm{Z}$. No tā seko, ka $x^2 y^2=4\pi^2 nk$ un $(xy)^2=\pi^2 \cdot (2l+1)^2$. No tā seko, ka $4nk=(2l+1)^2$ Bet pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli – pretruna.

12.4. Pastāv 2 gadījumi: a) *F* pieder lokam *AB*, b) *F* pieder lokam *AC*.

a) no ievilktu leņķu īpašībām $\angle CAE=\angle CBE=\angle DBE$; no *E* izvēles $AE=BE$; no konstrukcijas $AC=BD$. Tāpēc $\Delta CAE=\Delta DBE$ (mlm). Tāpēc $\angle CEA=\angle DEB=\angle FEB$; vienādi ievilkti leņķi balstās uz vienādiem lokiem. Tāpēc loki *AmC* un *FnB* vienādi savā starpā. Pēc teorēmas par paralēlām hordām $AF \parallel CB$, k.b.j.



13.zīm.



14.zīm.

b) iepriekšējā pierādījuma galā aiz teikuma „Tāpēc loki *AmC* un *FnB* vienādi savā starpā.” jāiestarpina „Atņemot no tiem abiem loku *AF*, iegūstam, ka loki *FmC* un *AnB* vienādi savā starpā”.

12.5. Skaidrs, ka uz lapām jāraksta skolēnu kopas visas netukšās apakškopas, jo to ir tieši $2^{10}-1=1023$. Identificēsim skolēnus ar skaitļiem 0; 1; 2; ... ; 9. Ņemsim skolēnu netukšu kopu $A \subset \{0;1;2;...;9\}$. Parādīsim, kā izvēlēties krāsu lapai, uz kuras uzrakstīs *A*.

- Ja n = 1023, lapas krāsa noteikti ir balta.
- Ja n = 0, lapas krāsa noteikti ir zaļa.
- Apskatām gadījumu, kad $n > 0$ un $n < 1023$.

Izsakām $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_k}$, kur $0 \le a_1 < a_2 < ... < a_k \le 9$ - dažādi nenegatīvi veseli skaitļi (t.i., izsakām *n* binārajā sistēmā). Uzskatīsim skaitļus a_1, a_2, ... , a_k par baltiem, bet pārējos skaitļus no $\{0;1;2;...;9\}$ - par zaļiem. **Krāsosim kopas *A* lapu tādā krāsā, kādā ir kopas *A* lielākais elements.**

Tā kā divu kopu apvienojuma lielākais elements ir lielākais no šo kopu lielākajiem elementiem, uzdevuma nosacījums par lapu krāsām izpildās. Noskaidrosim, cik ir balto lapu. Ir tieši 2^{a_i} kopas, kuru lielākais elements ir a_i (katru no skaitļiem 0; 1; ... ; a_i-1 var iekļaut vai neiekļaut). Tāpēc balto lapu ir $2^{a_1} + ... + 2^{a_k} = n$, kas bija vajadzīgs.

Piezīme: iespējams arī risinājums ar matemātisko indukciju.