Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 28. OLIMPIĀDE

8. klase

28.21. Divu trijstūru laukumi ir 50 cm^2 katrs. Pirmā trijstūra pamats ir par 10 cm garāks nekā otrā trijstūra pamats. Kādās robežās atrodas pirmā trijstūra pamata garums, ja zināms, ka abu trijstūru augstumu garumu starpība nav mazāka kā $\frac{5}{6}$ cm?

28.22. Trīs skaitļi veido ģeometrisko progresiju. Ja otro skaitli palielina par divi, tad skaitļi veido aritmētisko progresiju, bet, ja vēl trešo skaitli palielina par deviņi, tad skaitļi veido ģeometrisko progresiju. Atrast sākuma dotos skaitļus.

28.23. Divas riņķa līnijas, kuru rādiusu garumi ir 13 cm un 14 cm, krustojas, un attālums starp to centriem ir 15 cm. Aprēķināt abu riņķa līniju kopējās hordas garumu.

28.24. Dots, ka $a+b+c<0$ un vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ nav sakņu. Noteikt c zīmi.

28.25. Vai kvadrātisku papīra loksni ar izmēriem 3×3 var salocīt tādā veidā, lai tā apsegtu visu virsmu kubam, kura šķautnes garums ir 1 (pieļaujot, ka dažās vietās papīrs gulstas vairākās kārtās)? Papīru nedrīkst ieplēst vai saplēst vairākās daļās.

9. klase

28.26. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja n ir naturāls skaitlis, tad $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dalās ar 9.

28.27. Pilsētā ielas iet ziemeļu – dienvidu un austrumu – rietumu virzienos. Cik dažādu īsāko ceļu pa pilsētas ielām savieno ielu krustojumu, kas atrodas 5 kvartālus uz ziemeļiem un 5 kvartālus uz rietumiem no dotā?

28.28. Skaitļu virkne (x_n) definēta ar vispārīgā locekļa formulu $x_n=\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}$.

Pierādīt, ka tās robeža ir 2, lietojot

a) teorēmas par summas, dalījuma utt. robežu,

b) robežas definīciju un nelietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežu.

28.29. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā. Jebkuru divu riņķa līniju otrs krustpunkts un trešās riņķa līnijas centrs nosaka taisni. Pierādīt, ka šīs trīs taisnes krustojas vienā punktā.

28.30. Dotas divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t. Plaknē P doti punkti A un C, plaknē Q – punkts B; punkti A, B, C nepieder pie taisnes t. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt plaknē Q punktu D tā, lai četri punkti A, B, C, D būtu trapeces virsotnes ($AB||CD$). Konstrukcijas drīkst izdarīt tikai plaknēs P un Q un nekādās citās plaknēs; konstrukcijās drīkst izmantot taisni t. Attālums starp punktiem drīkst ar cirkuļa palīdzību pārnest no vienas no plaknēm P vai Q uz otru plakni.

10. klase

28.31. Atrast četrciparu skaitli, kas dalās ar 7 un ir izsakāms kā kāda naturāla skaitļa kvadrāta un kuba summa.

28.32. Pārveidot par reizinājumu izteiksmi $2+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

28.33. Kādam jābūt skaitlim a, lai taisne $y=4-x$ būtu parabolas $y=ax-x^2$ pieskare?

28.34. Doti skaitļi a, b, c, d, e, f, g, h. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ nav negatīvs.

28.35. Dotas divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t. Plaknē P doti punkti A un C, plaknē Q – punkts B; punkti A, B, C nepieder pie taisnes t. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt plaknē Q punktu D tā, lai četri punkti A, B, C, D būtu trapeces virsotnes ($AB||CD$). Konstrukcijas drīkst izdarīt tikai plaknēs P un Q un nekādās citās plaknēs; konstrukcijās drīkst izmantot taisni t. Attālums starp punktiem drīkst ar cirkuļa palīdzību pārnest no vienas no plaknēm P vai Q uz otru plakni.

11. klase

28.36. Atrisināt nevienādību

$$8\sin^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1>0.$$

28.37. Dotas divas koncentriskas riņķa līnijas. Iekšējā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts. Uz ārējās riņķa līnijas ņemts punkts M un savienots ar visām kvadrāta virsotnēm. Pierādīt, ka iegūto četru nogriežņu garumu kvadrātu summa nav atkarīga no punkta M stāvokļa uz ārējās riņķa līnijas.

28.38. Dots, ka $n > 7$ ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē daudzskaldnis ar n šķautnēm. Noskaidrot, vai eksistē daudzskaldnis ar 7 šķautnēm.

28.39. Pierādīt nevienādību

$$2^{n-1} \cdot n! \leq n^n,$$ ja n – naturāls skaitlis.

28.40. *A* un *B* spēlē šādu spēli. *B* iedomājas 16 dažādus skaitļus $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{16}$. *A* uzdot viņam jautājumus: "Vai taisnība, ka $x_i < x_j$?" un pēc katra jautājuma saņem atbildi "jā" vai "nē".

a) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam *A*, lai noteikti uzzinātu, kurš no *B* iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais? Kā to izdarīt?

b) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam *A*, lai noteikti varētu uzzināt gan to, kurš no *B* iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais, gan to, kurš ir otrais lielākais? Kā to izdarīt?