Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 34. OLIMPIĀDE

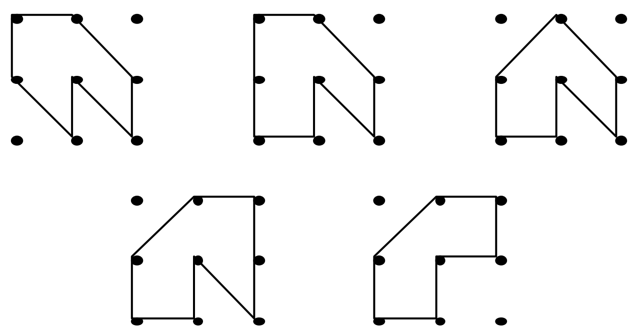
ATRISINĀJUMI

34.1. Ja kvadrāta laukums ir 49 cm^2, tad tā malas garums ir 7 cm, un perimetrs ir 28 cm.

34.2. Jānim ir vismaz par vienu kapeiku vairāk naudas nekā Jurim; Andrim ir vismaz par vienu kapeiku vairāk naudas nekā Jānim -- tātad vismaz par divām kapeikām vairāk naudas nekā Jurim. Aivaram ir vismaz par vienu kapeiku vairāk naudas nekā Andrim -- tātad vismaz par trīs kapeikām vairāk nekā Jurim; un viņš varēs nopirkt par 1 konfekti vairāk nekā Juris.
Nē, ne noteikti. Ja, piemēram, Jurim ir 3 kap. , Jānim ir 4 kap., bet Andrim 5 kap., tad Andris nevar nopirkt vairāk konfekšu nekā Juris.

34.3. Tas ir skaitlis 38.

34.4. Skat. 34.5. zīmējumu.



34.5 zīm.

34.5. Visu deviņu nenulles ciparu summa ir 45. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Tātad $45-x$ dalās ar 9 (x -- neizmantotais cipars). Tāpēc $x=9$.

34.6. Aplūkosim piecu pēc kārtas ņemtu skaitļu summu:

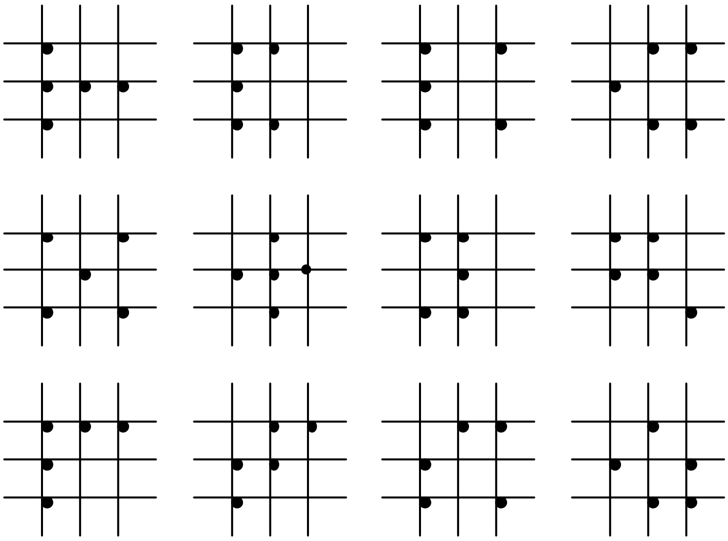
$$S=(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n .$$

Tātad šī summa dalās ar 5 un nevar pieņemt vērtības 24 un 1984, bet var pieņemt vērtību 1985.

34.7. Piemēram, var izvēlēties skaitļus

$$a = b = e = f = 1, \quad c = d = g = h = -1.$$

34.8. Visi iespējamie varianti parādīti 34.6. zīm.



34.6. zīm.

34.9. Salejam vienā mēģenē nedaudz šķidruma no 32 traukiem un pārbaudām tās saturu. Ja reaģents uzrāda indi, tad tā ir vienā no šiem 32 traukiem, ja nē -- tad vienā no 32 pārējiem.

Tālāk apskatām tikai tos 32 traukus, vienā no kuriem ir inde. Salejam vienā mēģenē nedaudz šķidruma no 16 traukiem un pārbaudām tās saturu. Tādejādi pēc otrās pārbaudes jau noskaidroti 16 trauki, vienā no kuriem ir inde.

Pēc trešās pārbaudes atradīsim 8 traukus, vienā no kuriem ir inde; pēc ceturtās -- 4 traukus; pēc piektās -- 2 traukus; pēc sestās -- vienu īsto trauku, kurā ir inde.

34.10. Kā redzams piemērā, skaitli 76 var pārveidot par skaitli 1:

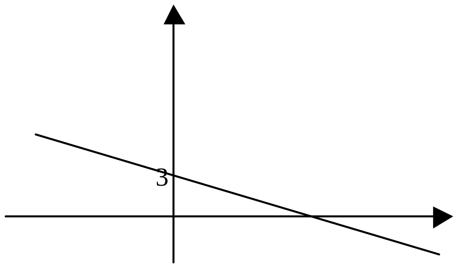
$$76 \to 38 \to 44 \to 22 \to 11 \to 17 \to 23 \to$$
$$32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Ja skaitlis x dalās ar 3, tad izpildot jebkuru no atļautajām operācijām, rezultāts arī dalās ar 3. Tātad mazākais skaitlis, ko varētu iegūt no skaitļa 15, ir 3; piemērā parādīts, kā iegūt skaitli 3:

$$15 \to 21 \to 12 \to 6 \to 3.$$

34.11. a) Risinot vienādojumu $3-0,2\cdot x=100$, iegūstam $x=-485$.

b) Taisne krusto pirmo, otro un ceturto kvadrantus (skat. 34.7. zīm.)



34.7. zīm.

34.11. Naturālu skaitļu kvadrāti var beigties ar cipariem 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Ceturtās pakāpes (kvadrātu kvadrāti) var beigties ar cipariem 0, 1, 5, 6.

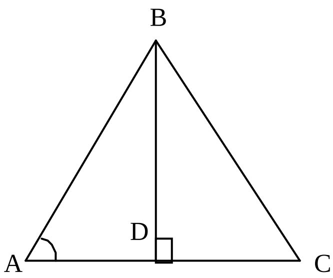
Astotās pakāpes (ceturto pakāju kvadrāti) var beigties ar cipariem 0, 1, 5, 6.

Sešpadsmitās pakāpes (astoto pakāpju kvadrāti) var beigties ar cipariem 0, 1, 5, 6.

34.13. Skat. 34.8. zīm. No vienādības

$$\angle BAD=180°-\angle ABD-90°=180°-\angle CBD-90°=\angle BCD$$

seko, ka trijstūri *BAD* un *BCD* ir vienādi (taisnleņķa trijstūri ar kopīgu kateti un vienu no šaurajiem leņķiem). Tāpēc $AB=BC$.



34.8. zīm.

34.14. Jā, var. Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem :

$$(1,\,2),\,(3,\,4),\,\ldots,\,(1983,\,1984).$$

Ar katru savu gājienu otrais spēlētājs izsvītro otru skaitli no pāra, kurā pirmais spēlētājs izsvītrojis kādu skaitli. Rezultātā pēdējie divi skaitļi būs skaitļi no viena pāra; tātad skaitļi n un $(n+1)$. Šādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Tiešām, ja d ir skaitļu n un $(n+1)$ dalītājs, tad d ir arī starpības $(n+1)-n=1$ dalītājs -- tātad $d=1$.

34.15. a) Pēc kārtas uz kreisā un labā svaru kausa liek atsvarus masu pieaugšanas secībā.

b) Jā, var; skat. 34.9. zīm.

kreisais	labais
2	
1	
	4
5	
	6
	3
8	
	7

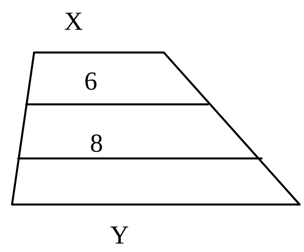
34.9. zīm.

34.16. Vienādojumam nav atrisinājumu. Tiešām

$$\frac{4x+2}{3x+1}=\frac{8x+4}{6x+3} \quad\Rightarrow\quad \frac{4x+2}{3x+1}=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow$$
$$3\cdot(4x+2)=4\cdot(3x+1) \quad\Rightarrow\quad 6=4.$$

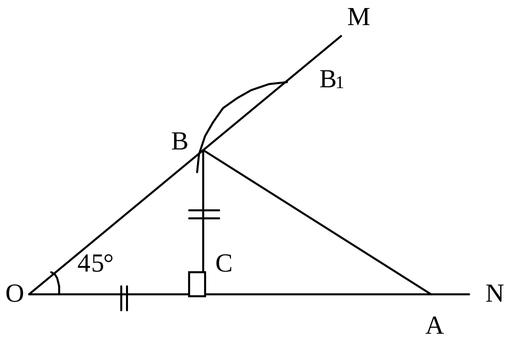
Tā ir pretruna.

34.17. No trapeces viduslīnijas īpašības seko, ka $8+X=2\cdot 6$; tātad $X=4$. Līdzīgi pierāda, ka $Y=10$.



34.10. zīm.

34.18. Skat. 34.11. zīm. Konstruējam $45°$ leņķi $\angle MON$, atliekam $OA=a+b$ un no punkta A kā centra velkam riņķa līniju ar rādiusu c. Tās krustpunktu ar staru OM apzīmējam ar B. No B velkam perpendikulu BC pret staru OA. Trijstūris ACB ir ir meklētais.



34.11. zīm.

34.19. Vismaz vienam no 5 skaitļiem jā būt izvēlētam centrālajā 3×3 rūtiņu kvadrātā, jo ārējā kontūrā saskaņā ar nosacījumu var paņemt ne vairāk kā 4 skaitļus. Lielākais skaitlis iekšējā ir 15. Tātad mazākais skaitlis no 5 izvēlētajiem nevar būt lielāks par 15. Piemērs $\{15, 18, 25, 20, 23\}$ parāda, ka tas var būt 15.

34.20. Ja kādā solī rodas 0, tad arī visu laiku paliek 0.

Pieņemsim, ka nulle nerodas.

Ja $x=\dfrac{p}{q}\geq1$, tad tas pārveidojas par

$$\frac{\frac{p}{q}-1}{2}=\frac{p-q}{2q};$$

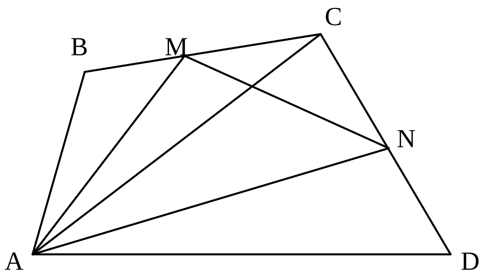
pretējā gadījumā par

$$\frac{\frac{2p}{q}}{1-\frac{p}{q}}=\frac{2p}{q-p}.$$

Abos gadījumos skaitītāja un saucēja summa ir tāda pati, kā skaitlim x (vai arī samazinās, ja notiek saīsināšana). Tā kā visi iegūstāmie skaitļi ir pozitīvi, varam uzskatīt, ka saucējs un skaitītājs ir pozitīvi skaitļi. Bet pozitīvus skaitļus a un b, kuru summa nepārsniedz noteiktu lielumu, var izvēlēties tikai galīgā skaitā veidu.

34.21. Ievietojot $x=8-y$ otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu $y^2-8y+15=0$. Sistēmas atrisinājums ir $(3, 5),(5, 3)$.

34.22. Skat.34.4. zīm.

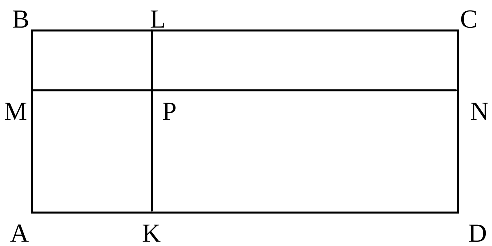


34.4. zīm.

Trijstūru *AMB* un *AMC* laukumi ir vienādi, jo tiem ir vienādi pamati *BM* un *MC* un augstumi; arī trijstūru *CAN* un *AND* laukumi ir vienādi. Tātad

$$S_{AMN} < S_{AMCN} = S_{AMC} + S_{ACN} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ACD}) = \frac{1}{2}(S_{ABCD}).$$

34.23. Skat 34.5. zīm.



34.5. zīm.

No Pitagora teorēmas seko, ka

$$PA^2 + PC^2 = (PM^2 + PK^2) + (PL^2 + PN^2) =$$
$$= (PL^2 + PN^2) + (PM^2 + PK^2) =$$
$$= PB^2 + PD^2.$$

34.24. Dalot vienādību $a^2 + b^2 = 14b$ ar *b*, iegūstam

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14 \cdot \frac{a}{b} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Tā kā $\frac{a}{b} > 1$, tad $\frac{a}{b} = 7 + 4\sqrt{3}$. Tāpēc

$$\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} - 7\right).$$

34.25. Viena no meklētajām progresijām ir progresija, kur $a_1 = 512$ un $q = \frac{3}{2}$; tad $a_{10} = 19683 < 20000$, un visi progresijas locekļi ir veseli skaitļi.

Pierādīsim, ka citu progresiju nav. Pieņemsim, ka kvocients ir nesaīsināma daļa $\frac{m}{n}$, $n \geq 2$, $m > n$. Tā kā $a_{10} = a_1 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^9$. Tad a_1 dalās ar n^9. Ja $n = 3$, tad $a_1 \geq 3^9 = 19683$, $q \geq \frac{4}{3}$, tāpēc jau $a_2 \geq 20000$ -- pretruna.

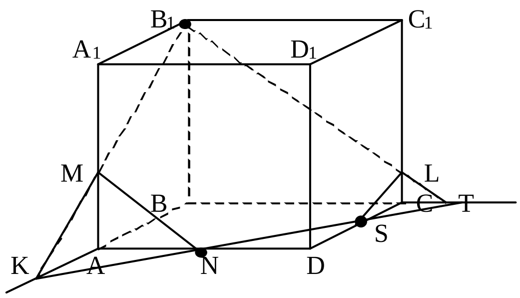
Ja $n \geq 4$, tad $a_1 \geq 4^9 > 20000$-- pretruna; tāpēc $n = 2$. Tā kā a_1 dalās ar 2^9, tad $a_1 \geq 512$. Ja $m \geq 4$, tad $q \geq 2$, un tad $a_7 > 20000$.

Tāpēc $m = 3$ un $q = \frac{3}{2}$. Ja $a_1 > 512$, tad $a_1 \geq 1024$ un

$$a_{10} = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 \geq 2 \cdot 3^9 > 20000 \text{ -- pretruna.}$$

Tāpēc $a_1 = 512, q = \frac{3}{2}$.

34.26. Skat. 34.6. zīm.



34.6. zīm.

Konstrukcijas gaita:

1) $K = (NS) \cap (AB)$;

punkts K pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

2) $M = (KB_1) \cap (AA_1)$;

punkts M pieder šķēluma plaknei, jo punkti K un B_1 pieder šķēluma plaknei;

3) $T = (NS) \cap (BC)$;

punkts T pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

4) $L = (TB_1) \cap (CC_1)$;

punkts L pieder šķēluma plaknei, jo punkti T un B_1 pieder šķēluma plaknei.

Meklētais šķēlums ir piecstūris B_1LSNM.

34.27. Apzīmēsim doto trīsciparu skaitli ar n^2**;** palielinot visus tā ciparus iegūstam skaitli n^2+111; tātad

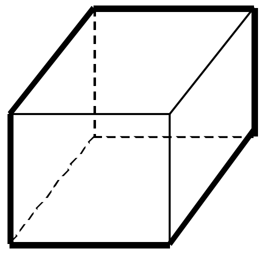
$$n^2+111=m^2 \quad \Rightarrow \quad (m-n)\cdot(m+n)=111=3\cdot 37 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=111, \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} m-n=3 \\ m+n=37. \end{cases}$$

Tātad $m=56, n=55$ vai $m=20,\ \ n=17$;

Pirmajā gadījumā $n^2=3025$ nav trīsciparu skaitlis. Otrajā gadījumā $n^2=289$ satur ciparu 9, kas nav atļauts. Tātad skaitļa ar prasītajām īpašībām nav.

34.28. Jā, eksistē. Piemēram tāds ir kubs. Acīmredzami tu var projicēt par četrstūri (kvadrātu) un arī par sešstūri (skat. 34.7. zīm.).



34.7..zīm.

Kubs ir centrāli simetriska figūra; tātad tā projekcija arī ir centrāli simetriska figūra un tā nevar būt piecstūris, jo centrāli simetrisks daudzstūris satur pāra skaitu virsotņu (tās sadalās pa simetrisku virsotņu pāriem).

34.29. Ievietojot $x=y$, iegūstam $(f(x))^2=f(x)$, no kurienes seko $f(x)=1$ vai $f(x)=0$. Tātad funkcija var pieņemt vērtības 0 un 1.

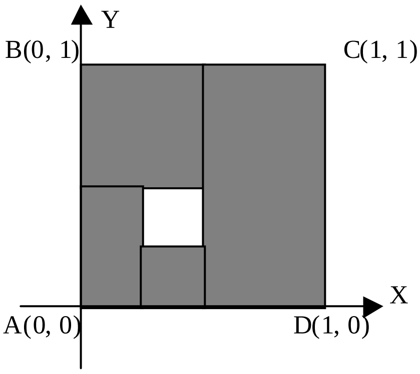
Nepārtraukta funkcija var pieņemt tikai vienu no šīm vērtībām; pretējā gadījumā tā pieņemtu visas vērtības no 0 līdz 1. Tātad tās ir funkcijas

$$f(x)=0 \ \text{un} \ f(x)=1.$$

Pārtraukta funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir šāda:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ ja } x=0 \\ 0, \text{ ja } x\neq 0. \end{cases}$$

34.30. Katra nākošā baltā kvadrāta mala ir 4 reizes īsāka par iepriekšējā kvadrāta malu (skat. 34.8. zīm.).



34.8. zīm.

Katra nākošā baltā kvadrāta labai augšējais stūris atrodas iepriekšējā baltā kvadrāta centrā, tātad attiecībā pret iepriekšējā baltā kvadrāta labo augšējo stūri pārbīdīts pa kreisi par pusi no iepriekšējā kvadrāta malas garuma. Tātad tas tiecas uz punktu, kura abscise ir vienāda ar

$$1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\frac{1}{4^n}+\cdots\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Līdzīgi aprēķinām šī punkta ordināti. Punkta koordinātes ir $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

34.31. Izmantojot identiskus pārveidojumus, iegūstam

$$\sin(\alpha+b)\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta b+\cos\alpha\sin\beta)\cdot(\sin\alpha\cos\beta b-\cos\alpha\sin\beta)=$$
$$\sin^2\alpha\cos\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=$$
$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

34.32. a) Nē, nevar būt. Ja $\operatorname{tg}\alpha=x$, tad

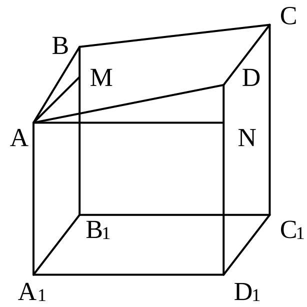
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}$$ -- racionāls skaitlis.

b) Jā, var būt. Piemēram, ja $\alpha=22°30'$, tad

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}45°=1$$, no kurienes

$$\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha=-1+\sqrt{2}.$$

34.33. Apzīmēsim kvadrāta projekcijas ar $A_1B_1C_1D_1$. Pieņemsim no pretējā, ka ne visi punkti *A*, *B*, *C*, *D* atrodas vienādos attālumos no plaknes π. Pieņemsim , ka *A* ir tā kvadrāta virsotne, kas atrodas vistuvāk π (skat. 34.8. zīm.).



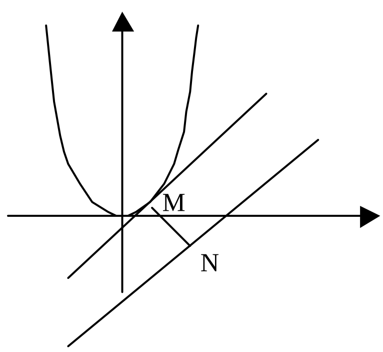
34.8. zīm.

Novelkam $AM \perp BB_1$ un $AN \perp DD_1$. Tad *B* un *D* atrodas ne zemāk par *M* un *N*. Tā kā $AB = AD$ un $AM = AN$, tad arī $BM = DN$ un $BB_1 = DD_1$. Apzīmēsim *ABCD* diagonāļu krustpunktu ar *O* un šķirosim divus gadījumus:

a) $BM = DN = 0$. Tad no augstāk pierādītā seko, ka *A*, *B* un *D* atrodas vienādā attālumā no π. Tā ka $O \in BD$, tad arī *O* atrodas šādā attālumā no π, bet tad $AO \parallel \pi$. Tā kā $C \in AO$, tad arī *C* atrodas tādā pašā attālumā no π.

b) $BM = DN > 0$. Tad *B*, *D* un tāpēc arī *O* atrodas tālāk no π nekā no *A*. Tāpēc *AC* nav paralēls π, un $A_1C_1 < AC$. Bet $BD \parallel \pi$, tāpēc $B_1D_1 = BD = AC$. Tātad $B_1D_1 > A_1C_1$, kas nav iespējams. Tātad b) gadījums nevar būt.

34.34. Skat. 34.9. zīm.



34.9. zīm.

Atradīsim pieskari parabolai, kas paralēla taisnei $y = x - 4$. Tad attālums starp pieskaršanās punktu M un tā projekciju N uz taisnes $y = x - 4$ būs meklētais mazākais attālums.

Lai atrastu punktu M, jāatrod punkts, kurā funkcijas atvasinājums ir 1.

$$\left(x^2\right)' = 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}.$$

Rakstām taisnes vienādojumu, kas iet caur punktu M perpendikulāri taisnei $y = x - 4$:

$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y + x - \frac{3}{4} = 0.$$

Lai atrastu punkta N koordinātes risinām sistēmu

$$\begin{cases} y + x + \frac{3}{4} = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2\tfrac{3}{8},\ y = -1\tfrac{5}{8}.$$

Tālāk atrodam attālumu starp punktiem M un N:

34.35. Divciparu skaitlis ar prasīto īpašību ir skaitlis 18.
Par $2k$-ciparu skaitli var ņemt skaitli $\underbrace{1818\ldots18}_{k \text{ reizes } 18}$.

Par $(2k+1)$-ciparu skaitli var ņemt skaitli $9\underbrace{1818\ldots18}_{k \text{ reizes } 18}$.

34.36. Izmantojot formulas, iegūstam

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x =$$
$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \left(1 - 2\sin^2 x\right) =$$
$$2\sin x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x \cdot \left(1 - 2\sin^2 x\right) =$$
$$3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Ja $0 < \sin x < \frac{1}{10}$, tad $\sin 3x < 3\sin x$. Tāpēc $\sin 3x < \frac{3}{10}$, un nevar izpildīties nevienādība $\sin 3x > \frac{1}{3}$.

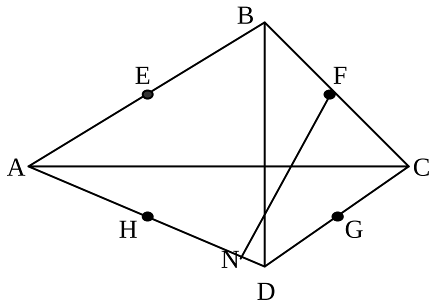
34.37. Viegli pierādīt, ka n jābūt pāra skaitlim; tiešām, ja daudzskaldnim ir s šķautņu, tad jāizpildās vienādībai $3n = 2s$. No šejienes seko, ka n ir pāra skaitlis.

Skaidrs, ka $n \geq 4$. Piemēru ar $n = 4$ dod trijstūra piramīda.

Ja $n = 2k,\ k \geq 3$, tad ar pamatiem savienojam divas regulāras k-stūru piramīdas, un izveidosies n-skaldnis, kam visas skaldnes ir trijstūri.

Atbilde: n -- jebkurš pāra skaitlis, kas lielāks par 2.

34.38. Apzīmēsim malu viduspunktus ar *E*, *F*, *G*, *H* (skat. 34.10. zīm.).



34.10. zīm.

No trijstūra viduslīniju īpašībām seko, ka $EF \parallel AC \parallel HG$ un $EH \parallel BD \parallel FG$; tā kā $AC \perp BD$, tad *EFGH* ir taisnstūris. Tātad ap to var apvilkt riņķa līniju, kuras diametri ir *EG* un *HF*. Tā kā $\angle HMF = 90°$, tad arī N atrodas uz šīs riņķa līnijas. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējās projekcijas atrodas uz šīs riņķa līnijas.

34.39. Apgalvojums seko no vienādībām

$$\sqrt{p} = \frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2 + (p-q)}{2\cdot\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)} \text{ un}$$

$$\sqrt{q} = \left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right) - \sqrt{p}\,.$$

34.40. Skaidrs, ka virkne (a_n) ir stingri augoša.

a) $a_7 = \left\lfloor \sqrt{7} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor + 7 = 3 + 7 = 10$.

b) Skaitlis 100 nav aplūkojamās virknes loceklis, jo
$a_{90} = \left\lfloor \sqrt{90} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor + 90 = 99$, bet $a_{91} = \left\lfloor \sqrt{91} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor + 91 = 101$.

c) Neviens naturāla skaitļa kvadrāts nav aplūkojamās virknes loceklis. Tiešām

$$a_{k^2+k} = \left\lfloor \sqrt{k^2+k} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor + \left(k^2+k\right) = k^2 + 2k < (k+1)^2, \text{ bet}$$

$$a_{k^2+k+1} = \left\lfloor \sqrt{k^2+k+1} + \tfrac{1}{2} \right\rfloor + \left(k^2+k+1\right) = (k+1) + \left(k^2+k+1\right) = k^2 + 2k + 2 > (k+1)^2.$$