Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

5. klase

5.1. Kā sadalīt 10 virtuļus 12 bērniem vienādās daļās tā, lai katrs virtulis tiktu sadalīts ne vairāk kā 3 daļās?

Atrisinājums. Tā kā 10 virtuļi jāsadala 12 vienādās daļās, tad katram bērnam būs $\frac{10}{12}$ no visiem virtuļiem. Pārveidojot $\frac{10}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, iegūstam, ka katram bērnam jāiedod puse no kāda virtuļa un vēl trešdaļa no cita virtuļa (tas ir, 6 virtuļus jāgriež divās daļās un 4 virtuļus jāgriež trīs daļās).

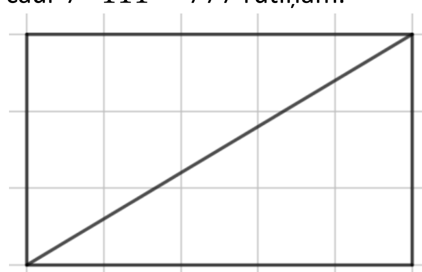
5.2. Vai var uzrakstīt rindā divus vieniniekus, divus divniekus un divus trijniekus (citus ciparus izmantot nedrīkst) tā, lai starp abiem vieniniekiem būtu uzrakstīts tieši viens cits cipars, starp abiem divniekiem – tieši divi citi cipari, starp abiem trijniekiem – tieši trīs citi cipari?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, 3; 1; 2; 1; 3; 2.

5.3. Rūtiņu lapā pa rūtiņu līnijām uzzīmēts taisnstūris ar izmēriem 333×555 rūtiņas. Caur cik rūtiņām iet taisnstūra diagonāle? (Diagonāle iet caur rūtiņu, ja tā satur šīs rūtiņas iekšējus punktus.)

Piezīme. Taisnstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno taisnstūra pretējās virsotnes.

Atrisinājums. Tā kā $\frac{333}{555}=\frac{3}{5}$ un $\frac{3}{5}$ ir nesaīsināma daļa, tad novilktā diagonāle sastāv no 111 taisnstūru 3×5 diagonālēm. Taisnstūra, kura izmēri ir 3×5 rūtiņas, diagonāle iet caur 7 rūtiņām (skat. 1. att.). Tātad taisnstūra 333×555 diagonāle iet caur $7\cdot111=777$ rūtiņām.



1. att.

5.4. Zināms, ka x un y ir dažādi cipari. Atrast visus tādus ciparus x un y, ja zināms, ka skaitlis $4x7yx3y31x$ dalās ar 45.

Atrisinājums. Tā kā $45=5\cdot9$ un tie ir savstarpēji pirmskaitļi, tad dotajam skaitlim ir jādalās gan ar 5, gan ar 9. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jābūt vai nu 0, vai 5. Apskatām abus gadījumus.

- Ja $x=0$, tad skaitļa ciparu summa ir $4+0+7+y+0+3+y+3+1+0=18+y+y$. Tā kā y ir cipars, kas atšķiras no x, tad mazākā summas $18+y+y$ vērtība ir $18+1+1=20$, bet lielākā summas $18+y+y$ vērtība ir $18+9+9=36$. Tā kā $18+y+y$ ir jādalās ar 9, tad derīgās vērtības ir 27 un 36. Summu 27 nevar iegūt, jo, saskaitot divus vienādus ciparus, nevar iegūt 9. Summu 36 var iegūt, ja $y=9$.
- Ja $x=5$, tad skaitļa ciparu summa ir $4+5+7+y+5+3+y+3+1+5=33+y+y$. Tā kā y ir cipars, tad mazākā summas $33+y+y$ vērtība ir $33+0+0=33$, bet lielākā summas $33+y+y$ vērtība ir $33+9+9=51$. Tā kā $33+y+y$ ir jādalās ar 9, tad derīgās vērtības ir 36 un 45. Summu 36 nevar iegūt, jo, saskaitot divus vienādus ciparus, nevar iegūt 3. Summu 45 var iegūt, ja $y=6$.

Tātad $x=0$ un $y=9$ vai arī $x=5$ un $y=6$.

5.5. Dagnis savā telefonā no 10 klases biedriem ir saņēmis 54 jaunas ziņas, no katra klases biedra vismaz vienu ziņu. Vai var gadīties, ka nekādi divi klases biedri nav atsūtījuši vienādu skaitu jauno ziņu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja katrs no 10 klases biedriem būtu atsūtījis dažādu skaitu jauno ziņu, tad pavisam kopā Dagnis būtu saņēmis vismaz $1+2+3+4+5+6+7+8+9+$ $+10=55$ jaunas ziņas (ja tiek ņemts mazākais dažādo ziņu skaits), taču Dagnis ir saņēmis tikai 54 jaunas ziņas.

Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

6. klase

6.1. Uzraksti vienu piemēru, kādus naturālus skaitļus var ierakstīt a, b, c, d vietā, lai dotās nevienādības būtu patiesas!

$$\frac{2}{5} < \frac{a}{d} < \frac{b}{d} < \frac{c}{d} < \frac{1}{2}$$

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\frac{2}{5} = \frac{20}{50}$ un $\frac{1}{20} = \frac{25}{50}$. Tātad jāatrod tādi naturāli skaitļi a, b, c, d, lai

$$\frac{20}{50} < \frac{a}{d} < \frac{b}{d} < \frac{c}{d} < \frac{25}{50}$$

Der, piemēram, $a = 21, b = 22, c = 23, d = 50$, tas ir, $\frac{20}{50} = \frac{2}{5} < \frac{21}{50} < \frac{22}{50} < \frac{23}{50} < \frac{1}{2} = \frac{25}{50}$.

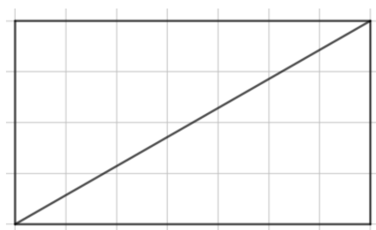
6.2. Vai var uzrakstīt rindā divus vieniniekus, divus divniekus, divus trijniekus un divus četriniekus (citus ciparus izmantot nedrīkst) tā, lai starp abiem vieniniekiem būtu uzrakstīts tieši viens cits cipars, starp abiem divniekiem – tieši divi citi cipari, starp abiem trijniekiem – tieši trīs citi cipari, starp abiem četriniekiem – tieši četri citi cipari?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4.

6.3. Rūtiņu lapā pa rūtiņu līnijām uzzīmēts taisnstūris ar izmēriem 444×777 rūtiņas. Caur cik rūtiņām iet taisnstūra diagonāle? (Diagonāle iet caur rūtiņu, ja tā satur šīs rūtiņas iekšējus punktus.)

Piezīme. Taisnstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno taisnstūra pretējās virsotnes.

Atrisinājums. Tā kā $\frac{444}{777} = \frac{4}{7}$ un $\frac{4}{7}$ ir nesaīsināma daļa, tad novilktā diagonāle sastāv no 111 taisnstūru 4×7 diagonālēm. Taisnstūra, kura izmēri ir 4×7 rūtiņas, diagonāle iet caur 10 rūtiņām (skat. 2. att.). Tātad taisnstūra 444×777 diagonāle iet caur $10 \cdot 111 = 1110$ rūtiņām.



2. att.

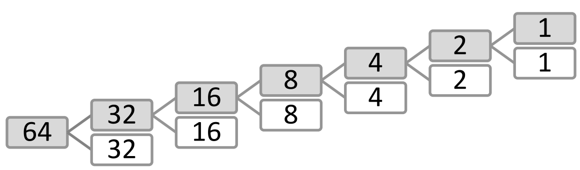
6.4. Sākumā auzu pārslu batoniņš veikalā maksāja 50 centus. Pēc atlaides piešķiršanas visus šādus veikalā esošos auzu pārslu batoniņus pārdeva par 31 eiro un 93 centiem. Cik procentu atlaidi piešķīra, ja zināms, ka tā nepārsniedz 50%?

Atrisinājums. Visus veikalā esošos auzu pārslu batoniņus pārdeva par 3193 centiem. Sadalot šo skaitli reizinātājos, iegūstam $3193 = 31 \cdot 103$, kur skaitļi 31 un 103 ir pirmskaitļi. Tā kā piešķirtā atlaide nepārsniedz 50%, tad jaunā batoniņa cena nav mazāka kā 25 centi, bet ir mazāka nekā 50 centi. Vienīgais šāds skaitļa 3193 dalītājs ir skaitlis 31. Tātad batoniņa jaunā cena ir 31 cents un batoniņa cena tika pazemināta par $50 - 31 = 19$ centiem. Tas nozīmē, ka cenas samazinājums attiecībā pret sākotnējo cenu ir 19 pret $50 = \frac{19}{50} = \frac{38}{100} = 38\%$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka auzu pārslu batoniņam piešķīra 38% atlaidi.

6.5. Laboratorijā 64 mēģenēs atrodas siekalu paraugi (siekalu daudzums paraugā ir pietiekams vairākām pārbaudēm). Zināms, ka viens paraugs ir inficēts ar vīrusu. Laborantam ir 6 testa trauki, kuros var ieliet siekalas no mēģenēm, un 6 reaģenti, ko pieliet testa traukā izveidotajam siekalu maisījumam (tiklīdz reaģentu ielej testa traukā, tas uzrāda vai neuzrāda vīrusa klātbūtni, un pēc tam kļūst neaktīvs). Kā, izmantojot 6 testa traukus un 6 reaģentus, noskaidrot, kurā paraugā ir vīruss?

Atrisinājums. Pirmajā pārbaudē laborantam vienā traukā jāsajauc nedaudz siekalu no 32 mēģenēm. Ja reaģents uzrāda, ka šajā traukā ir vīruss, tad vīruss ir kādā no 32 mēģenēm, no kurām tika paņemts nedaudz siekalu, ja nē – tad vienā no 32 pārējām mēģenēm. Tālāk laborants darbosies tikai ar tām 32 mēģenēm, no kurām vienā ir vīruss, pārējās noliks prom. Laborants atkal vienā traukā sajauc nedaudz siekalu no 16 mēģenēm. Tādā veidā pēc otrās pārbaudes ir noskaidrotas 16 mēģenes, no kurām vienā ir vīruss. Līdzīgi pēc trešās pārbaudes atrod 8 mēģenes, pēc ceturtās – 4 mēģenes, pēc piektās- 2 mēģenes un pēc sestās – vienu meklēto mēģeni, kurā ir vīruss.

(Shematiski mēģeņu dalīšana divās grupās parādīta 3. att., iekrāsojums apzīmē tās mēģenes, no kurām vienā ir vīruss.)



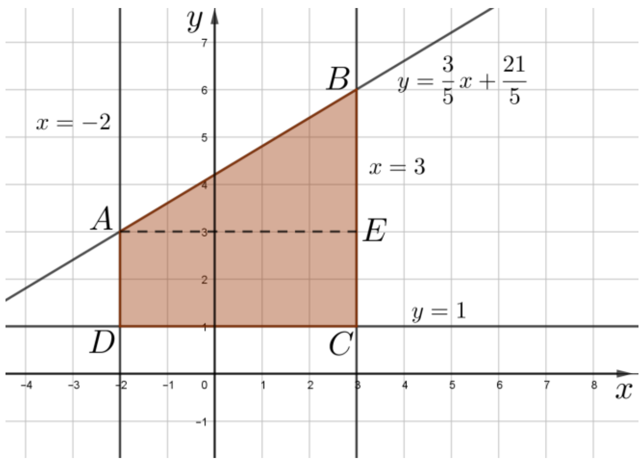
3. att.

Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

7. klase

7.1. Aprēķināt laukumu četrstūrim, kuru ierobežo taisnes $y = 1,\ x = -2,\ x = 3,\ y = \frac{3}{5}x + \frac{21}{5}$.

Atrisinājums. Koordinātu plaknē uzzīmējam dotās taisnes un iekrāsojam četrstūri $ABCD$, ko tās ierobežo (skat. 4. att.). Ievērojam, ka četrstūra $ABCD$ laukumu var izteikt kā taisnstūra $AECD$ un trijstūra ABE laukumu summu. Tā kā $CD = 5$ un $EC = 2$, tad $S(AECD) = CD \cdot EC = 5 \cdot 2 = 10$ laukuma vienības. Trijstūris AEB ir puse no taisnstūra, tāpēc $S(AEB) = \frac{1}{2}AE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7{,}5$ laukuma vienības. Līdz ar to $S(ABCD) = 10 + 7{,}5 = 17{,}5$ laukuma vienības.



4. att.

7.2. Vai visi naturāli skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 27, arī paši dalās ar 27?

Atrisinājums. Nē, piemēram, skaitļa 9981 ciparu summa ir 27, tātad tā dalās ar 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās, jo $9981 : 27 = 369, atl. 18$.

7.3. Dots trijstūris ABC un punkts M trijstūra iekšpusē. Pierādīt, ka $MA + MB + MC > \frac{1}{2}P_{ABC}$.

Atrisinājums. Izmantojot trijstūra nevienādību katrā trijstūrī (skat. 5. att.), iegūstam:

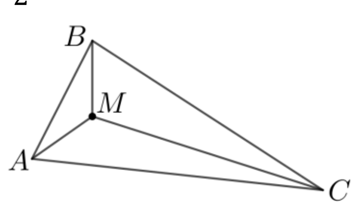
- $AM + MB > AB$ (no ΔAMB);
- $BM + CM > BC$ (no ΔBMC);
- $CM + MA > AC$ (no ΔAMC).

Līdz ar to katru trijstūra ABC malu varam aizstāt ar divu nogriežņu summu, kas ir lielāka nekā attiecīgās malas garums:

$$P_{ABC} = AB + BC + AC < AM + MB + BM + CM + CM + MA = 2MA + 2MB + 2MC.$$

Dalot abas nevienādības puses ar 2, iegūstam prasīto:

$$\frac{1}{2}P_{ABC} < MA + MB + MC.$$



5. att.

7.4. Pansionātam ir astoņi stāvi un tajā ir trīs lifti. Katrs lifts apstājas pirmajā stāvā, astotajā stāvā un vēl četros citos stāvos. Vai liftu apstāšanos var izkārtot tā, lai pansionāta iemītnieki no katra stāva var nokļūt jebkurā citā stāvā bez pārkāpšanas citā liftā?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, liftu apstāšanās var būt tāda kā 6. att., kur ar "x" atzīmēti stāvi, kuros lifts apstājas.

Stāvs	1. lifts	2. lifts	3. lifts
8.	x	x	x
7.		x	x
6.		x	x
5.	x	x	
4.	x	x	
3.	x		x
2.	x		x
1.	x	x	x

6. att.

7.5. Gustavs, Ernests un Miķelis spēlē badmintonu. Katrā spēlē piedalās divi no viņiem, bet trešais stāv malā un vēro. Tas, kurš kādā spēlē zaudējis, iet malā un dod vietu tam zēnam, kurš šīs spēles laikā skatījies. Zināms, ka Gustavs piedalījies 7 spēlēs, bet Ernests – 15 spēlēs. Cik spēļu pavisam tika izspēlētas? Kas uzvarēja un kas zaudēja septītajā spēlē?

Atrisinājums. No katrām divām pēc kārtas ņemtām spēlēm Gustavs vismaz vienā piedalījās. Tāpēc spēļu skaits nepārsniedz $2 \cdot 7 + 1 = 15$ un var būt tikai tad, ja Gustavs piedalījies 2., 4., 6., 8., 10., 12., 14. spēlē un visās šajās spēlēs zaudējis. Tā kā Ernests ir piedalījies 15 spēlēs, tad pavisam notika 15 spēles. Tātad spēļu skaits ir 15, un Ernests uzvarējis pirmajās četrpadsmit no tām (citādi viņš nebūtu piedalījies visās spēlēs). Tātad septītajā spēlē noteikti uzvarēja Ernests, bet zaudēja Miķelis.

Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

8. klase

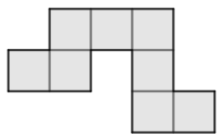
8.1. Kurš no reizinājumiem $2^{56} \cdot 7^{14}$ vai $3^{28} \cdot 5^{21}$ ir lielāks?

Atrisinājums. Lielāks ir reizinājums $2^{56} \cdot 7^{14}$. Pārveidojam abus reizinājumus, izmantojot pakāpju īpašības:

- $2^{56} \cdot 7^{14} = (2^8)^7 \cdot (7^2)^7 = (2^8 \cdot 7^2)^7 = (256 \cdot 49)^7 = 12544^7$;
- $3^{28} \cdot 5^{21} = (3^4)^7 \cdot (5^3)^7 = (3^4 \cdot 5^3)^7 = (81 \cdot 125)^7 = 10125^7$.

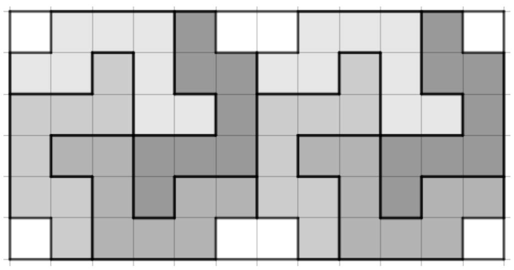
Tā kā pirmā skaitļa bāze ir lielāka $12544 < 10125$, bet kāpinātāji abiem skaitļiem ir vienādi, tad lielāks ir pirmais reizinājums.

8.2. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×12 rūtiņas var izgriezt astoņas 7. att. redzamās figūras?



7. att.

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 8. att.

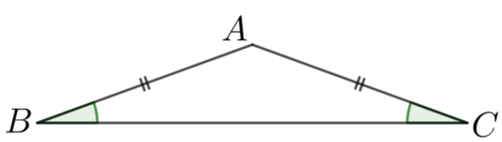


8. att.

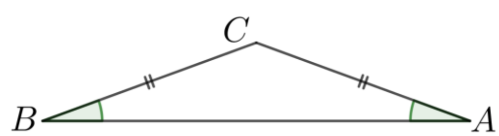
8.3. Dots platleņķa vienādsānu trijstūris, kuram $\sphericalangle ABC = 20°$. Pierādīt, ka $3AC > AB$.

Atrisinājums. Trijstūra virsotnes leņķis nevar būt $20°$, jo tad leņķi pie pamata būtu $(180° - 20°) : 2 = 80°$ un trijstūris nebūtu platleņķa. Apskatām abus iespējamos virsotņu izkārtojumus.

1. Ja $AB = AC$ (skat. 9. att.), tad $3AC = 3AB > AB$.
2. Ja $BC = AC$ (skat. 10. att.), tad $3AC > 2AC = BC + AC > AB$.



9. att.



10. att.

8.4. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt **a)** 2022, **b)** 2025?

Atrisinājums. a) Nē, nevar būt. Apzīmējam piecus secīgos skaitļus ar $n-2$; $n-1$; n; $n+1$; $n+2$. Šo skaitļu summa ir $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 5n$. Tā kā 2022 nedalās ar 5, tad piecu secīgu skaitļu summa nevar būt 2022.

b) Jā, var, šie pieci skaitļi ir 403; 404; 405; 406; 407.

8.5. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi (katrā gājienā var izsvītrot jebkuru no palikušajiem skaitļiem). Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Pierādīt, ka, lai kā arī spēlētu pirmais spēlētājs, otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt!

Atrisinājums. Aprakstīsim, kā jārīkojas otrajam spēlētājam. Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem:

$$(1;2),\qquad (3;4),\qquad \ldots,\qquad (2021;2022).$$

Ja pirmais spēlētājs izsvītro skaitli, tad otrais spēlētājs izsvītro to skaitli, kas ir vienā pārī ar pirmā spēlētāja izsvītroto skaitli. Tā spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr izjauc pirmā spēlētāja nodomu, jo beigās paliks divi skaitļi no viena pāra, kas atšķiras par 1, bet šādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Latvijas 72. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9.1. Kādām reālām m vērtībām vienādojumam $2x^2 + (2m+3)x + 3m = 0$ ir vismaz viena vesela sakne?

Atrisinājums. Pamatosim, ka dotajam vienādojumam ir vesela sakne tikai tad, ja m ir vesels skaitlis.
Izmantojot formulu $D = b^2 - 4ac$, iegūstam, ka dotā vienādojuma diskriminants ir

$$D = (2m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3m = 4m^2 + 12m + 9 - 24m = 4m^2 - 12m + 9 = (2m-3)^2.$$

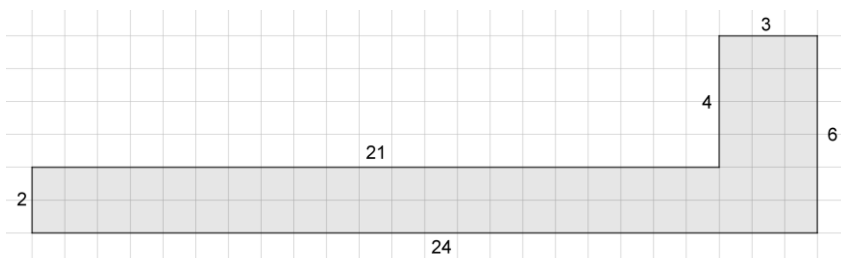
Izmantojot formulu $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, izsakām dotā vienādojuma saknes: $x_{1;2} = \frac{-2m-3 \pm |2m-3|}{2a}$. Iegūstam, ka vienādojuma viena sakne ir $x_1 = \frac{-2m-3+2m-3}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$, bet otra sakne $x_2 = \frac{-2m-3-2m+3}{4} = \frac{-4m}{4} = -m$. Ja m ir vesels skaitlis, tad vismaz viena no dotā vienādojuma saknēm ir vesels skaitlis. Ja m nav vesels skaitlis, tad abas vienādojuma saknes nav veseli skaitļi.

Piezīme. Vienādojuma saknes var atrast arī ekvivalenti pārveidojot vienādojuma kreiso pusi:

$$2x^2 + (2m+3)x + 3m = 2x^2 + 2mx + 3x + 3m = (m+x)(2x+3).$$

9.2. Vai rūtiņu lapā, kur katras rūtiņas malas garums ir viena vienība, var uzzīmēt tādu sešstūri, kura malas sakrīt ar rūtiņu līnijām un kura perimetrs un laukums ir 60?

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 1. att., kur sešstūra perimetrs $P = 2 + 21 + 4 + 3 + 6 + 24 = 60$ un laukums $S = 2 \cdot 24 + 3 \cdot 4 = 60$.

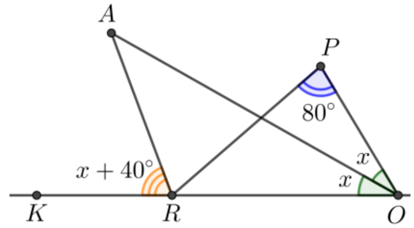


1. att.

9.3. Punkts R ir nogriežņa KO iekšējs punkts, punkts P izvēlēts tā, ka $\sphericalangle RPO = 80°$. Leņķu KRP un KOP bisektrises krustojas punktā A. Aprēķināt $\sphericalangle RAO$.

Atrisinājums. Apzīmēsim $\sphericalangle AOP = x$ (skat. 2. att.), tad arī $\sphericalangle AOR = x$, jo AO ir leņķa POR bisektrise.

Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi, tāpēc $\sphericalangle KRP = 2x + 80°$. Tā kā AR ir leņķa KRP bisektrise, tad $\sphericalangle KRA = \sphericalangle ARP = x + 40°$. Ievērojam, ka $\sphericalangle KRA$ ir trijstūra RAO ārējais leņķis, tāpēc $\sphericalangle KRA = x + \sphericalangle RAO$. Līdz ar to $\sphericalangle RAO = \sphericalangle KRA - x = x + 40° - x = 40°$.



2. att.

9.4. Pierādīt, ka katru 11 pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 12^4.

Atrisinājums. Skaitli 12^4 varam izteikt kā $12^4 = (4 \cdot 3)^4 = 2^8 \cdot 3^4$. Tātad jāpierāda, ka jebkuru 11 pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar $3^4 \cdot 2^8$. Ievērojam, ka katrs otrais no pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem dalās ar 2 (ir pāra skaitlis), katrs trešais – dalās ar 3, katrs ceturtais – dalās ar 4 utt.

Tas nozīmē, ka no 11 pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem vismaz 5 ir pāra skaitļi, no kuriem vismaz divi dalās ar 4 un no kuriem viens dalās ar 8, tātad šo piecu pāra skaitļu reizinājums dalās ar $8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$. Tā kā no 11 pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem vismaz trīs dalās ar 3, no kuriem viens dalās ar 9, tad to reizinājums dalās ar $9 \cdot 3 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Tātad šo 11 skaitļu reizinājums dalās ar $2^8 \cdot 3^4 = 12^4$.

9.5. Dota 3×3 rūtiņu tabula. Vai iespējams katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība nepārsniedz **a)** 2, **b)** 3?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka prasītais nav iespējams.

Ja prasītais būtu iespējams, tad skaitlim 1 blakus rūtiņās (rūtiņās, kurām ir kopīga mala) varētu atrasties tikai skaitļi 2 un 3. Tas nozīmētu, ka skaitlim 1 jāatrodas kādā no stūra rūtiņām (piemēram, skat. 3. att.), jo visām citām rūtiņām ir vairāk nekā divas rūtiņas, ar kurām tām ir kopīga mala. Vienīgie skaitļi, kas varētu atrasties skaitlim 2 blakus rūtiņās, ir 1, 3 un 4. Taču tā kā skaitļi 1 un 3 jau ir ierakstīti tabulā, tad nevar aizpildīt abas 3. att. iekrāsotās rūtiņas. Līdz ar to esam pamatojuši, ka prasītais nav iespējams.

1	2	
3		

3. att.

b) Jā, piemēram, skat. 4. att.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4. att.

10.1. Doti punkti $A(21;1)$, $B(20;22)$ un $C(10;2)$. Uzrakstīt vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu C paralēli taisnei AB.

1. atrisinājums. Taisnes AB vienādojums ir formā $y = kx + b$. Ievietojot šajā vienādojumā punktu A un B koordinātas, iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 = 21k + b \\ 22 = 20k + b \end{cases}$$

Atņemot no pirmā vienādojuma otro, iegūstam, ka taisnes AB virziena koeficients $k = -21$. Tātad šai taisnei paralēlas taisnes vienādojumu var uzrakstīt formā $y = -21x + b$, jo paralēlām taisnēm ir vienādi virziena koeficienti. Ievietojot punkta C koordinātas, iegūstam, ka $b = 2 + 21 \cdot 10 = 212$. Tātad vienādojums taisnei, kas iet caur punktu C paralēli taisnei AB, ir $y = -21x + 212$.

2. atrisinājums. Uzrakstām taisnes AB vienādojumu caur diviem tās punktiem: $\frac{x-21}{20-21} = \frac{y-1}{22-1}$. Iegūstam $21(x-21) = -1(y-1)$ jeb $y = -21x + 442$. Šīs taisnes virziena koeficients $k = -21$. Tātad šai taisnei paralēlas taisnes vienādojumu var uzrakstīt formā $y = -21x + b$, jo paralēlām taisnēm ir vienādi virziena koeficienti. Ievietojot punkta C koordinātas, iegūstam, ka $b = 2 + 21 \cdot 10 = 212$. Tātad vienādojums taisnei, kas iet caur punktu C paralēli taisnei AB, ir $y = -21x + 212$.

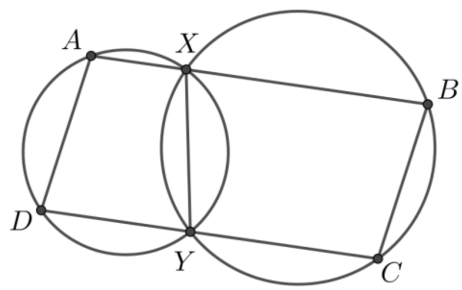
Piezīme. Uzdevumā taisnes AB vienādojums nav obligāti jāiegūst, pietiek atrast taisnes AB virziena koeficientu, piemēram, $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

10.2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$.

Atrisinājums. Uzminam, ka $x = 2$ ir dotā vienādojuma sakne, jo $8 - 16 + 8 = 0$. Izdalot polinomus (skat. 5. att.), iegūstam $(x-2)(x^2 - 2x - 4) = 0$.

$$\begin{array}{l}
-\,(x^3 - 4x^2 + 8) : (x-2) = x^2 - 2x - 4 \\
\quad \underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad -\,\;-2x^2 + 8 \\
\qquad\quad \underline{-2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad -\,\;-4x + 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

5. att.



6. att.

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x - 2 = 0$ vai $x^2 - 2x - 4 = 0$. Vienādojumu $x^2 - 2x - 4 = 0$ risinām, atrodot diskriminantu $D = 4 + 16 = 20$, tad $x_{2;3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$. Tātad esam ieguvuši, ka dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = 2$ un $x_{2;3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

10.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos X un Y. Caur punktu X novilkta taisne t, kas vēlreiz krusto riņķa līnijas ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos A un B, caur punktu Y paralēli t novilkta taisne, kas vēlreiz krusto riņķa līnijas ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos D un C. Pierādīt, ka $ABCD$ ir paralelograms.

Atrisinājums. Tā kā hordas AX un DY ir paralēlas (skat. 6. att.), tad riņķa līnijas loki starp šīm hordām ir vienādi, tas ir, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{XY}$. Tas nozīmē, ka arī $\overset{\frown}{ADY} = \overset{\frown}{XYD}$ un vienādi ir arī ievilktie leņķi, kas balstās uz šiem lokiem, tas ir, $\sphericalangle DAX = \sphericalangle AXY$. Tā kā $\sphericalangle AXY = 180° - \sphericalangle YXB$ kā blakusleņķi un arī $\sphericalangle BCY = 180° - \sphericalangle YXB$, jo ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, tad $\sphericalangle DAX = \sphericalangle BCY$.

Analoģiski iegūstam, ka $\sphericalangle ADY = \sphericalangle DYX = 180° - \sphericalangle XYC = \sphericalangle XBC$.

Tā kā četrstūra $ABCD$ pretējie leņķi ir pa pāriem vienāda lieluma, tad tas ir paralelograms, kas arī bija jāpierāda.

10.4. **a)** Pierādīt, ka katram pirmskaitlim $p > 3$ eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $p^2 = 24n + 1$.

b) Atrast tādu saliktu skaitli k, kuram eksistē tāds naturāls skaitlis m, ka izpildās $k^2 = 24m + 1$.

Atrisinājums. a) Vienādību $p^2 = 24n + 1$ pārveidojam formā $n = \frac{p^2-1}{24}$. Pierādīsim, ka katram pirmskaitlim p, kas lielāks nekā 3, skaitlis $(p^2 - 1)$ dalās ar 24, tādā gadījumā n vienmēr būs naturāls skaitlis.

Tā kā $24 = 3 \cdot 8$ un abi šie skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi, tad jāpierāda, ka $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ dalās ar 3 un 8.

No trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem $p - 1; p; p + 1$ viens noteikti dalās ar 3. Tā kā p ir pirmskaitlis un $p > 3$, tad p ar 3 nedalās. Līdz ar to ar 3 dalās vai nu $(p - 1)$, vai $(p + 1)$. Tas nozīmē, ka $(p^2 - 1)$ dalās ar 3.

Tā kā gan $(p - 1)$, gan $(p + 1)$ ir pāra skaitļi, tad tie abi dalās ar 2, pie tam viens no tiem dalās ar 4 (katrs otrais pāra skaitlis dalās ar 4). Tas nozīmē, ka reizinājums $(p - 1)(p + 1)$ dalās ar 8.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $(p^2 - 1)$ dalās gan ar 3, gan ar 8, tas nozīmē, ka tā dalās arī ar 24.

b) Der, piemēram, $k = 25$, jo $25^2 = 24 \cdot 26 + 1$.

Piezīme. b) gadījumā, lai atrastu skaitli k, var izmantot a) gadījumā izmantotos spriedumus, tas ir, meklēt k kā saliktu nepāra skaitli, kas nedalās ar 3.

10.5. Vai izteiksmē $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm 119 \pm 120$ katru "$\pm$" zīmi iespējams aizstāt vai nu ar "+", vai "−" tā, lai izteiksmes vērtība būtu **a)** 2023, **b)** 2022? Ja jā, tad kāds ir lielākais iespējamais "+" zīmju skaits attiecīgajā izteiksmē?

Atrisinājums. Apzīmēsim ar P – visu skaitļu summu, kuri ir ar "+" zīmi un ar M – visu to pozitīvo skaitļu summu, pirms kuriem ir "−" zīme. Tad iegūtās izteiksmes vērtība ir vienāda ar $P - M$. Ievērojam, ka $P + M = 1 + 2 + 3 + \cdots + 120 = \frac{(1+120)\cdot 120}{2} = 7260$.

a) Pamatosim, ka iegūtās izteiksmes vērtība nevar būt 2023.

Tā kā $P + M = 7260$, tad abi skaitļi P un M ir ar vienādu paritāti, tas ir, vai nu abi ir pāra skaitļi, vai arī abi ir nepāra skaitļi. Bet tādā gadījumā to starpība $(P - M)$ ir pāra skaitlis, tātad tas nevar būt 2023.

b) Jā, prasītais ir iespējams. Lielākais iespējamais "+" zīmju skaits ir 95, piemēram,

$$+1 + 2 + \cdots + 14 - 15 + 16 + 17 + \cdots + 96 - 97 - 98 - \cdots - 120 = 2022,$$

tas ir, $\frac{(1+96)\cdot 96}{2} - 15 - 15 - \frac{(97+120)\cdot 24}{2} = 4656 - 30 - 2604 = 2022$.

Pamatosim, ka vairāk "+" zīmes nav iespējamas. Saskaitot vienādojumus

$$\begin{cases} P - M = 2022 \\ P + M = 7260 \end{cases}$$

iegūstam $2P = 9282$ jeb $P = 4641$. Tad no sistēmas otrā vienādojuma iegūstam, ka $M = 7260 - 4641 = 2619$.

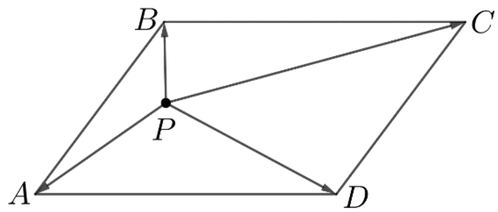
Ja būtu 96 (vai vairāk) "+" zīmes, tad P būtu lielāks vai vienāds ar mazāko 96 naturālo skaitļu summu. Bet tā ir $1 + 2 + \cdots + 95 + 96 = \frac{(1+96)\cdot 96}{2} = 4656$, kas ir lielāka nekā $P = 4641$. (Šāds novērtējums var palīdzēt atrast arī augstāk redzamo piemēru. Ja ar "+" zīmi būtu pirmie 95 skaitļi, tad $P = 1 + 2 + \cdots + 95 = \frac{(1+95)\cdot 95}{2} = 4560$. Tā kā nepieciešams, lai P būtu 4641, tātad šī summa jāpalielina par 81. Lai to izdarītu, pietiek šai summai pievienot 96 un no tās izņemt 15 (ir, protams, arī citi varianti).

11.1. Punkts P atrodas paralelograma $ABCD$ iekšpusē. Pierādīt, ka $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

Atrisinājums. Apskatām patvaļīgu punktu P (skat. 7. att.). Pierādāmā vienādība ir ekvivalenta ar vienādību $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}=\vec{0}$. Pārveidosim šīs vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DP}=\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}\right)=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.



7. att.

11.2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $x^4-4=3(x^3+x^2+x)$.

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādojumu $x^4-3x^3-3x^2-3x-4=0$.

Uzminam, ka $x=-1$ ir vienādojuma sakne, jo $1+3-3+3-4=0$. Izdalot polinomus (skat. 8. att.), iegūstam $(x+1)(x^3-4x^2+x-4)=0$.

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka $x+1=0$ vai $x^3-4x^2+x-4=0$. Lineārā vienādojuma sakne ir $x=-1$, bet trešās pakāpes vienādojumu risinām ar grupēšanas paņēmienu:

$$x^2(x-4)+(x-4)=0,$$

$$(x-4)(x^2+1)=0.$$

Tātad $x=4$, bet vienādojumam $x^2=-1$ reālu sakņu nav.

Līdz ar to dotā vienādojuma saknes ir $x_1=-1$ un $x_2=4$.

$$\begin{array}{l}
-\,(x^4-3x^3-3x^2-3x-4):(x+1)=x^3-4x^2+x-4 \\
\quad \underline{x^4+x^3} \\
\quad -\quad -4x^3-3x^2-3x-4 \\
\qquad \underline{-4x^3-4x^2} \\
\qquad -\quad x^2-3x-4 \\
\qquad\quad \underline{x^2+x} \\
\qquad\quad -\quad -4x-4 \\
\qquad\qquad \underline{-4x-4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

8. att.

Piezīme. Vienādojumu var risināt arī ekvivalenti to pārveidojot:

$$x^4-1=3(x^3+x^2+x)+3;$$

$$x^4-1=3(x^3+x^2+x+1);$$

$$(x^2-1)(x^2+1)=3(x+1)(x^2+1).$$

11.3. Trapeces $ABCD$ pamati ir AB un CD. Diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Pierādīt, ka $S_{ABE} \cdot S_{ABCD} = S_{ABC}^2$!

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka $S_{AED} = S_{BEC}$ (skat. 9. att.). Tā kā trapeces pamati ir paralēli, tad $S_{ACD} = S_{BCD}$, jo trijstūriem ir kopīga mala CD un augstumi pret šo malu ir vienāda garuma. No abām vienādības pusēm atņemot trijstūra DEC laukumu, iegūstam, ka $S_{ACD} - S_{DEC} = S_{BCD} - S_{DEC}$ no kā izriet, ka $S_{AED} = S_{BEC}$.

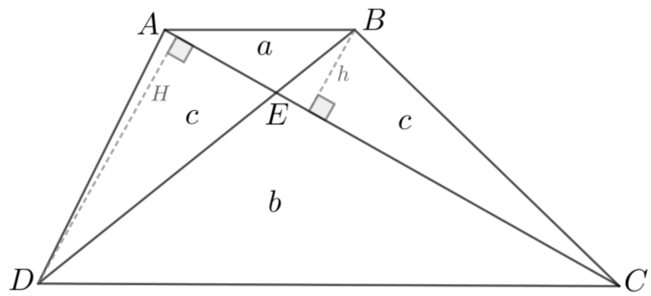
Apzīmējam $S_{AED} = S_{BEC} = c$, $S_{ABE} = a$ un $S_{DEC} = b$. Tādā gadījumā $S_{ABC} = a + c$ un $S_{ABCD} = a + b + 2c$.

Apzīmējam attālumu no virsotnes B līdz malai AC ar h un attālumu no virsotnes D līdz malai AC ar H un apskatām laukumu attiecību:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{AED}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot h}{\frac{1}{2}AE \cdot H} = \frac{h}{H} \quad \text{un} \quad \frac{S_{EBC}}{S_{EDC}} = \frac{\frac{1}{2}EC \cdot h}{\frac{1}{2}EC \cdot H} = \frac{h}{H}.$$

Tātad $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ no kā iegūstam, ka $ab = c^2$. Līdz ar to

$$S_{ABE} \cdot S_{ABCD} = a(a + b + 2c) = a^2 + ab + 2ac = a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2 = S_{ABC}^2.$$



9. att.

11.4. Zināms, ka x un y ir naturāli skaitļi un $x + y$ dalās ar 5. Pierādīt, ka $x^5 + y^5$ dalās ar 25.

Atrisinājums. Apskatām izteiksmi $(x + y)^5$ un to ekvivalenti pārveidojam:

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = (x^5 + y^5) + 5xy(x^3 + y^3) + 10x^2y^2(x + y) =$$
$$= (x^5 + y^5) + 5xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 10x^2y^2(x + y) =$$
$$= (x^5 + y^5) + 5xy(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2xy).$$

Izsakot $x^5 + y^5$, iegūstam

$$x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5(x + y)xy(x^2 + xy + y^2).$$

Tā kā pēc dotā $x + y$ dalās ar 5, tad izteiksmes labajā pusē abi saskaitāmie dalās ar 25, tātad izteiksmes labā puse dalās ar 25. Līdz ar to arī izteiksmes kreisajai pusei jādalās ar 25.

11.5. Pierādīt, ka visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2022 iespējams sakārtot rindā tā, ka katri divi blakus esoši skaitļi atšķiras vai nu par 6, vai par 11.

Atrisinājums. Vispirms parādīsim, ka prasītajā veidā ir iespējams sakārtot skaitļus no 1 līdz 17:

6 12 1 7 13 2 8 14 3 9 15 4 10 16 5 11 17

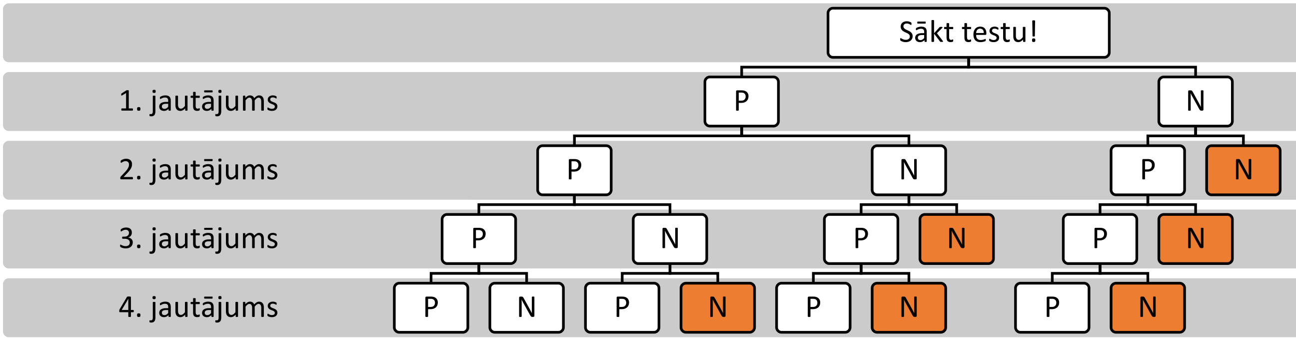
6 11 6 6 11 6 6 11 6 6 11 6 6 11 6 6

Ievērojam, ka, visiem šiem skaitļiem pieskaitot 17, iegūsim derīgu skaitļu grupu, kurā būs visi skaitļi no 18 līdz 34. Tā kā pirmais skaitlis šajā grupā būs $6 + 17 = 23$, tad starpība starp pirmās grupas pēdējo un otrās grupas pirmo skaitli ir 6, kas nozīmē, ka, uzrakstot otro grupu tieši aiz pirmās, esam ieguvuši korektu virkni, kurā ir visi skaitļi no 1 līdz 34. Līdzīgi turpinot, iegūsim derīgas virknes, kuru pēdējais loceklis ir $17n$, kur $n \in \mathbb{N}$.

Tā kā $2022 : 17 = 118, atl. 16$, tad 119. skaitļu grupa beidzas ar $119 \cdot 17 = 2023$. Uzrakstot pēdējā skaitļu grupā visus skaitļus bez šī pēdējā skaitļa 2023, būsim ieguvuši visu skaitļu no 1 līdz 2022 sakārtojumu rindā ar nepieciešamajām īpašībām.

12.1. Tiešsaistes testā ir četri jautājumi, kurus izpilda secīgi un uzreiz tiek paziņots, vai iesniegtā atbilde ir pareiza. Uz katru jautājumu iespējamas tikai divas atbildes, no kurām viena ir pareiza, bet otra nav pareiza. Tiklīdz sniegtas nepareizas atbildes uz diviem jautājumiem, sistēma testa izpildi pārtrauc un tests nav ieskaitīts. Ja ir vismaz trīs pareizas atbildes, tests ir ieskaitīts. Kāda ir varbūtība, ka tests tiks ieskaitīts, atbildes minot?

1. atrisinājums. Uzzīmējam koka diagrammu, kas ilustrē testa izpildi (skat. 10. att.).



10. att.

Redzam, ka testam ir 5 labvēlīgi iznākumi. Kopējais iznākumu skaits ir $2^4 = 16$, jo katram no četriem jautājumiem ir iespējami divi atbilžu varianti. Tātad varbūtība, ka tests tiks ieskaitīts, atbildes minot, ir $\frac{5}{16}$.

2. atrisinājums. Lai vienkāršotu situāciju, atmetam nosacījumu, ka pie divām nepareizām atbildēm tests tiek pārtraukts. Šādā gadījumā (tā kā ir divas nepareizas atbildes) tests tāpat nebūs ieskaitīts, tāpēc neko nemainīs tas, ja tests tiks izpildīts līdz galam (tas ir, atbildēti visi 4 jautājumi).

Tā kā ir 4 jautājumi, tad kopā ir $2^4 = 16$ dažādi atbilžu komplekti (uz katru jautājumu – divi varianti). No tiem derīgi ir tikai tie, kuros ir 1 nepareiza atbilde (4 varianti) vai 0 nepareizas atbildes (1 variants). Tātad kopumā ir derīgi 5 no 16 atbilžu komplektiem, un varbūtība, ka tests tiks ieskaitīts, ir $\frac{5}{16}$.

12.2. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$.

1. atrisinājums. Uzminam, ka $x = 1$ ir dotā vienādojuma sakne, jo $4 - 11 + 9 - 2 = 0$. Izdalot polinomus (skat. 11. att.), iegūstam $(x-1)(4x^3 + 4x^2 - 7x + 2) = 0$.

Uzminam, ka $x = -2$ ir vienādojuma $4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$ sakne. Izdalot polinomus (skat. 12. att.), iegūstam $(x+2)(4x^2 - 4x + 1) = 0$.

$$
\begin{array}{l}
(4x^4 - 11x^2 + 9x - 2) : (x - 1) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 \\
-\ \underline{4x^4 - 4x^3} \\
\qquad 4x^3 - 11x^2 + 9x - 2 \\
\qquad -\ \underline{4x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad -7x^2 + 9x - 2 \\
\qquad\qquad -\ \underline{-7x^2 + 7x} \\
\qquad\qquad\qquad 2x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad -\ \underline{2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

11. att.

$$
\begin{array}{l}
(4x^3 + 4x^2 - 7x + 2) : (x + 2) = 4x^2 - 4x + 1 \\
-\ \underline{4x^3 + 8x^2} \\
\qquad -4x^2 - 7x + 2 \\
\qquad -\ \underline{-4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad x + 2 \\
\qquad\qquad -\ \underline{x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

12. att.

Līdz ar to dotais vienādojums ir pārveidojams formā $(x-1)(x+2)(2x-1)^2 = 0$.

Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$.

2. atrisinājums. Uzminam, ka $x = 1$ ir vienādojuma sakne, jo $4 - 11 + 9 - 2 = 0$, un ka $x = -2$ ir sakne, jo $4 \cdot 16 - 44 - 18 - 2 = 0$. Tātad vienādojuma kreisā puse dalās ar $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$. Izdalot polinomus (skat. 13. att.), iegūstam $(x-1)(x+2)(4x^2 - 4x + 1) = 0$ jeb $(x-1)(x+2)(2x-1)^2 = 0$.
Katru reizinātāju pielīdzinot nullei, iegūstam, ka dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{l}
-\,(4x^4 - 11x^2 + 9x - 2) : (x^2 + x - 2) = 4x^2 - 4x + 1 \\
\quad \underline{4x^4 + 4x^3 - 8x^2} \\
\qquad -\,-4x^3 - 3x^2 + 9x - 2 \\
\qquad\quad \underline{-4x^3 - 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad -\,x^2 + x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 + x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

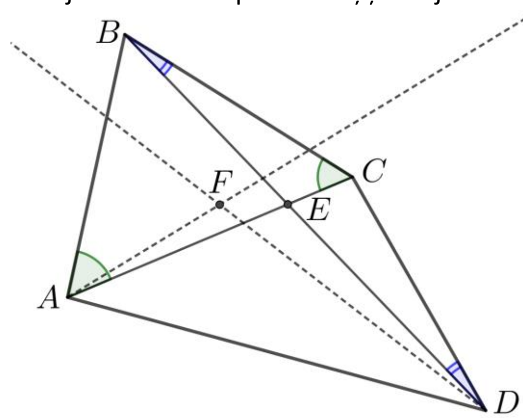
13. att.

12.3. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram $AB = BC = CD$. Četrstūra diagonāles krustojas punktā E. Pierādīt, ka leņķu BAD un ADC bisektrišu krustpunkts atrodas uz trijstūrim ADE apvilktās riņķa līnijas.

Atrisinājums. Bisektrišu krustpunktu apzīmējam ar F (skat. 14. att.). Apzīmējam $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \alpha$ un $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = \beta$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī BAC un BCD. Tad $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle ACB - \sphericalangle CBD = 180° - \alpha - \beta$.
No četrstūra $ABCD$ iekšējo leņķu summas iegūstam

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = 360° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCD = 360° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 2(\alpha + \beta).$$

Tad pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle FAD + \sphericalangle FDA = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA) = \alpha + \beta$. No trijstūra AFD iegūstam, ka $\sphericalangle AFD = 180° - (\sphericalangle FAD + \sphericalangle FDA) = 180° - \alpha - \beta$.
Tātad divi vienlieli leņķi $\sphericalangle AED$ un $\sphericalangle AFD$ balstās uz viena nogriežņa AD. Līdz ar to ap četrstūri $AFED$ var apvilkt riņķa līniju, un esam pierādījuši, ka uz trijstūrim ADE apvilktās riņķa līnijas atrodas arī punkts F.



14. att.

12.4. Pierādīt, ka $p^4 - 1$ dalās ar 240 katram pirmskaitlim $p \geq 7$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $240 = 3 \cdot 5 \cdot 16$. Pārveidojam doto izteiksmi:

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1).$$

Tā kā visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 2, ir nepāra skaitļi, tad visi trīs reizinātāji ir pāra skaitļi, tātad katrs no tiem dalās ar 2. Ņemot vērā, ka $p - 1$ un $p + 1$ ir divi secīgi pāra skaitļi, tad viens no tiem dalās ar 4. Līdz ar to $p^4 - 1$ dalās ar $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

Pirmskaitlis $p \geq 7$ nedalās ar 3, tātad vai nu $p - 1$, vai $p + 1$ dalās ar 3, jo $p - 1$, p un $p + 1$ ir trīs secīgi skaitļi. Līdz ar to $p^4 - 1$ dalās ar 3.

Jebkurš pirmskaitlis, kas lielāks nekā 5, dalot ar 5, dod atlikumu atšķirīgu no 0. Apskatām visus iespējamos gadījumus:

- ja p atlikums, dalot ar 5, ir 1, tad pirmskaitlis p ir uzrakstāms formā $p = 5k + 1$ un $p - 1 = 5k + 1 - 1 = 5k$, kas dalās ar 5;
- ja p atlikums, dalot ar 5, ir 2, tad pirmskaitlis p ir uzrakstāms formā $p = 5k + 2$ un $p^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$, kas dalās ar 5;
- ja p atlikums, dalot ar 5, ir 3, tad pirmskaitlis p ir uzrakstāms formā $p = 5k + 3$ un $p^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 10 = 5(5k^2 + 4k + 2)$, kas dalās ar 5;
- ja p atlikums, dalot ar 5, ir 4, tad pirmskaitlis p ir uzrakstāms formā $p = 5k + 4$ un $p + 1 = 5k + 5$, kas dalās ar 5.

  Tātad $p^4 - 1$ dalās ar 5.

Esam ieguvuši, ka $p^4 - 1$ dalās ar 3, 5 un 16. Tā kā šie skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $p^4 - 1$ dalās ar 240.

Piezīmes

1. Pierādīt, ka $p^4 - 1$ dalās ar 5, var izmantojot kongruences:
   - ja $p \equiv 1 \pmod 5$, tad $p^4 - 1 \equiv 1^4 - 1 \equiv 0 \pmod 5$;
   - ja $p \equiv 2 \pmod 5$, tad $p^4 - 1 \equiv 2^4 - 1 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 5$;
   - ja $p \equiv 3 \pmod 5$, tad $p^4 - 1 \equiv 3^4 - 1 \equiv 80 \equiv 0 \pmod 5$;
   - ja $p \equiv 4 \pmod 5$, tad $p^4 - 1 \equiv 4^4 - 1 \equiv 255 \equiv 0 \pmod 5$.
2. Lai pierādītu, ka $n^4 - 1$ dalās ar 5, var izmantot arī mazo Fermā teorēmu: ja skaitlis a nedalās ar pirmskaitli n, tad $a^{n-1} - 1$ dalās ar n.

12.5. Sākumā turzā ir 89 konfektes. Karlsons un Brālītis pēc kārtas ēd no turzas konfektes. Pirmais sāk Karlsons un apēd vienu konfekti, bet katrā nākamajā gājienā spēlētājs var apēst tikpat konfektes, cik savā iepriekšējā gājienā apēda otrs, vai arī par vienu konfekti vairāk. Zaudē tas, kurš vairs nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – Karlsons vai Brālītis – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Karlsons vienmēr var uzvarēt. Lai to izdarītu, viņam savā otrajā gājienā jāapēd divas konfektes, trešajā – trīs, ceturtajā – četras, ..., devītajā – deviņas konfektes. Tātad, ja Brālītis savā gājienā apēdamo konfekšu skaitu palielina par viens, tad Karlsons apēdamo konfekšu skaitu nepalielina, un otrādi.

Novērtēsim, cik konfekšu būs apēstas pēc Karlsona devītā gājiena (kad Brālītis būs izdarījis 8 gājienus, bet Karlsons – 9 gājienus). Karlsons būs apēdis $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ konfektes. Brālītis savā pirmajā gājienā būs apēdis 1 vai 2 konfektes, otrajā – 2 vai 3, trešajā – 3 vai 4, ..., astotajā – 8 vai 9 konfektes. Tātad mazākais skaits konfekšu, ko viņš var apēst, ir $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ konfektes, bet lielākais Brālīša apēsto konfekšu skaits var būt $2 + 3 + 4 + \ldots + 9 = 44$ konfektes. Tātad abi kopā viņi būs apēduši 81 līdz 89 konfektes un turzā būs atlikušas 0 līdz 8 konfektes. Tā kā gājiens ir Brālītim un viņam ir jāņem 9 vai 10 konfektes, tad viņš savu gājienu izdarīt vairs nevar, jo nepietiek konfekšu, un zaudē.