LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

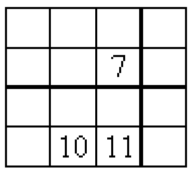
1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 20 ieskaitot var sadalīt 2 grupās pa 10 skaitļiem katrā tā, lai nevienā grupā nebūtu tādu divu skaitļu, no kuriem viens ir 2 reizes lielāks par otru?

2. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas jāsagriež gabalos, no kuriem nekādi divi nav vienādi. Kāds ir lielākais iespējamais gabalu skaits?

3. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 10 ieskaitot var izrakstīt
   a) rindā,
   b) pa apli

   tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu vismaz 5?

4. Vai tukšajās rūtiņās var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 16 un katri divi skaitļi, kuru starpība ir 1, būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?



1.zīm.

5. Turnīrā katrs dalībnieks ar katru citu sacentās tieši vienu reizi. Par uzvaru dalībnieks saņem 1 punktu, par neizšķirtu – 0 punktus, bet par zaudējumu viņam atskaita 1 punktu. Sākotnēji katram dalībniekam piešķir tik punktus, cik turnīrā vispār ir dalībnieku. Turnīru beidzot, Andim bija 5 punkti, bet Pēterim – 10 punkti. Pierādiet, ka vismaz viena sacensība beigusies neizšķirti.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

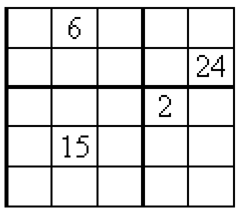
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Rindā stāv vairāki zēni. Pēteris stāv tieši rindas vidū. Jānis stāv aiz viņa – 9. vietā, bet Andris stāv 14. vietā. Cik zēnu stāv rindā?

2. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas jāsagriež gabalos, no kuriem nekādi divi nav vienādi. Kāds ir lielākais iespējamais gabalu skaits?

3. Rindā izrakstīti visi 10 cipari, katrs vienu reizi (pirmais cipars nav 0). Apskatām 10 skaitļus, ko veido pirmais cipars; pirmie 2 cipari; pirmie 3 cipari; . . . ; pirmie 9 cipari; visi 10 cipari. Kāds lielākais un kāds mazākais šo skaitļu daudzums var dalīties ar 3?

4. Vai tukšajās rūtiņās var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 25 un katri divi skaitļi, kuru starpība ir 1, būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?



2.zīm.

5. Tabula sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 1; 2 vai 3. Vai ir iespējams, ka
   a) visās rindiņās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir dažādas,
   b) visās rindiņās, visās kolonnās un vienā diagonālē ierakstīto skaitļu summas ir dažādas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Koordinātu plaknē atzīmēti 4 punkti. Vai var gadīties, ka katriem diviem no tiem vai nu abscisu, vai ordinātu reizinājums ir negatīvs?

2. Sešu nogriežņu garumi visi ir dažādi un katrs izsakās ar veselu skaitu centimetru; visu garumu summa ir 43 cm. Vai noteikti eksistē četrstūris, kura malas vienādas ar četriem no šiem nogriežņiem?

3. Piecu pēc ārējā izskata vienādu monētu masas ir 1 g, 2 g, 3 g, 5 g, 6 g. Uz vienas monētas rakstīts “1 g”, uz vienas – “2 g” utt. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem pārbaudīt, vai visi uzraksti ir pareizi?

4. Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem 1; 2; 3; ...; 12; 13 var izsvītrot, lai katru divu atlikušo summa būtu salikts skaitlis?

5. Valstī ir p politiķi un z žurnāli. Kādu rītu katrs žurnāls rakstīja par nepāra skaitu politiķu, un katrs politiķis bija aprakstīts nepāra skaitā žurnālu. Vai tas ir iespējams, ja

   a) $p = 10, z = 6$,
   b) $p = 10, z = 5$?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka $x + y = z + t$ un $x + z = y + t$. Pierādīt, ka $x^2 + z = t^2 + y$.

2. Vai no četrām izliektu piecstūru formas plāksnītēm var salikt
   a) kaut kādu 15-stūri,
   b) izliektu 15-stūri?
   Plāksnītes drīkst saskarties, bet nedrīkst pārklāties.

3. Kādu mazāko daudzumu no naturāliem skaitļiem 1; 2; 3; ...; 12 var izsvītrot, lai atlikušos varētu sadalīt divās grupās ar īpašību: vienas grupas visu skaitļu reizinājums vienāds ar otras grupas visu skaitļu reizinājumu.

4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; $\frac{1}{2003}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus uzrakstītos skaitļus (apzīmēsim tos ar x un y), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitli
   $$3xy - x - y + \frac{2}{3}.$$
   Šādus gājienus izdarot, uz tāfeles beigās paliek viens skaitlis. Kas tas var būt par skaitli?

5. Uz tāfeles sākotnēji uzrakstīti pozitīvi skaitļi a un b. Jebkurā brīdī var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar x un y) un pievienot uz tāfeles jebkuru no skaitļiem x^2, y^2, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $|x-y|$, $x+y$ (skaitļi x un y netiek nodzēsti; lai iegūtu $|x-y|$, nepieciešams, lai $x \neq y$.). Parādiet, kā uz tāfeles iegūt reizinājumu $a \cdot b$.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Jānis uzrakstīja n pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus. Neviens no tiem nedalās ar trim vai vairāk dažādiem pirmskaitļiem. Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

2. Dots, ka ABCD un AEFG ir paralelogrami; punkti B, D, E, G atrodas uz vienas taisnes. Zināms, ka punkti C un F nesakrīt. Pierādīt, ka CF||BD.

3. Dots, ka *a* un *b* – kaut kādi skaitļi. Pierādīt, ka $a^2 + ab + b^2 \geq 6(a + b - 2)$.

4. Dots kvadrāts, kas sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ar melnu krāsu atzīmēja n rūtiņu centrus. Pierādiet:

a) ja n = 16, tad var gadīties, ka nekāds atzīmētais centrs nav viduspunkts nogrieznim, kura abi gali arī atzīmēti,
b) ja n = 17, tad noteikti atradīsies tāds atzīmēts centrs, kas ir viduspunkts nogrieznim, kura abi gali arī atzīmēti.

5. Uz galda atrodas n konfektes. Andris un Pēteris pēc kārtas izdara gājienus; pirmais iet Andris. Ar vienu gājienu tiek paņemtas dažas konfektes; pie tam jāņem vismaz 1 konfekte, bet nedrīkst ņemt vairāk par pusi uz galda esošo konfekšu. Tas zēns, pēc kura gājiena uz galda paliek 1 konfekte, zaudē.

Kas uzvar, pareizi spēlējot, ja

a) n = 47,
b) n = 2003?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka x un y – naturāli skaitļi. Vai var gadīties, ka
a) (2x+3y)(3x+2y) dalās ar 5, bet nedalās ar 25?
b) (2x+3y)(3x+2y) dalās ar 2003, bet nedalās ar 2003^2?

2. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv vienādība

$$|x-1|+|x+1|+\big||x-1|-|x+1|\big|=2(|x|+1)$$

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi BD un CE ir augstumi, H – augstumu krustpunkts, M – malas BC viduspunkts, S – nogriežņa AH viduspunkts.
a) pierādīt, ka $DE \perp MS$,
b) pierādīt, ka DSEM ir kvadrāts, ja $\angle BAC = 45^o$.

4. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta pa skaitlim tā, lai katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa būtu 1 (daži no skaitļiem var būt arī vienādi).

Vai to var izdarīt, ja
a) n = 7,
b) n = 8 ?

Paskaidrojums: ja caur kādas rūtiņas centru novelk taisni 45^o leņķī pret kvadrāta malām, tad visas tās rūtiņas, caur kuru centriem iet šī taisne, veido diagonāli. Piemēram, 8×8 kvadrātam ir 30 diagonāles (15 vienā virzienā, 15 – otrā; arī viena pati stūra rūtiņa veido diagonāli.)

5. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Tajā uzzīmēts daudzstūris, uz kura kontūra neatrodas neviena rūtiņu virsotne, bet iekšpusē atrodas 101 rūtiņu virsotne. Pierādīt, ka daudzstūra kontūrs krusto rūtiņu līnijas vismaz 42 punktos.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Andris izvēlējās 5 dažādus naturālus skaitļus un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kādu mazāko daudzumu dažādu rezultātu Andris varēja iegūt?

2. Fibonači skaitļu virkni F_1, F_2, F_3, ... definē šādi: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pie n = 1; 2; 3; ... .

Pierādīt, ka visiem naturāliem n un k $F_1^k + F_2^k + ... + F_n^k \le F_{n+2}^k - 1$

3. Dots, ka ABC – šaurleņķu trijstūris, bet BEFC un ACMN – kvadrāti, kas konstruēti ārpus ΔABC. Taisne t_1 iet caur B un ir perpendikulāra AE; taisne t_2 iet caur A un ir perpendikulāra BN; taisne t_3 iet caur C un ir perpendikulāra AB. Pierādīt, ka t_1, t_2 un t_3 krustojas vienā punktā.

4. Ir zināms, ka skaitlis 38 ir mazākais naturālais skaitlis, kura kvadrāts beidzas ar 3 četriniekiem: $38^2 = 1444$.

a) vai šādu naturālu skaitļu ir bezgalīgi daudz?
b) atrodiet otro mazāko naturālo skaitli ar šādu īpašību.

5. Lai iekļūtu pilī, kurā ļaunais burvis tur nolaupīto Sniegbaltīti, jāatbild uz 34 jautājumiem. Katrs no 7 rūķīšiem zina atbildes uz dažiem jautājumiem. Ir dots, ka katri 4 rūķīši kopā zina atbildes uz visiem jautājumiem. Vai noteikti var atrast tādus 3 rūķīšus, kas kopā zina atbildes uz visiem jautājumiem?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 53. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Skaitļu virknē pirmais un otrais loceklis abi ir 1, bet katrs nākošais vienāds ar abu iepriekšējo summu. Vai ar 5 dalās šīs virknes
a) 20-ais,
b) 2003-ais loceklis?

2. Taisnleņķa trijstūrī ABC no taisnā leņķa virsotnes novilkts augstums CH. Trijstūros ACH un BCH ievilkto riņķu rādiusu garumu summa ir $\frac{1}{4}$AB. Aprēķināt ΔABC leņķus.

3. Dots, ka a, b, c, d – reāli skaitļi, kam pastāv sakarības $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $ab + cd > 0$ un $ac + bd > 0$. Pierādīt, ka $ad + bc > 0$.

4. Plakne sadalīta vienādās kvadrātiskās rūtiņās ar malas garumu 1; rūtiņas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Apskatām daudzstūri, kura visas malas iet pa rūtiņu līnijām. Pierādiet:
a) ja visu malu garumi ir pāra skaitļi, tad daudzstūra iekšpusē atrodas tikpat melno rūtiņu, cik balto,
b) ja visu malu garumi ir nepāra skaitļi, tad melno rūtiņu daudzums daudzstūra iekšpusē nav vienāds ar balto rūtiņu daudzumu daudzstūra iekšpusē.

5. Vai eksistē tādas 12 ģeometriskas progresijas, kas sastāv no reāliem skaitļiem, ka katrs naturāls skaitlis no 1 līdz 100 ieskaitot pieder vismaz vienai no šīm progresijām?