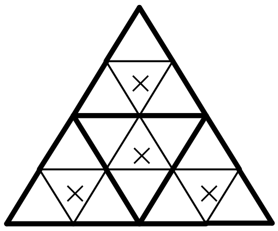
ĪSI ATRISINĀJUMI, ATBILDES, NORĀDES

5.1. Tā kā (1+2+…+10):2>27, tad vismaz viena furgona piekraušanai vajadzīgs ne mazāk par 28 minūtēm. Tā kā 10+9+8+1=28 un 2+3+4+5+6+7=27, tad 28 minūtēs visus būrus var iekraut.

5.2. Atbilde: 4. Kā to izdarīt, redzams 4. zīm. Ar mazāk nepietiek, jo katrā no četriem izdalītajiem "vidējā lieluma" trijstūriem vismaz vienam mazajam jābūt melnam, citādi centrālajam mazajam trijstūrītim uzdevuma prasības neizpildās .



4. zîm.

7	4	9
2	5	6
1	8	3

5. zîm.

5.3. Piemēram, 1210.

5.4. a) jā, skat., piemēram, 5. zīm .

b) nē, jo kaut kur noteikti blakus atrodas pāra un nepāra skaitlis (ja tā nebūtu, tad vai nu visi skaitļi būtu pāra, vai visi nepāra).

5.5. Pieņemam no pretējā, ka kāds zēns runā patiesību. Tad viņam blakus tiešām stāv zēni; tie vismaz vienreiz ir runājuši patiesību, tātad runā patiesību vienmēr; tāpēc viņiem blakus atkal stāv zēni, utt. Iznāk, ka aplī ir tikai zēni - pretruna ar doto.

Tātad visi zēni melo; tātad katram zēnam abās pusēs stāv meitenes. Virzoties "pa apli", pakāpeniski iegūstam, ka visas meitenes runā patiesību un bērni izvietojušies pamīšus": z, m, z, m, … . Tāpēc zēnu un meiteņu ir vienāds skaits.

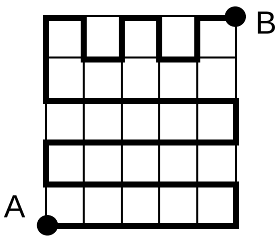
6.1. a) jā; piemēram, A=111 un B=1

b) jā; piemēram, A=11 un B=2.

6.2. abc def=abc·1000+def=13·77·abc-(abc-def)

6.3. Piemēram, 10+11+…+19=145.

6.4. a) skat., piemēram, 6.zīm.



6. zîm.

b) ar katru gājienu jāieiet jaunā rūtiņas virsotnē. Tā kā pavisam jāieiet ≤35 virsotnēs, tad izdara ne vairāk kā 35 gājienus, katru ar garumu 1.

c) Izkrāsojot rūtiņu virsotnes šaha galdiņa kārtībā, redzam, ka pēc 35 gājieniem mēs atradīsimies citas krāsas virsotnē nekā A; bet A un B ir vienas krāsas virsotnes.

6.5. Neatkarīgi no tā, vai bērns runā patiesību vai melo, viņam blakus stāv viens zēns un viena meitene (pārbauda abus gadījumus). No šejienes iegūstam, ka bērnu izvietojums ir …zzmmzzmm…

Apvienojot blakusstāvošos zēnus un meitenes, iegūstam vajadzīgo:

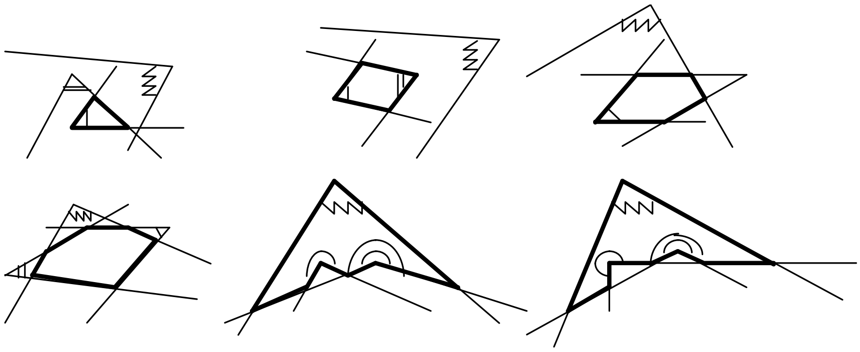
…z)(zm)(mz)(zm)(m…

7.1. Visi rūķīši saņēma vienādus daudzumus saldējuma. Visvienkāršāk to iegūst, iztēlojoties, ka sākumā saldējums sadalīts 20 vienādās porcijās.

7.2. Jā: $2-\frac{73}{37}=\frac{1}{37}<\frac{1}{35}$.

7.3. a) skat. 7. zīm.

b) šai gadījumā daudzstūris ir izliekts, tāpēc uz katra leņķa malas atrodas augstākais viena daudzstūra mala, un tā malu skaits nepārsniedz 6; iepriekš redzējām, ka tas var būt no 3 līdz 6.



7. zîm.

5	7	9
3	6	2
1	4	8

8. zîm.

7.4. a) nē, jo tad visu ierakstīto skaitļu summai jābūt pāra skaitlim, bet tā ir 45;

b) jā; skat., piemēram, 8. zīm .

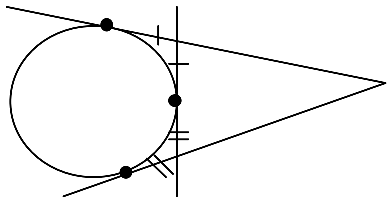
7.5. a) izmantojot acīmredzamu īpašību, ka interesanta skaitļa ciparu summa vienāda ar tā ciparu skaitu (šai gadījumā ar 3), viegli pārbaudīt visas iespējas.

b) piemēram, 6210001000.

8.1. a) piemēram, n=30

b) jebkurš n, kas dalās ar 30 .

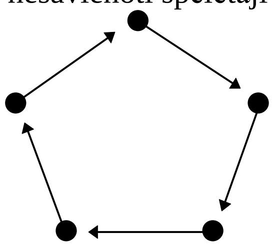
8.2. Katra trijstūra perimetrs ir no A resp. B vilkto pieskaru garumu summa (skat. 9.zīm.); šo pieskaru vienādība (jāpamato!) seko no leņķu A un B vienādības.



9.zîm.

8.3. Jā; skat., piem., 10.zīm., kur 

nozīmē, ka A uzvarējis pret B, bet ar līniju nesavienoti spēlētāji savā starpā spēlējuši neizšķirti.



10. zîm.

5	6	7	8
3	4	9	10
1	2	11	12

11. zîm.

8.4. a) jā; skat., piem., 11.zīm.

b) nē; tādā gadījumā visu skaitļu summai jādalās ar 4, bet tā ir 78.

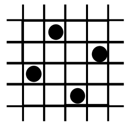
8.5. Varam pieņemt, ka C stāv uz vietas (tad A un B ātrumi attiecīgi palielinās). No uzdevuma nosacījumiem seko, ka A “jaunais” ātrums lielāks par B “jauno” ātrumu, bet **mazāks par divkāršotu B “jauno” ātrumu**.

a) jā; piemēram, ja A “jaunais” ātrums ir 1,99 reizes lielāks par B “jauno” ātrumu

b) nē; starp otro un ceturto C satikšanos ar A mašīna A būtu veikusi divus apļus, bet mašīna B - pat ne vienu pilnu apli, tā ir pretruna ar augstāk izcelto faktu.

9.1. Pēc pārveidojumiem iegūst $(a+b)(x+a)(x+b)=0$ vai arī atbilstošu kvadrātvienādojumu. Saknes ir $x=-a$ un $x=-b$.

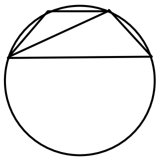
9.2. a) Vai nu uz melnajiem, vai uz baltajiem lauciņiem atrodas vismaz 13 zirdziņi. Tie noteikti neapdraud viens otru;

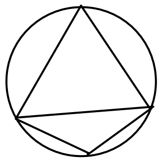


b) pieņemsim, ka zirdziņi izvietoti sešos tādos “kvartetos”, kāds redzams zīmējumā, un viens zirdziņš ir novietots patvaļīgi.

No katra “kvarteta” var izvēlēties augstākais 2 zirdziņus, tātad kopā šajā gadījumā var izvēlēties ne vairāk kā $6\cdot2+1=13$ zirdziņus.

9.3. Neviens vai viens (jāuzzīmē vai jāapraksta piemēri):





Tā kā četrstūra pretējo leņķu summa ir 180^0, tie abi nevar būt šauri, tātad divi šaurleņķu trijstūri būt nevar.

9.4. a) piemēram, $30=9+10+11=6+7+8+9=4+5+6+7+8$;

b) piemēram, 90 un 150;

c) der skaitļi $30+60\cdot n$, $n\in N$:

$60n+30=(20n+9)+(20n+10)+(20n+11)$ utt.

Iespējami apsvērumi skaitļa atrašanai varētu būt šādi: triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa vienāda ar trīskāršotu vidējo skaitli, tātad skaitlis dalās ar 3, tāpat pierāda, ka tas dalās ar 5. Atliek atrast tādu naturālu n, ka $(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=15k$, $k\in N$.

9.5. Pieņemsim no pretējā, ka rūķītis A nav kautrīgs, tad viņam ir vismaz 5 draugi. Ņemam vienu no viņa kautrīgajiem draugiem B. Rūķītim B ir vismaz 4 kautrīgi draugi un vēl draugs A, tātad kopā vismaz 5 draugi - pretruna ar to, ka B ir kautrīgs. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

10.1. Pirmā vienādība pārveidojas par $(x-1)(y-1)(y^2+y+1)=0$, otrā par $(x-1)(y-1)(x^2+x+1)=0$. Atliek ievērot, ka $y^2+y+1\neq0$, tātad $(x-1)(y-1)=0$.

10.2. Šaurleņķu trijstūrim apvilktā riņķa centrs atrodas tā iekšpusē. Skaidrs, ka dotā riņķa centrs var atrasties iekšpusē augstākais vienam no minētajiem trijstūriem.

10.3. Skaidrs, ka no c) seko a) un b). Tomēr dosim atsevišķu risinājumu katram variantam.

Visi risinājumi balstīsies uz faktu: ja divi skaitļi dalās ar d, tad arī to starpība dalās ar d.

a) no trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vidējais acīmredzami apmierina uzdevuma prasības;

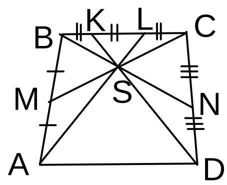
b) katri divi no pieciem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem atšķiras par 1, 2, 3 vai 4; tādas var būt divu skaitļu lielākā kopīgā dalītāja vērtības. Ja starp šiem skaitļiem atradīsim kādu, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, tas derēs par meklējamo.

Ievērosim, ka starp mūsu pieciem skaitļiem var atrast divus nepāra skaitļus, kas atšķiras viens no otra par 2; vismaz viens no tiem nedalās ar 3 un ir meklējamais;

c) spriežot kā iepriekš, starp septiņiem skaitļiem meklēsim tādu, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5. Seši pirmie pēc kārtas ņemtie naturālie skaitļi, dalot ar 6, dod visus iespējamos atlikumus no 0 līdz 5; tie, kas dod atlikumus 1 un 5, nedalās ne ar 2, ne ar 3.

Šie skaitļi ir vai nu 6k+1 un 6k+5 (k - vesels), vai 6k+5 un 6k+7 (k - vesels); abos gadījumos vismaz viens no tiem nedalās ar 5 un der par meklējamo.

10.4. Tā kā MK ir $\triangle ABL$ viduslīnija, tad $MK \| AL$. Tāpēc no Talesa teorēmas MS=SC. Līdzīgi pierāda, ka BS=SN. Tā kā MBCN diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad MBCN ir paralelograms. No tā seko vajaadzīgais.



10.5. Parādīsim, ka Sprīdītis to var izdarīt 2 dienās.

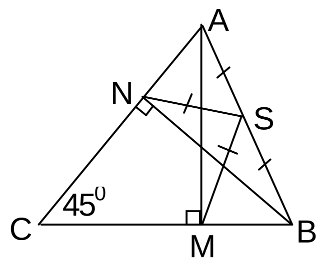
Pirmajā dienā Sprīdītis sasauc visus lutaušus. Ja visi dod vienādas atbildes, tad visi runā patiesību, un otrā diena nav nepieciešama. Pieņemsim, ka tiek iegūtas n dažādas atbildes, $n \geq 2$. Otrajā dienā Sprīdītis sasauc tādus n lutaušus, kas pirmajā dienā devuši dažādas atbildes (tieši viena šīm atbildēm ir pareiza). Tas lutausis, kas otrajā dienā dos atbildi n-1, un tie, kas pirmajā dienā deva tādu pašu atbildi kā viņš, runā taisnību, bet pārējie melo.

(Var pierādīt, ka vienā dienā Sprīdītis uzdevumu ar garantiju veikt nevar.)

11.1. Pierādāmā nevienādība pārveidojas par $(A-B)(D-C)<0$, kas ir acīmredzama.

11.2. Attālumi uz 0x ass ir vienādojuma $x^2+px+q=0$ sakņu moduļi, bet attālums uz 0y ass ir $|q|$; saskaņā ar Vjeta teorēmu divu pirmo attālumu reizinājumam jābūt vienādam ar trešo. Ar dotajām vērtībām tas nav iespējams.

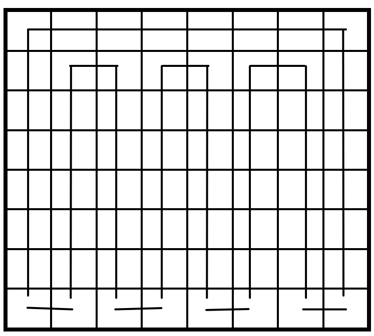
11.3. Gan SN, gan SM ir mediāna taisnleņķa trijstūrī, kura hipotenūza ir AB; tāpēc abi šie nogriežņi vienādi ar 0,5AB. Tālāk, no $\triangle ASN$ seko, ka $\angle NSA=180^0-2\cdot\angle A$; līdzīgi $\angle MSB=180^0-2\cdot\angle B$. Tāpēc $\angle NSM =180^0-(180^0-2\cdot\angle A)-(180^0-2\cdot\angle B)=2(\angle A+\angle B)-180^0=2(180^0-45^0)-180^0=90^0$.

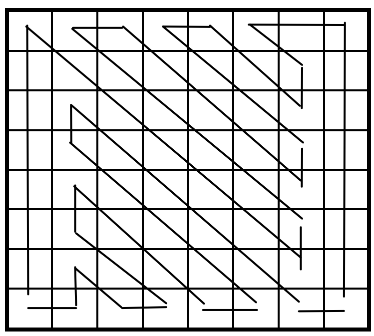


11.4. Skaitlis 56^x beidzas ar ciparu 6, skaitlis 5^y - ar ciparu 5. Tāpēc mazākās hipotētiskās vērtības ir 1 un 11. Viegli pārbaudīt, ka $56^2-5^5=3136-3125=11$. Parādīsim, ka nevar būt $56^x-5^y=1$; tad būs parādīts, ka mazākā vērtība ir 11.

Atverot iekavas vienādībā $56^x=(4+1)^y+1$, redzam, ka labā puse dod atlikumu 2, dalot ar 4; savukārt kreisā puse dalās ar 4. Tāpēc šāda vienādība nevar pastāvēt.

11.5. Sekojošie zīmējumi parāda, ka ir iespējami garumi 64 un $36\sqrt{2}+28$.





Katrs karaļa gājiens ir ar garumu 1 vai $\sqrt{2}$; tātad mazāks garums par 64 nav iespējams. Parādīsim, ka maršrutā jābūt vismaz 28 gājieniem ar garumu 1; tad būs parādīts, ka $36\sqrt{2}+28$ ir lielākais iespējamais garums.

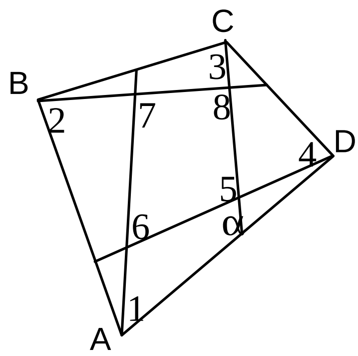
Aplūkosim tos momentus, kuros karalis nonāk pie kvadrāta malām. Aplūkosim divus viens otram sekojošus šādus momentus. Ja karalis šajos momentos nenonāk blakus rūtiņās, tad šaha galdiņš ar viņa veikto maršrutu tiek sadalīts divās atsevišķās daļās.

Lai tās abas apstaigātu, karaļa maršrutam pašam sevi jākrusto, bet tā ir pretruna. Tātad šaha galdiņa malējās rūtiņas tiek apmeklētas pēc kārtas. Bet divas blakusrūtiņas ir dažādās krāsāas. ”Slīpo” gājienu rezultātā karalis savas atrašanās vietas krāsu nemaina. Tātad starp katrām divām secīgām parādīšanās reizēm pie kvadrāta malām karalim jāizdara vismaz viens “taisns” gājiens. Malējo rūtiņu ir 28, tātad arī “taisno” gājienu ir vismaz 28.

12.1. Nē, neeksistē; $tgx \cdot ctgx=1$, bet $siny \cdot cosy=0,5sin2y \leq 0,5$.

12.2. Skaitļiem x un y jābūt ar vienādām paritātēm. Ja $x=2m$, $y=2n$, tad kreisā puse dalās ar 4, bet labā puse nedalās (pretruna); ja $x=2m+1$, $y=2n+1$, tad pēc pārveidojumiem iegūstam $m(m+1)+n(n+1)=2z+1$. Tā kā pie $x \in N$ vai nu x, vai x+1 ir pāra skaitlis, tad kreisajā pusē ir pāra skaitlis, bet labajā - nepāra (pretruna).

Tātad atrisinājuma nav.



12.3. Pieņemsim pretējo. Tad $\angle 1=180^0-\alpha$; tā kā arī $\angle 5=180^0-\alpha$, tad $\angle 1=\angle 5$. Līdzīgi $\angle 2=\angle 6$, $\angle 3=\angle 7$, $\angle 4=\angle 8$. Tāpēc $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4= =\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360^0$. Bet $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4< <\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^0$ - pretruna.

12.4. Ja $n=2k+1$, $k \leq 44$, tad pie $x=k+1$ summas vērtība ir $k+(k-1)+\ldots+2+1+0+1+2+\ldots+k= =2(1+2+\ldots+k)=k(k+1) \leq 44 \cdot 45=1980<1998$.

Ja $n=2k$, $k \leq 44$, tad pie $x=k+0,5$ summas vērtība ir $(k-0,5)+(k-1,5)+\ldots+0,5+0,5+\ldots.+(k-0,5)=1+3+\ldots+(2k-1)=k^2 \leq 44^2=1936<1998$.

Ja $n=90$, tad $S=(|x-1|+|90-x|)+(|x-2|+|89-x|)+\ldots+(|x-45|+|46-x|) \geq \quad \geq |x-1+90-x|+|x-2+89-x|+\ldots+|x-45+46-x|=1+3+\ldots+87+89=45^5=2025>1998$.

Tātad meklējamā vērtība ir 90.

12.5. Ja n=1, tas ir acīmredzami. Pieņemam, ka n>1.

Sauksim iedzīvotāju grupu par labu, ja katrs no pārējiem iedzīvotājiem pazīst vismaz vienu šajā grupā. Katra iedzīvotāja visi paziņas veido labu grupu (jāpierāda!). Pieņemsim no pretējā, ka nav labas grupas ar $\leq n$ iedzīvotājiem, tad katram iedzīvotājam ir $\geq n+1$ paziņa. Aplūkosim kādu iedzīvotāju X un n-1 no viņa paziņām. Saskaņā ar pieņēmumu var atrast tādu Y, kas nepazīst nevienu no šiem n cilvēkiem. Tā kā Y ir vismaz n+1 paziņa, tad ir ne vairāk kā $3n-(n+1)-(n-1)-2=n-2$ cilvēki, kas nepazīst ne X, ne Y. Šie cilvēki kopā ar X un Y veido labu grupu ar $\leq n$ cilvēkiem (jāpierāda!). Iegūta pretruna, tātad eksistē laba grupa ar $\leq n$ cilvēkiem. Pievienojot tai, ja vajadzīgs, dažus patvaļīgus citus cilvēkus, iegūstam labu grupu ar tieši n cilvēkiem.