Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 5.-8. klasei

5. klase

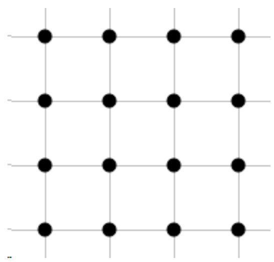
5.1. Parādi vienu veidu, kādu ciparu var ierakstīt katrā aplītī, lai iegūtu patiesu vienādību, visi pieci ierakstītie cipari būtu dažādi un neviens no tiem nebūtu 2.

$$2\bigcirc \cdot 2\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

Atrisinājums. Der, piemēram, $23 \cdot 26 = 598$.

Piezīme. Der arī $26 \cdot 29 = 754$.

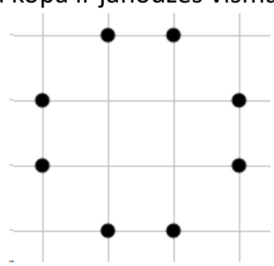
5.2. Uz rūtiņu lapas rūtiņu krustpunktos atzīmēti 16 punkti (skat. 1. att.). Kāds mazākais skaits punktu jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes?



1. att.

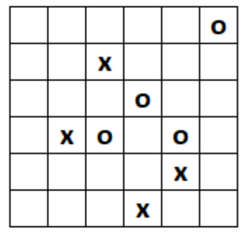
Atrisinājums. Mazākais punktu, ko jānodzēš, skaits ir 8, piemēram, skat. 2. att.

Pamatosim, ka mazāk punktu nodzēst nav iespējams. Katrā rindā ir jānodzēš vismaz divi punkti (citādi būs taisne, uz kuras atrodas trīs punkti), tātad kopā ir jānodzēš vismaz 8 punkti.



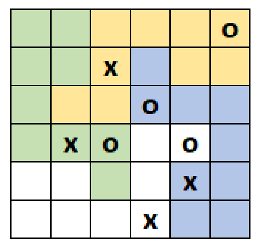
2. att.

5.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas, kurā dažas rūtiņas atzīmētas ar "o" un "x" (skat. 3. att.). Parādi, kā šo kvadrātu sagriezt pa rūtiņu līnijām četrās vienādās daļās tā, lai katra daļa saturētu vienu rūtiņu, kurā ierakstīts "o", un vienu rūtiņu, kurā ierakstīts "x"!
Piezīme. Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



3. att.

Atrisinājums. Skat. 4. att.



4. att.

5.4. Rindā uzrakstīti 2024 skaitļi. Zināms, ka pirmais uzrakstītais skaitlis ir 41 un katru nākamo var iegūt, iepriekšējā skaitļa visu ciparu reizinājumam pieskaitot 23 (piemēram, otrais uzrakstītais skaitlis ir 27, jo $4 \cdot 1 + 23 = 27$). Kāds ir pēdējais uzrakstītais skaitlis?
Atrisinājums. Pēdējais skaitlis ir 29. Aprēķinām pirmos dotās virknes skaitļus:

$$\underline{41;\ 27;\ 37;\ 44;\ 39;\ 50;\ 23;\ 29};\ 41;\ 27;\ 37;\ \ldots$$

Ievērojam, ka, sākot ar 9. virknes locekli, skaitļi sāk periodiski atkārtoties, perioda garums ir 8 skaitļi. Tā kā 2024 dalās ar 8 ($2024 : 8 = 253$), tad 2024. skaitlis būs tāds pats, kā 8. skaitlis, tātad 29.

5.5. Ja automātā iemet divus vienādus žetonus, tad tas izdod vienu zaļu žetonu, bet, ja iemet divus dažādus žetonus, tad tas izdod vienu dzeltenu žetonu. Sākumā Dagmārai bija 20 dzelteni un 15 zaļi žetoni. Vai iespējams, ka pēc atkārtotas automāta izmantošanas viņai palika: **a)** divi zaļi un viens dzeltens žetons, **b)** divi dzelteni un viens zaļš žetons?
Atrisinājums. a) Nē, tas nav iespējams. Ievērosim, ka pēc katras darbības dzelteno žetonu skaits vai nu nemainās (tas notiek gadījumos, kad automātā iemet divus zaļus žetonus vai vienu zaļu un vienu dzeltenu žetonu) vai arī samazinās par 2 (tas notiek, ja automātā iemet divus dzeltenus žetonus). Tā kā sākumā dzelteno žetonu skaits bija pāra skaitlis, tad arī pēc jebkuras darbības tas būs pāra skaitlis. Tātad nav iespējams, ka dzelteno žetonu skaits ir 1 (kas ir nepāra skaitlis).
b) Jā, ir iespējams. Dagmāra varēja rīkoties šādi: vispirms 9 reizes iemest automātā 2 dzeltenus žetonus (un saņemt vienu zaļu), pēc 9 šādām darbībām viņai paliktu 24 zaļi žetoni un 2 dzelteni žetoni. Pēc tam 23 reizes jāiemet automātā 2 zaļus žetonus, katru reizi automāts atdotu 1 zaļu žetonu, kā rezultātā zaļo žetonu skaits katrā reizē samazinātos par 1. Tātad beigās viņai paliktu 2 dzelteni žetoni un 1 zaļš žetons.

6. klase

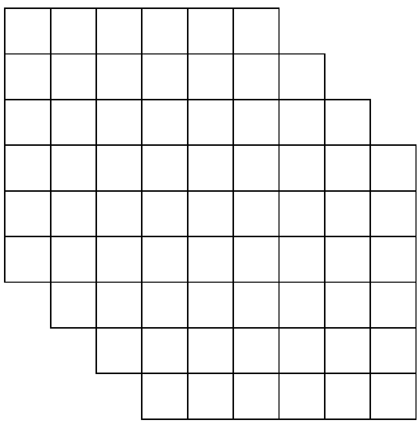
6.1. Parādi vienu veidu, kādu ciparu var ierakstīt katrā aplītī, lai iegūtu patiesu vienādību, visi seši ierakstītie cipari būtu dažādi un neviens no tiem nebūtu 3.

$$3\bigcirc \cdot 3\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

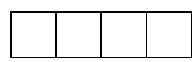
Atrisinājums. Der, piemēram, $34 \cdot 37 = 1258$.

Piezīme. Der arī $37 \cdot 38 = 1406$.

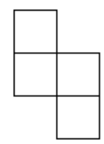
6.2. Kāds ir lielākais skaits 7. att. doto figūru, ko var izgriezt no 5. att. dotās figūras, ja jābūt izgrieztām arī tieši divām 6. att. figūrām?



5. att.



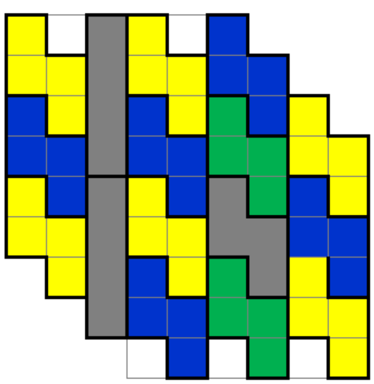
6. att.



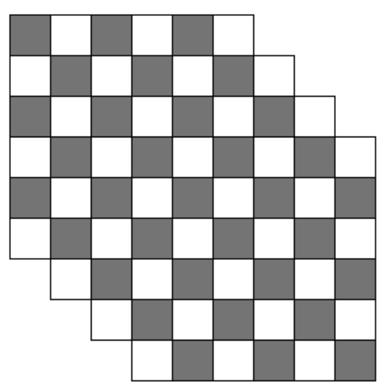
7. att.

Atrisinājums. Lielākais skaits figūru ir 14, piemēram, skat. 8. att. Pamatosim, ka vairāk 7. att. figūru nevar izgriezt.

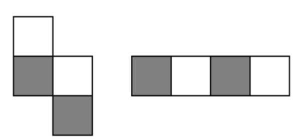
Iekrāsojot 5. att. figūru šaha galdiņa veidā, iegūstam 33 pelēkas rūtiņas un 36 baltas rūtiņas (skat. 9. att.). Lai kā izgrieztu 6. att. un 7. att. dotās figūras, tās vienmēr noklāj tieši 2 pelēkas rūtiņas (skat. 10. att.). Tas nozīmē, ka no 5. att. dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā 16 figūras, jo 17 figūras noklātu jau $17 \cdot 2 = 34$ pelēkās rūtiņas. Tā kā jāizgriež divas 6. att. figūras, tad 7. att. figūras var izgriezt ne vairāk kā 14.



8. att.

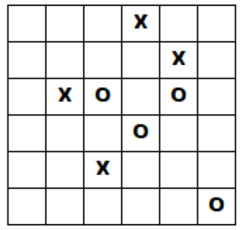


9. att.



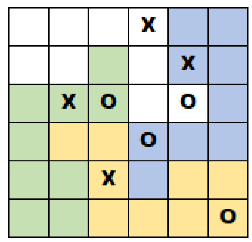
10. att.

6.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas, kurā dažas rūtiņas atzīmētas ar “o” un “x” (skat. 11. att.). Parādi, kā šo kvadrātu sagriezt pa rūtiņu līnijām četrās vienādās daļās tā, lai katra daļa saturētu vienu rūtiņu, kurā ierakstīts “o”, un vienu rūtiņu, kurā ierakstīts “x”!
Piezīme. Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



11. att.

Atrisinājums. Skat. 12. att.



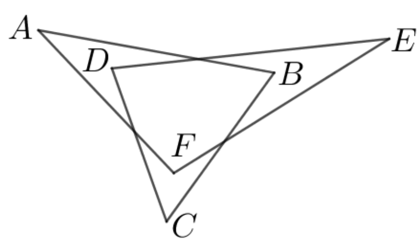
12. att.

6.4. Rindā uzrakstīti 2024 skaitļi. Zināms, ka pirmais uzrakstītais skaitlis ir 49 un katru nākamo var iegūt, iepriekšējā skaitļa visu ciparu reizinājumam pieskaitot 19 (piemēram, otrais uzrakstītais skaitlis ir 55, jo $4 \cdot 9 + 19 = 55$). Kāds ir pēdējais uzrakstītais skaitlis?
Atrisinājums. Pēdējais uzrakstītais skaitlis ir 37. Aprēķinām pirmos dotās virknes skaitļus:

49; 55; 44; <u>35; 34; 31; 22; 23; 25; 29; 37; 40; 19, 28</u>, 35, 34, 31, ...

Ievērojam, ka, sākot ar 15. virknes locekli, skaitļi sāk periodiski atkārtoties, perioda garums ir 11. Tā kā 2024 dalās ar 11 ($2024 = 11 \cdot 184$), tad 2024. skaitlis būs tāds pats, kā 11. skaitlis, tātad 37.
Piezīme. Var arī spriest, ka meklē virknes, kas sākas ar skaitli 35 (noņemot dotās virknes pirmos trīs skaitļus), pēdējo skaitli. Tādā gadījumā $2021 : 11 = 183, \mathrm{A}\,8$, tāpēc meklētais skaitlis ir perioda 8. skaitlis un tas ir 37.

6.5. Vai var uzzīmēt tādu slēgtu lauztu līniju no **a)** 6 posmiem, **b)** 7 posmiem, kas katru savu posmu krusto tieši vienu reizi?
Piezīme. Par lauztu līniju sauc līniju, kas sastāv no galīga skaita taisnes nogriežņiem, ko sauc par posmiem. Lauztu līniju, kuras galapunkti sakrīt, sauc par slēgtu lauztu līniju.
Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 13. att.



13. att.

b) Nē, nevar. Ievērosim, ka šādas lauztās līnijas posmus var sadalīt pa pāriem, katrā pāri saliekot divus posmus, kas krustojas. Tātad šādas lauztas līnijas posmu skaitam jābūt pāra skaitlim, bet 7 ir nepāra skaitlis.

7. klase

7.1. Katrā tukšajā aplītī ierakstīt vienu darbību zīmi (+, –, ·, :) tā, lai taisnstūros iegūtās izteiksmju vērtības būtu naturāli skaitļi un visas sešas kopā saturētu visus ciparus no 1 līdz 9, katru ciparu tieši vienu reizi! (Iekavas lietot nedrīkst un jāievēro darbību secība.)

9	◯	8	◯	7	=	☐
◯		◯		◯		
6	◯	5	◯	4	=	☐
◯		◯		◯		
3	◯	2	◯	1	=	☐
=		=		=		
☐		☐		☐		

Atrisinājums. Skat. 14. att.

9	·	8	+	7	=	79
+		–		–		
6	·	5	+	4	=	34
+		+		–		
3	+	2	+	1	=	6
=		=		=		
18		5		2		

14. att.

7.2. Kāda lielākā ciparu summa var būt desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 18?

Atrisinājums. Lielākā iespējamā ciparu summa ir 81. Tāda ir, piemēram, skaitlim 9999999990, tas dalās, gan ar 9, gan ar 2, tātad tas dalās arī ar $9 \cdot 2 = 18$.

Pamatosim, ka lielāka ciparu summa nav iespējama. Lai skaitlis dalītos ar 18, tam jādalās arī ar 9, tātad tā ciparu summai jādalās ar 9. Lielākā iespējamā desmitciparu skaitļa ciparu summa ir $9 \cdot 10 = 90$. Tāda ciparu summa ir tikai skaitlim 9999999999, tomēr tas nedalās ar 18. Nākamā lielākā iespējamā ciparu summa ir $90 - 9 = 81$ (kas dalās ar 9), tātad tā ir meklētā ciparu summa.

7.3. Plaknē atlikti četri punkti A, B, C, D. Zināms, ka $AB = 4$, $BC = 7$, $CD = 10$ un $DA = 3$. Kāds var būt nogriežņa AC garums, ja zināms, ka tas ir naturāls skaitlis?

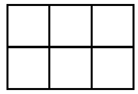
Atrisinājums. No trijstūra nevienādības ΔABC un ΔADC (pieļaujot, ka punkti atrodas arī uz vienas taisnes) attiecīgi iegūstam:

- $AC \leq AB + BC = 4 + 7 = 11$ un $AC \geq BC - AB = 7 - 4 = 3$;
- $AC \leq AD + DC = 3 + 10 = 13$ un $AC \geq CD - AD = 10 - 3 = 7$.

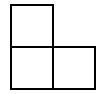
Tātad $AC \geq 7$ un $AC \leq 11$. Šiem nosacījumiem atbilst naturālie skaitļi 7; 8; 9; 10 un 11.

Tā kā dotajiem nogriežņu garumiem un nogriežņu garumiem 8; 9; 10 izpildās trijstūra nevienādības nosacījumi, tad šādas AC vērtības ir iespējamas. Nogriežņa AC garums var būt 11, tad punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes (tieši šādā secībā), bet punkts D neatrodas uz šīs taisnes (ΔADC eksistē, jo tā malu garumiem izpildās trijstūra nevienādība). Nogriežņa AC garums var būt 7, tad punkti C, A, D atrodas uz vienas taisnes (tieši šādā secībā), bet punkts B neatrodas uz šīs taisnes (ΔABC eksistē, jo tā malu garumiem izpildās trijstūra nevienādība).

7.4. No 15. att. un 16. att. figūrām, katru izmantojot vismaz vienu reizi, salikt taisnstūri, kurā 16. att. figūras nesaskaras ne ar malu, ne ar stūri! Figūras drīkst pagriezt.

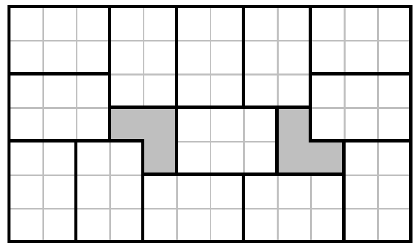


15. att.



16. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 17. att.



17. att.

7.5. Konditorejā nopērkamas 10 tortes, to cena ir attiecīgi 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29 eiro (katra torte ir tieši vienā eksemplārā). Konditorejā viens pēc otra iegriezās 3 gardēži, katrs no tiem nopirka sev dažas tortes, turklāt katrs iztērēja ne vairāk kā 85 eiro. Pierādīt, ka pēc gardēžu apmeklējuma vismaz viena torte vēl palika nenopirkta!

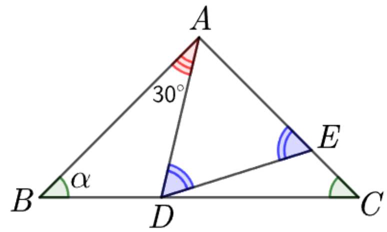
1. atrisinājums. Ievērosim, ka katrs gardēdis varēja nopirkt ne vairāk kā 3 tortes, jo pat 4 vislētākās tortes kopā maksā 86 eiro $(20+21+22+23=86)$. Tātad visi trīs gardēži kopā varēja nopirkt ne vairāk kā $3 \cdot 3 = 9$ tortes, tātad vismaz viena torte palika nenopirkta.

2. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka trīs gardēži kopā nopirkuši visas tortes. Tad pēc Dirihlē principa var atrast gardēdi, kurš ir nopircis vismaz 4 tortes. Bet pat 4 vislētākās tortes kopā maksā $20+21+22+23=86$, kas ir vairāk nekā katrs gardēdis ir iztērējis (85 eiro). Tātad kopā nopirka ne vairāk kā $3 \cdot 3 = 9$ tortes, līdz ar to vismaz viena torte palika nenopirkta.

8. klase

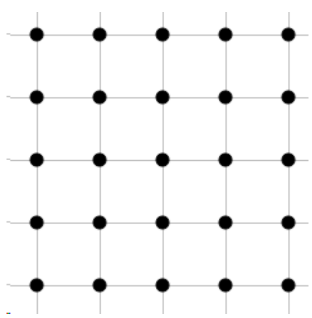
8.1. Vai iespējams, sareizinot sešus dažādus pirmskaitļus, iegūt sešciparu skaitli, kam visi cipari ir vienādi?
Atrisinājums. Jā, var, piemēram, der sešciparu skaitlis $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Piezīme. Der arī skaitlis $555555 = 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

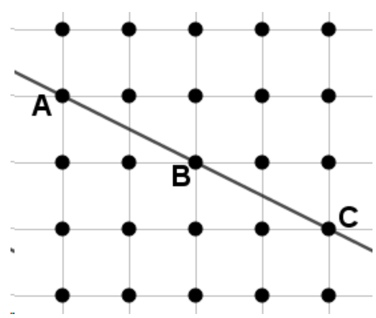
8.2. Vienādsānu trijstūrī ABC ($AB = AC$) uz malām BC un AC atlikti attiecīgi punkti D un E tā, lai $AE = AD$ un $\sphericalangle BAD = 30°$. Aprēķināt leņķi CDE.
Atrisinājums. Tā kā $AB = AC$, tad $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$ (skat. 18. att.). No trijstūra ABC iekšējo leņķu summas iegūstam, ka $\sphericalangle BAC = 180° - 2 \cdot \sphericalangle B = 180° - 2\alpha$. Tātad $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAD = 180° - 2\alpha - 30° = 150° - 2\alpha$. Tā kā $AD = AE$, tad trijstūris ADE ir vienādsānu un $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = (180° - \sphericalangle DAE) : 2 = \left(180° - (150° - 2\alpha)\right) : 2 = 15° + \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle DEC = 180° - \sphericalangle AED = 180° - (15° + \alpha) = 165° - \alpha$. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu ΔDEC, iegūstam, ka $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle DEC - \sphericalangle ECD = 180° - (165° - \alpha) - \alpha = 15°$.



18. att.

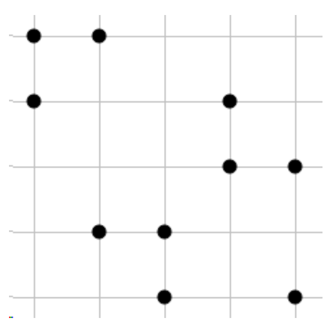
8.3. Uz rūtiņu lapas rūtiņu krustpunktos atzīmēti 25 punkti (skat. 19. att.). Kāds mazākais skaits punktu jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes?
Piezīme. Ievēro, ka uz vienas taisnes atrodas ne tikai punkti, kas atrodas vienā rindā, kolonnā vai diagonālē, bet arī, piemēram, punkti A, B, C (skat. 20. att.)!


19. att.



20. att.

Atrisinājums. Mazākais punktu, ko jānodzēš, skaits ir 15, piemēram, skat. 21. att.
Pamatosim, ka mazāk punktu nodzēst nav iespējams. Katrā rindā ir jānodzēš vismaz trīs punkti (citādi būs taisne, uz kuras atrodas trīs punkti), tātad kopā ir jānodzēš vismaz 15 punkti.

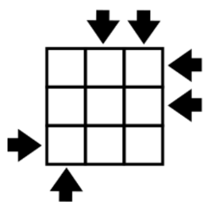

21. att.

8.4. Konditorejā nopērkamas 16 tortes, to cena ir attiecīgi 30; 31; 32; ...; 45 eiro (katra torte ir tieši vienā eksemplārā). Konditorejā viens pēc otra iegriezās 5 gardēži, katrs no tiem nopirka sev dažas tortes, turklāt katrs iztērēja ne vairāk kā 125 eiro. Pierādīt, ka pēc gardēžu apmeklējuma vismaz viena torte vēl palika nenopirkta!

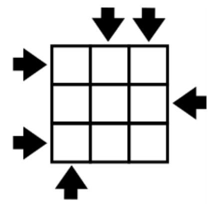
1. atrisinājums. Ievērosim, ka katrs gardēdis varēja nopirkt ne vairāk kā 3 tortes, jo pat 4 vislētākās tortes kopā maksā 126 eiro ($30+31+32+33=126$). Tātad visi trīs gardēži kopā varēja nopirkt ne vairāk kā $3\cdot 5=15$ tortes, tātad vismaz viena torte palika nenopirkta.

2. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka trīs gardēži kopā nopirkuši visas tortes. Tā kā $16=5\cdot 3+1$, tad pēc Dirihlē principa var atrast gardēdi, kurš ir nopircis vismaz 4 tortes. Bet pat 4 vislētākās tortes kopā maksā $30+31+32+33=126$, kas ir vairāk nekā katrs gardēdis ir iztērējis (125 eiro). Tātad kopā nopirka ne vairāk kā $3\cdot 5=15$ tortes, līdz ar to vismaz viena torte palika nenopirkta.

8.5. Vai **a)** 22. att., **b)** 23. att. dotā kvadrāta rūtiņās var ierakstīt deviņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rūtiņā būtu ierakstīts viens skaitlis un katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi pieaugtu bultiņas norādītajā virzienā?

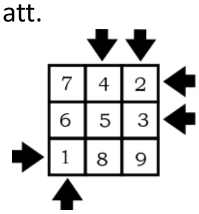


22. att.



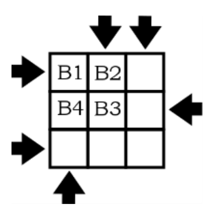
23. att.

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 24. att.



24. att.

b) Nē, nevar. Aplūkosim rūtiņas $\mathrm{B1}, \mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \mathrm{B4}$ (skat. 25. att.). Ņemot vērā bultiņu virzienu, skaitļiem jābūt sakārtotiem šādi: $\mathrm{B1}<\mathrm{B2}<\mathrm{B3}<\mathrm{B4}<\mathrm{B1}$. Tā kā skaitlis nevar būt mazāks pats par sevi, tad šāds skaitļu izvietojums nav iespējams.



25. att.