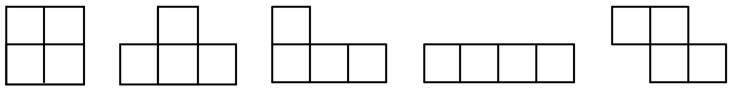
Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 37. OLIMPIĀDE

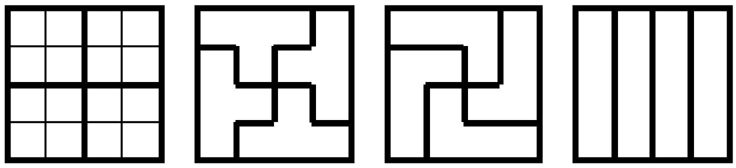
ATRISINĀJUMI

37.1. No četrām rūtiņām var izveidot šādas figūras (skat. 37.3. zīm.).



37.3. zīm.

Kvadrātu var sagriezt pirmo četru veidu figūrās (skat. 37.4. zīm.).



37.4. zīm.

Viegli redzēt, ka piektā veida figūrās kvadrātu sagriezt nevar.

37.2. Pakāpeniski pārveidojot iegūstam

$$683957 \cdot 46025 + 316043 \cdot 46026 =$$
$$683957 \cdot 46025 + 316043 \cdot 46025 + 316043 =$$
$$46025 \cdot (683957 + 316043) + 316043 =$$
$$46025 \cdot 1000000 + 316043 = 46025316043.$$

37.3. a) $\underbrace{\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\cdots\frac{3}{3}+\frac{3}{3}}_{1987\ reizes}=1987$;

b) $333\cdot 3\cdot\left(3-\frac{3}{3}\right)-\frac{33}{3}=1987$;

c) Nē, nevar. Neizmantojot dalīšanas zīmes, mēs varam iegūt tikai skaitļus, kas dalās ar 3, bet 1987 ar 3 nedalās.

37.4. Uzrakstīsim ciparus augošā secībā $a < b < c < d$. Tā kā

$$d - a = (b - a) + (c - b) + (d - c) \le 9 - 1 = 8,$$

tad viena no starpībām iekavās nepārsniedz 2. Apzīmēsim šos skaitļus ar x un y ($x < y$), bet pārējos ar *z* un *t*. Tad

$$\overline{ztyx} - \overline{ztxy} = \overline{yx} - \overline{xy} = (10y + x) - (10x + y) = 9 \cdot (y - x) \le 18.$$

37.5. Ar pirmo gājienu visas pankūkas saliekam uz pirmo pannu..

Ar otro gājienu uz otro pannu pārceļam tik daudz pankūku , lai apakšējā no tām būtu vislielākā.

Ar trešo gājienu visas pankūkas, izņemot lielāko, pārceļam no otrās pannas uz pirmo.

Ar ceturto gājienu uz otro pannu pārceļam tik daudz pankūku , lai apakšējā no tām būtu otrā lielākā.

Turpinot šo procesu ar 4. un 5. gājienu novietosies pareizā secībā trīs pankūkas, utt. Ar $2n-4$ un $2n-3$ gājienu jau pareizi būs novietotas $n-2$ pankūkas.

Protams, ka atlikušās divas pankūkas var pārnest uz otro pannu vai nu vienā gājienā (ja tās saliktas pareizā secībā), vai divos gājienos .

37.6. To var izdarīt, piemēram, kā parādīts 37.5. zīmējumā.

X		X		X
X		X		X
X		X		X

37.5. zīm.

37.7. Var būt jebkurš skaitlis no 100 līdz 109. Šos piemērus dod gadījumi, kad katrā kastē ir 10 kg, 10,1 kg, 10,2 kg, …, 10,9 kg cukura.

Vairāk par 109 paciņām iegūt nevar, jo katrā kastē ir mazāk par 11 kg cukura; tātad kopā ir mazāk par 110 kg cukura.

37.8. Nē, nevar. Neatkarīgi no tā kādi nogriežņi izvēlēti, to garumu summu var aprēķināt šādi. Nogriežņa garums ir starpība starp labā galapunkta koordināti un kreisā punkta koordināti. Summējot šos lielumus, katrs labais galapunkts summā tieši vienu reizi ieies ar zīmi "+", bet katrs kreisais -- ar zīmi "-". Tāpēc visu nogriežņu summa būs vienmēr vienāda ar $(8 + 3\frac{1}{2} + 7 + 6\frac{1}{2} + 5) - (0 + (-2) + 2 + 4 + 3) = 23$.

37.9. Tādus skaitļus var izvēlēties, piemēram, šādi:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1985}, 2, 1987\,.$$

Gan to summa, gan reizinājums ir vienādi ar $2 \cdot 1987$.

37.10. a) Šajā gadījumā uzvar otrais spēlētājs. Kad pirmais spēlētājs novietojis kauliņu, otrais saskaita, cik brīvu rūtiņu ir pa labi no tā. Šķiro trīs gadījumus:

1) 2 rūtiņas,

2) nepāra skaits rūtiņu,

3) pāra skaits rūtiņu (izņemot 2).

1) Otrais spēlētājs otro kauliņu novieto blakus pa kreisi pirmā spēlētāja novietotajam kauliņam.

2) Otrais spēlētājs savu kauliņu novieto uz pēdējās rūtiņas.

3) Otrais spēlētājs savu kauliņu novieto uz priekšpēdējās rūtiņas.

Viegli pārbaudīt, ka visos gadījumos gājienu pietrūks pirmajam spēlētājam.

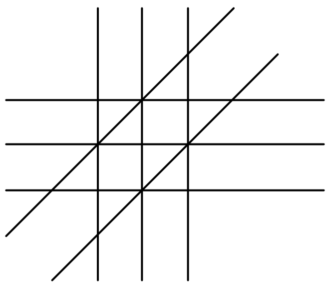
b) Šajā gadījumā uzvar pirmais spēlētājs. Pirmo kauliņu viņš novieto pašā pēdējā rūtiņā un tālāk rīkojas tā, it kā būtu otrais spēlētājs spēlē ar diviem kauliņiem.

37.11. Skat. 37.6. zīm.

X	X			
X			X	
			X	X
	X	X		
		X		X

37.6. zīm.

37.12. Piemēram, tā, kā parādīts 37.7. zīm.



37.7. zīm.

37.13. Norādītie punkti pieder dažādām plaknes daļām.

Tā kā $4\frac{1}{20} < 2\frac{1}{10} + 2$, tad B atrodas zem pirmās taisnes; līdzīgi no nevienādības $4\frac{2}{5} > 1\frac{9}{10} + 2$ seko, ka punkts A atrodas virs pirmās taisnes; tātad punkti atrodas dažādās plaknes daļās.

37.14. Intervālā no 1 līdz 1000 atrodas vismaz 100 laimīgie skaitļi; apzīmēsim tos ar $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Aplūkosim starpības $a_2 - a_1$, $a_4 - a_3$, …, $a_{100} - a_{99}$. Tā kā šo starpību ir 50, bet tās var pieņemt tikai 9 vērtības , tad būs vismaz divas vienādas . No vienādības $a_i - a_{i-1} = a_k - a_{k-1}$ seko prasītā vienādība $a_i + a_{k-1} = a_k + a_{i-1}$.

37.15. Skaitļa 198519861987 šajā virknē nebūs.

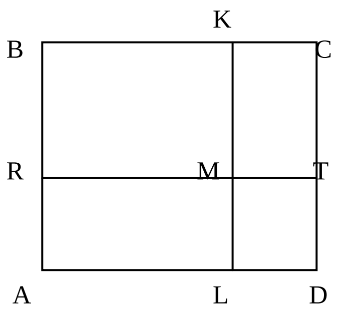
Atzīmēsim, ka skaitļa ciparu summa dod tādu pašu atlikumu kā pats skaitlis. Tagad uzrakstīsim aplūkojamo virkni pēc moduļa 3 (tātad atlikumus, ko dod skaitlis, dalot ar 3). Iegūstam virkni 1, 2, 1, 2, …; tā ir periodiska un tajā nav atlikuma 0. Bet skaitlis 198519861987 dod atlikumu 0, dalot ar 3.

37.16. $x = 3$.

37.17. Apzīmējam $1986\frac{3}{11} = x$. Tad izteiksmes vērtība ir vienāda ar

$$(x+1)(x+2) - x(x+3) = \left(x^2 + 3x + 2\right) - \left(x^2 + 3x\right) = 2 .$$

37.18. Novelkam $RT \parallel AD$ un $KL \parallel AB$ (skat. 37.8. zīm.).



37.8. zīm.

Tad , izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam prasīto:

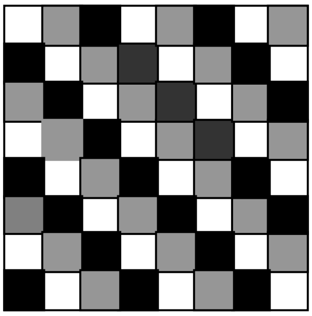
$$AM^2 + CM^2 = \left(LM^2 + RM^2\right) + \left(KM^2 + TM^2\right) =$$
$$\left(RM^2 + KM^2\right) + \left(LM^2 + TM^2\right) = MB^2 + DM^2 .$$

37.19. Tāds piecstūris neeksistē.

Aplūkosim punktus A un B , starp kuriem attālums ir 2. Ir trīs trijstūri, kuri satur šos punktus. To malu garumu starpība ir mazāka par 2 -- tātad vienāda ar 1, jo visi dotie skaitļi ir veseli.

Šādi pāri ir (2, 3), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 11). Pāri (2, 3) izmantot nevar, jo skaitlis 2 jau izmantots. No atlikušajiem 4 pāriem nevar izvēlēties trīs pārus bez kopīgiem skaitļiem, jo trīs pāriem ar atšķirīgiem malu garumiem būtu jāsatur 6 skaitļus, bet skaitļu ir tikai 5.

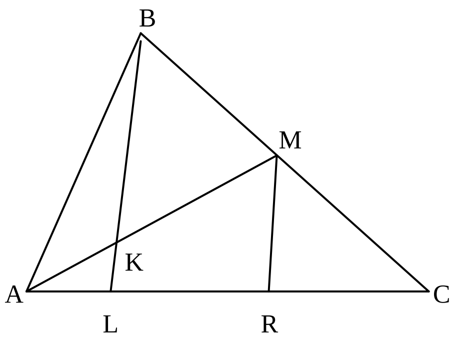
37.20. Šaha dēli iekrāsosim trīs krāsās : baltā, pelēkā un melnā, kā parādīts 37.9. zīmējumā:



37.9. zīm.

Ievērosim, ka zaķītis var pārvietoties no baltā lauciņa tikai uz pelēko, no pelēkā -- tikai uz melno, no melnā -- tikai uz balto. Tātad pēc $3n$ gājieniem tas atradīsies sākotnējās krāsas lauciņā. Kopā tam jāizdara 64 gājieni; 63-ajā gājienā tas atradīsies sākuma krāsas lauciņā, bet 64-ajā gājienā viņš būs citas krāsas lauciņā un nevar nonākt sākotnējā lauciņā.

37.21. Aplūkosim 37.4. zīmējumu.



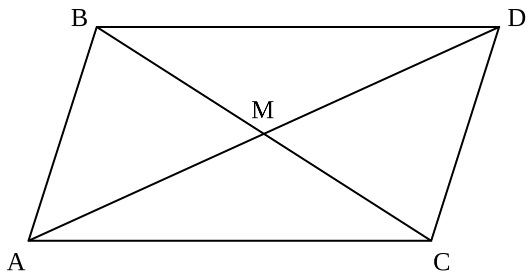
37.4.zīm.

Novelkam $MR||BL$. No Talesa teorēmas seko vienādības

$$\frac{AL}{LR}=\frac{AK}{KM}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{LR}{RC}=\frac{BM}{MC}=1 \quad \Rightarrow \quad LC=2\cdot LR \quad \Rightarrow$$
$$\frac{AL}{LC}=\frac{AL}{2\cdot LR}=\frac{1}{4}.$$

37.22. Ja pirmais progresiju loceklis ir *a*, bet diferences $d_1, d_2, \ldots, d_{10}$, tad visām progresijām pieder skaitļi $a+n\cdot \mathrm{MKD}(d_1, d_2, \ldots, d_{10})$.

37.23. Papildinām trijstūri *ABC* līdz paralelogramam *ABDC* (skat. 37.5. zīm.).



37.5. zīm.

Tad $AD=2AM$, un no kosīnusu teorēmas seko vienādības

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot \cos\angle BAC$$
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC\cdot CD\cdot \cos\angle ACD.$$

Saskaitot šīs vienādības un ievērojot, ka $AB=CD$ un $\cos\angle BAC=-\cos\angle ACD$, iegūstam

$$BC^2 + 4AM^2 = 2\cdot\left(AB^2 + AC^2\right),$$

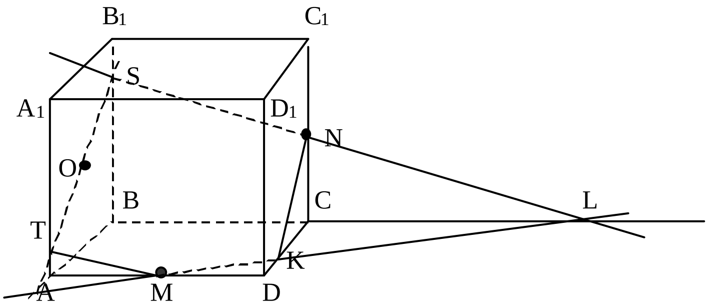
no kurienes seko vajadzīgais.

37.24. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x)=cx^2+bx+a$. Tad $f(0)=a$ un $f(1)=a+b+c$. Pēc dotā $f(0)\cdot f(1)=a^2+ab+ac<0$. Tātad viena no vērtībām $f(0)$ un $f(1)$ ir pozitīva, otra negatīva; tas nozīmē, ka funkcijai $f(x)$ ir saknes. Tātad trinoma cx^2+bx+a diskriminants b^2-4ac ir pozitīvs. No šejienes seko prasītā nevienādība.

37.25. Pirmais spēlētājs kā pirmo uzraksta ciparu7. Pārbaude parāda, ka otrais ar savu pirmo gājienu nevar izveidot kvadrātu. Tālāk pirmais visu laiku rakstīs labajā pusē jau esošajam skaitlim ciparus 7 vai 8. Ja otrais savu ciparu pierakstīs pa kreisi, tad viņa iegūtais skaitlis beidzas ar 7 vai 8 un nav kvadrāts.

Pierādīsim, ka pirmais var garantēt, ka otrais neizveido kvadrātu, pierakstot ciparu pa labi. Tiešām, pieņemsim pretējo, ka otrais spēlētājs izveido skaitli *A*, ka gan pirmā spēlētāja izveidoto skaitli $\overline{A7}$, gan skaitli $\overline{A8}$ otrais var papildināt līdz kvadrātam ar ciparu pa labi. Pieņemsim, ka skaitli $\overline{A7}$ var papildināt līdz kvadrātam ar ciparu *a*, bet $\overline{A8}$ -- ar ciparu *b*. Ievērosim, ka $\overline{A8b} - \overline{A7a} \le 19$. Bet kvadrāti, kas satur vismaz 3 ciparus, atšķiras vismaz par 21. Iegūta pretruna.

37.26. Skat. 37.6. zīm.



37.6. zīm.

Apzīmēsim šķēlējplakni ar α, bet plakni, kas iet caur AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 viduspunktiem -- ar β. Tā kā $\beta \parallel ABCD$, tad α šķēluma līnijas ar β un *ABCD* ir paralēlas. Bet α šķēluma līnija ar β ir taisne *ON*. Tātad taisne *t*, kas vilkta caur *M* paralēli *ON*, ir α šķēluma līnija ar *ABCD*. Tālākā konstrukcijas gaita:

$K = t \cap CD,$

$L = t \cap BC,$

$S = LN \cap BB_1$

$T = SO \cap AA_1.$

Meklējamais šķēlums ir *MKNST*.

37.27. a) Ņemam $x = \pi + \varepsilon$, kur ε -- mazs pozitīvs skaitlis. Tad

$ix = i\pi + i\varepsilon$ (*i* -- naturāls skaitlis).

Ja $i\varepsilon < \pi$, tad pie pāra skaitļiem *i* ir spēkā nevienādība $\sin(ix) > 0$, pie nepāra i -- nevienādība $\sin(ix) < 0$.

Tātad mūs apmierinās ε, kam izpildās nevienādības

$1986 \cdot \varepsilon < \pi$, $1987 \cdot \varepsilon > \pi$.

Varam ņemt jebkuru ε no intervāla $\left(\frac{\pi}{1987}, \frac{\pi}{1986}\right)$.

37.27.b) Kastē ir 50 pāra skaitļu un 50 nepāra skaitļu. Ja izvelk dažādas paritātes skaitļus (tādu iespēju ir $2 \cdot 50 \cdot 50$), uzvar Juris. Iespēju izvilkt abus pāra skaitļus ir

$50 \cdot 49$; iespēju izvilkt abus nepāra skaitļus -- tikpat. Tātad Andrim labvēlīgi ir $2 \cdot 50 \cdot 49$ gadījumi. Redzam, ka Jura izredzes uzvarēt ir lielākas.

37.28. To var izdarīt, piemēram, nospiežot zīmējumā parādītās pogas katru vienu reizi.

X	X			
X	X		X	X
		X	X	X
	X	X	X	
	X	X		X

37.7. zīm.

37.29. Apzīmēsim n-stūra malu projekciju garumus uz vienas kvadrāta malas ar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet to projekciju garumus uz perpendikulāro malu ar $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Tā kā n-stūris ir izliekts, tad

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le 2,$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le 2,$$

jo katrā virzienā vienā punktā projicējas ne vairāk kā divi daudzstūra malu punkti (jāievēro, ka daudzstūris ir izliekts).
Ņemot vērā, ka $a_i \le 1$ un $b_i \le 1$, iegūstam nevienādības

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le 2,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le 2.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \le 4.$$

Bet pēc Pitagora teorēmas nevienādības kreisajā pusē esošā summa ir n-stūra visu malu kvadrātu summa.

37.30. Ievietosim dotajā vienādībā dažādas konkrētas burtu vērtības. Ievietojot $x = y = z = 0$, iegūstam

$$(0 \circ 0) = 2 \cdot (0 \circ 0), \text{ no kurienes}$$
$$(0 \circ 0) = 0.$$

Ievietojot $x = z = 0$, iegūstam

$$(0 \circ y) = (y \circ 0) + (0 \circ 0), \text{ no kurienes}$$
$$(0 \circ y) = (y \circ 0).$$

Ievietojot $y = z = 0$, iegūstam

$$(x \circ 0) = (0 \circ x) + (0 \circ x) = 2 \cdot (0 \circ x) = 2 \cdot (x \circ 0), \text{ no kurienes}$$

$$(x \circ 0) = (0 \circ x) = 0.$$

Ievietojot $z = 0$, iegūstam

$$(x \circ y) = (y \circ x) + (0 \circ x) = (y \circ x),$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

37.31. Kāpinot dotās vienādības kvadrātā, iegūstam

$$a^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x \quad \Rightarrow$$

$$\sin 2x = a^2 - 1;$$

$$\sin 2y = b^2 - 1.$$

Pārveidojot trigonometrisko funkciju reizinājumu summā, iegūstam

$$\sin(x+y)\cdot\cos(x-y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y+x-y) + \sin(x+y-x+y)) =$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}.$$

37.32. Ja $n = 2$, tad $n^3 + 9 = 17$ arī ir pirmskaitlis.

Ja $n > 2$, tad n ir nepāra skaitlis ; bet tādā gadījumā $n^3 + 9$ ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad nav pirmskaitlis.

37.33. Ja $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$, tad

$$a_4 = z\cdot(x+y), a_5 = z\cdot(x+y)\cdot(z+y),$$

$$a_6 = z^2(x+y)\cdot(y+z)\cdot(x+y+1).$$

Ievērosim, ka $x + y \geq 2$ un skaitļi $(x+y)$ un $(x+y+1)$ ir divi skaitļa 144 dalītāji, kas atšķiras par 1. Iegūstam trīs iespējas:

a) $x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = y = 1, \quad z^2(z+1) = 24$. Tā kā z -- naturāls skaitlis, tad atrisinājumu nav.

b) $x + y = 3$.

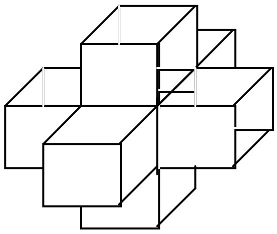
b1) $x = 1, y = 2, z^2(z+2) = 12$. Atrisinājumu nav.

b2) $x = 2, y = 2, z^2(z+1) = 12$. Tad iegūstam vienīgo atrisinājumu $z = 2, a_4 = 6, a_5 = 18, a_6 = 144, a_7 = 144(18+6) = 3456$.

c) $x + y = 8 \quad \Rightarrow \quad z^2(y+z) = 2$; tad $y = z = 1, x = 7$, bet tad $a_6 \neq 144$.

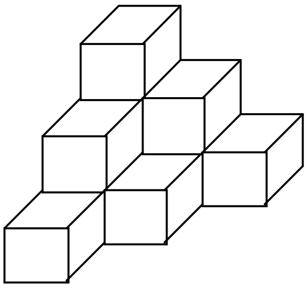
37.34. Tā ka visas figūras K_0, K_1, K_2, K_3 ir simetriskas attiecībā pret plaknēm, kas iet caur K_0 centru perpendikulari tā skaldnēm, tad katra nākošā figūra K_{i+1} šajā virknē tiek iegūta, apvienojot iepriekšējo figūru K_i ar tām, kas iegūstamas no K_i ar paralēlo pārnesi par K_0 šķautnes garumu sešos virzienos perpendikulāri K_0 skaldnēm. Tātad K_{i+1}, salīdzinot ar K_i, pievienojas visi tie telpiskā kubiskā režģa kubi, kam ir kopēja skaldne ar kādu no K_i kubiņu.

No 37.8. zīmējuma redzams, ka K_2, salīdzinot ar K_1, satur 6+12 = 18 jaunus kubus, Tātad K_2 sastāv no 7 + 18 = 25 kubiem.



37.8.zīm.

No 37.9. zīmējuma, kur parādīta K_2 daļa vienā oktantā, redzams, ka K_3, salīdzinot ar K_2, satur $6+12\cdot 2+8\cdot 1=38$ jaunus kubus, tātad K_3 sastāv no 63 kubiem.



37.9. zīm.

37.35. Pielietojot gājienu 1. un 2., 1. un 3., … ,1. un 10. rūtiņai, pirmajā rūtiņā iegūsim

$$\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}.$$

Pierādīsim, ka mazākais pozitīvais skaitlis, kas kādā brīdī ierakstīts tabulā, nevar būt mazāks par $\frac{1}{512}$. No tā seko, ka arī pirmajā rūtiņā ierakstītais skaitlis nevar būt mazāks par $\frac{1}{512}$, jo tas vienmēr ir pozitīvs.

Tiešām, noskaidrosim, kādā ceļā var pamazināties mazākā pozitīva tabulas vērtība. Tā var pamazināties tikai, ja gājiens tiek pielietots pozitīvam skaitlim un nullei. Tad nuļļu skaits tabulā samazinās. Tā kā jaunas nulles nerodas, tad šādu gājienu ir ne vairāk kā deviņi. Pēc katra šāda gājiena mazākā pozitīvā ieraksta vērtība pamazinās ne vairāk kā divas reizes. Tā kā sākumā mazākais pozitīvais ieraksts ir 1, tad tas nevar kļūt mazāks par $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

37.36. Ievērosim, ka $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2$. Tāpēc

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx - (x_1 + x_2)\int_{x_1}^{x_2} xdx + x_1 x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx =$$

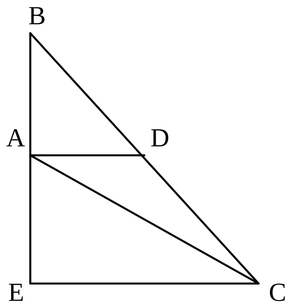
$$\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - (x_1 + x_2)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + x_1 x_2 \cdot x\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{3} - (x_1 + x_2)\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + x_1 x_2 (x_2 - x_1) =$$

$$\frac{1}{6}(x_1 - x_2)^3.$$

37.37. Nē, nevar. Skaidrs, ka šo progresiju kvocienti ir naturāli skaitļi. Ja progresiju pirmie locekļi ir $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet kvocienti $q_1, q_2, \ldots, q_2$, tad nevienā progresijā neietilpst pirmskaitļi, kas lielāki par visiem skaitļiem a_i un q_i.

37.38. Skat. 37.10. zīm.



37.10. zīm.

Apzīmēsim $BD = x$ un papildinām līdz taisnleņķa trijstūrim *BEC*. Tad $\angle ACE = \angle DAC = 30°$. Pēc Talesa teorēmas $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC}$, tāpēc $AE = \frac{1}{x}$; tālāk $CE = \frac{\sqrt{3}}{x}$. Pielietojot Pitagora teorēmu trijstūrim *EBC*, iegūstam

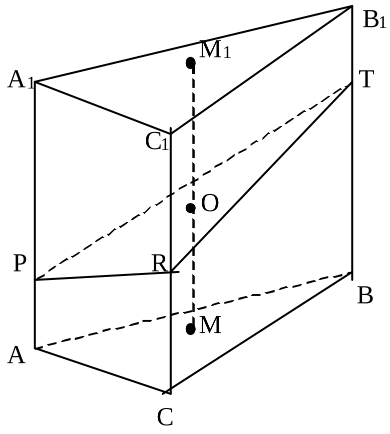
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2 = (x+1)^2.$$

Pēc pārveidojumiem iegūstam

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x^3 - 2)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

37.39. . Apzīmējam prizmas pamata laukumu ar S. Uzdevuma atrisinājums acīmredzami seko no diviem apgalvojumiem (skat. 37.11. zīm.).

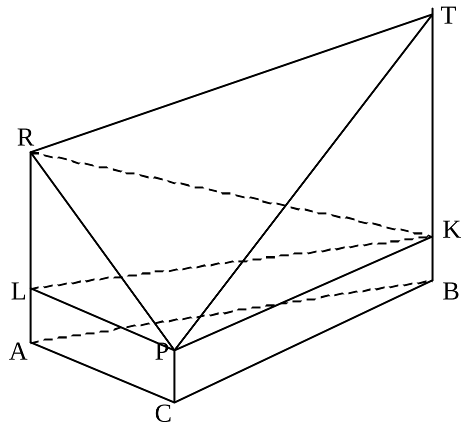


37.11. zīm.

(1) $ABCPTR$ tilpums ir $\frac{1}{3}S \cdot (AP + CR + BT)$; tad analoģiski $A_1B_1C_1PTR$ tilpums ir $\frac{1}{3}S \cdot (A_1P + C_1R + B_1T)$.

(2) $AP + CR + BT = 3 \cdot MC$; tad analoģiski $A_1P + C_1R + B_1T = 3 \cdot M_1C$.

Uzskatīsim, ka P ir viszemākais no punktiem P, R, T. Novelkam caur P plakni PKL, kas paralēla piramīdas pamata plaknei (skat. 37.12. zīm.).



37.12. zīm.

Ķermenis $PLKRT$ sastāv no divām piramīdām $LPKR$ un $PRKT$. Otra no tām ir vienliela ar piramīdu $PLKT$ (tām ir kopīga skaldne PKT un vienādi augstumi pret to, jo KL paralēla PTK).

Tāpēc $V_{PLKRT} = V_{PLKR} + V_{PLKT} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (LR + KT)$. Tāpēc

$$V_{ABCPTR} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (LR + KT) + S \cdot AP =$$
$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot \left(AP + (LR + AP) + (KT + AP)\right) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (AP + CR + BT).$$

Pirmais apgalvojums pierādīts.

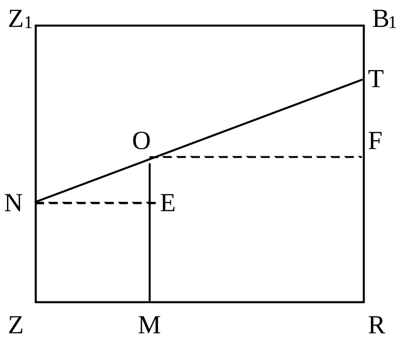
Apskatām prizmas šķēlumu ar plakni BB_1M_1M. Tā krusto šķautnes A_1C_1 un AC to viduspunktos Z_1 un Z, tātad arī PR tā viduspunktā N (skat. 37.13. zīm.).

No trapeces $APRC$ seko, ka $PA + RC + 2 \cdot NZ$.

No trijstūru NEO un OFT līdzības (skat. 38.10. zīm.) seko, ka

$$\frac{OE}{TF} = \frac{NE}{OF} = \frac{ZM}{MB} = \frac{1}{2} \text{ , tātad } \frac{OM - NZ}{TB - OM} = \frac{1}{2};$$

no šejienes $2 \cdot NZ + TB = 3 \cdot MO$, tātad $PA + RC + TB = 3 \cdot MO$. Otrais apgalvojums pierādīts.



37.13. zīm.

37.40. Pirmo īpašību var pierakstīt šādi:

$$x \circ y = z \quad \Rightarrow \quad x \circ z = y;$$

Otro īpašību var pierakstīt šādi:

$$x \circ y = z \quad \Rightarrow \quad z \circ y = x.$$

a) Komutivitāte pierādās šādi:

$$x \circ y = z \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad z \circ y = x \quad \overset{1}{\Rightarrow} \quad z \circ x = y \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad y \circ x = z.$$

b) Asociativitāti pierādīt nav iespējams. Viegli pārbaudīt, ka operācijai $x \circ y = -x - y$ izpildās dotās īpašības, bet šī operācija nav asociatīva, jo

$(a \circ b) \circ c = -(-a - b) - c = a + b - c$, bet

$a \circ (b \circ c) = -a - (-b - c) = -a + b + c$.