Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

5.1. Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1. att.) vienu skaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās trīs blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu 223. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

			19				20					

1. att.

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt, kā parādīts 2. att., kur katru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir 51.

19	20	12	19	20	12	19	20	12	19	20	12	19

2. att.

Piezīme. Paskaidrosim, kā šos skaitļus var atrast. Aplūkojam četras rūtiņas pēc kārtas, kurās ierakstīti skaitļi x; a; b un y (skat. 3. att.).

x	a	b	y

3. att.

Tā kā katrās trijās blakus rūtiņās skaitļu summa ir viena un tā pati, tad $x+a+b=a+b+y$, tātad $x=y$ un rūtiņās x un y jābūt ierakstītam vienam un tam pašam skaitlim. Tātad rūtiņās ierakstītie skaitļi atkārtojas ar periodu 3 (skat. 4. att.), kur n ir kāds nezināms skaitlis (visur viens un tas pats).

19	20	n	19	20	n	19	20	n	19	20	n	19

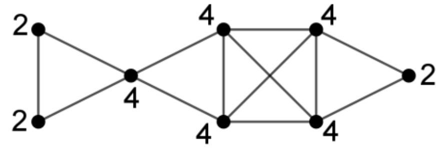
4. att.

Ja mēs noņemam nost pašu pēdējo skaitli 19, tad mēs iegūstam, ka četros trīs rūtiņu blokos $(19;\ 20;\ n)$ kopā skaitļu summa ir $223-19=204$, tātad vienā šādā blokā $(19;\ 20;\ n)$ skaitļu summa ir $204:4\ =\ 51$. Tātad skaitļa n vietā jāraksta $51-19-21=12$.

5.2. Rūķīši mežā ir uzbūvējuši astoņas mājiņas un starp tām izveidojuši vairākas taciņas. Katra taciņa savieno divas mājiņas, taciņas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **a)** 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4 taciņas; **b)** 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5 taciņas?

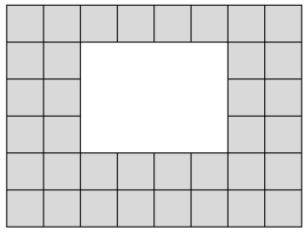
Atrisinājums. a) Jā, piemēram, skat. 5. att., kur ar punktiem attēlotas mājiņas, bet ar līnijām attēlotas taciņas un pie katra punkta pierakstīts no tā izejošo līniju skaits.

b) Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet pēc dotā iegūstam, ka ir $1+2+2+2+2+3+4+5=21$ taciņu gali. Tā kā 21 ir nepāra skaitlis, tad prasītais nav iespējams.



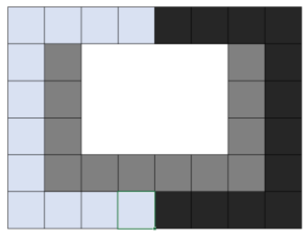
5. att.

5.3. Parādi, kā 6. att. figūru (6×8 rūtiņu taisnstūris, no kura izgriezts 3×4 rūtiņu taisnstūris), griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt trīs vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



6. att.

Atrisinājums. Skat. 7. att.



7. att.

5.4. Parādi, kā skaitli 174 var uzrakstīt kā 3 dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitļu summa dalītos ar trešo skaitli!

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt šādi: $174 = 29 + 58 + 87$. Pārbaudām, ka katru divu šo skaitļu summa dalās ar trešo skaitli:

- $(29 + 58) : 87 = 87 : 87 = 1$;
- $(29 + 87) : 58 = 116 : 58 = 2$;
- $(58 + 87) : 29 = 145 : 29 = 5$.

5.5. Ja automātā ievieto sarkanu monētu, tad tas izdod 5 zilas monētas, bet, ja automātā ievieto zilu monētu, tad tas izdod 3 sarkanas monētas. Vai, atkārtoti izmantojot automātu, ir iespējams iegūt vienāda skaita sarkanās un zilās monētas, ja sākumā ir dota viena sarkana monēta?

Atrisinājums. Nē, tas nav iespējams. Ievērosim, ka sākumā ir dota viena monēta un ar katru darbību monētu skaits palielinās par 4 monētām (ja ievieto 1 sarkanu monētu, tad izdod 5 zilas monētas) vai 2 monētām (ja ievieto 1 zilu monētu, tad izdod 3 sarkanas monētas), tātad kopējais monētu skaits vienmēr būs nepāra skaitlis. Bet, ja zilās un sarkanās monētas būtu vienādā skaitā, tad kopējais monētu skaits būtu pāra skaitlis. Tātad prasītais nav iespējams.

6.1. Atrodi vienu veidu, kādi naturāli skaitļi jāievieto x, y un z vietā, lai vienādība $2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}=\frac{37}{13}$ būtu patiesa!

Atrisinājums. Der vērtības $x=1$; $y=5$ un $z=2$. Ar šīm vērtībām vienādība ir patiesa, jo

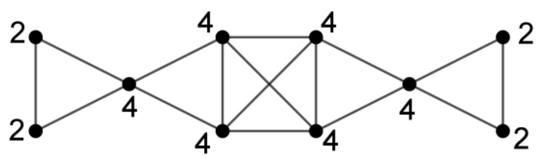
$$2+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{11}}=2+\frac{1}{1\frac{2}{11}}=2+\frac{11}{13}=2\frac{11}{13}=\frac{37}{13}.$$

Piezīme. Parādīsim, kā var iegūt prasītās vērtības. Ievērojam, ka $\frac{37}{13}=2\frac{11}{13}$, tātad $\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}=\frac{11}{13}$, no kā iegūstam, ka $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{13}{11}$. Tā kā $\frac{13}{11}=1\frac{2}{11}$, tad $x=1$ un $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{2}{11}$, no kā iegūstam, ka $y+\frac{1}{z}=\frac{11}{2}$. Ievērojot, ka $\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$, iegūstam, ka $y=5$ un $z=2$.

6.2. Rūķīši mežā ir uzbūvējuši desmit mājiņas un starp tām izveidojuši vairākas taciņas. Katra taciņa savieno divas mājiņas, taciņas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **a)** 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 7 taciņas; **b)** 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4 taciņas?

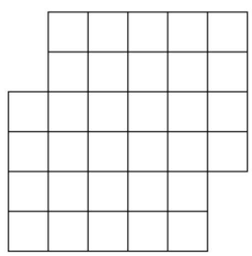
Atrisinājums. a) Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet no dotā iegūstam, ka $2+2+2+2+2+3+3+3+3+7=29$ taciņu gali. Tā kā 29 ir nepāra skaitlis, tad prasītais nav iespējams.

b) Jā, piemēram, skat. 8. att., kur ar punktiem attēlotas mājiņas, bet ar līnijām attēlotas taciņas un pie katra punkta pierakstīts no tā izejošo līniju skaits.



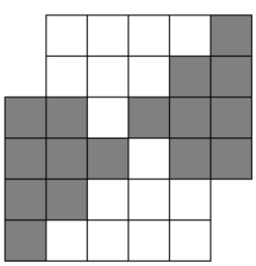
8. att.

6.3. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 9. att. doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras pilnīgi sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).

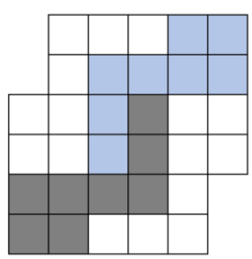


9. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 10. att. vai 11. att.



10. att.



11. att.

6.4. Vai skaitli: **a)** 72, **b)** 73 var izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitļu summa dalītos ar atlikušo skaitli?

Atrisinājums. a) Jā, var šādi $72 = 12 + 24 + 36$. Pārbaudām, vai katru divu šo skaitļu summa dalās ar trešo skaitli:

- $(12 + 24) : 36 = 36 : 36 = 1$;
- $(12 + 36) : 24 = 48 : 24 = 2$;
- $(24 + 36) : 12 = 60 : 12 = 5$.

b) Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja divu skaitļu a un b summa dalās ar kādu skaitli n, tad arī visu trīs šo skaitļu summa $a + b + n$ dalās ar skaitli n. Tātad visu trīs skaitļu summai jeb 73 jādalās ar jebkuru no trīs saskaitāmajiem. Bet skaitlis 73 ir pirmskaitlis, kas dalās tikai ar 1 un 73. Tātad šie trīs dažādie skaitļi var pieņemt tikai vērtības 1 vai 73, kas nav iespējams.

6.5. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2, kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus 0, 3, 6, 9 (varbūt tikai kādu no tiem). Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitļa 17 var iegūt: **a)** skaitli 1; **b)** skaitli 15?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, šādi:

$$17 \to 34 \to 4 \to 8 \to 16 \to 1.$$

b) Nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 17 nedalās ar 3. Ja skaitlis nedalās ar 3, tad, izpildot dotās darbības, iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3:

- ja skaitli, kas nedalās ar 3, reizina ar 2, tad arī iegūtais reizinājums nedalīsies ar 3;
- ja skaitlim, kas nedalās ar 3, izsvītro ciparu 0, 3, 6, 9, tad arī iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3 (sākotnējā skaitļa ciparu summa nedalās ar 3 (dalāmības pazīme ar 3), ja izsvītros 0, 3, 6, 9, tad arī iegūs ciparu summu, kas nedalās ar 3).

Tātad arī pēc vairākām operācijām iegūtais skaitlis nedalīsies ar 3. Tas nozīmē, ka skaitli 15 iegūt nevar, jo tas dalās ar 3.

7.1. Vai tukšajās rūtiņās (skat. 12. att.) var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 25 un katri divi skaitļi, kuru starpība ir 1, būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?

	6			
				24
			2	
	15			

12. att.

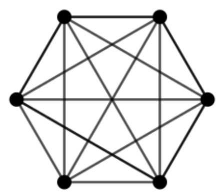
Atrisinājums. Jā, var, skat. 13. att.

7	**6**	5	4	25
8	11	12	3	**24**
9	10	13	**2**	23
16	**15**	14	1	22
17	18	19	20	21

13. att.

7.2. Vai **a)** 90 lampiņas, **b)** 73 lampiņas ar vadiem var savienot tā, lai katra no tām būtu savienota ar vadu ar tieši 5 citām lampiņām?

Atrisinājums. a) Jā, var. Sadalām 90 lampiņas 15 grupās pa 6 lampiņām katrā grupā. Katras grupas katras divas lampiņas savienojam ar vadu (skat. 14. att., kur lampiņas attēlotas ar punktiem un vadi ar nogriežņiem, kas šos punktus savieno). Šādā veidā katra no 90 lampiņām būs savienota ar tieši 5 citām lampiņām.

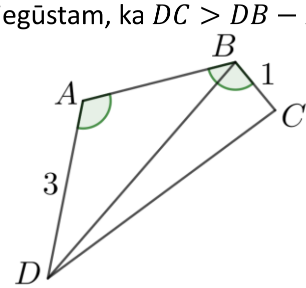


14. att.

b) Tā kā no katras lampiņas iziet 5 vadi, tad vadu galu skaits ir $73 \cdot 5 = 365$. Bet katram vadam ir 2 gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis. Tāpēc 73 lampiņas ar vadiem nevar savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota tieši ar 5 citām lampiņām.

7.3. Dots četrstūris $ABCD$, kuram visi leņķi ir mazāki nekā 180°, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $BC = 1$ un $AD = 3$. Pierādīt, ka $CD > 2$.

Atrisinājums. Novelkam nogriezni BD (skat. 15. att.). No dotā izriet, ka $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD$. Tā kā trijstūrī ABD pret lielāku leņķi atrodas garāka mala, tad $BD > AD = 3$.
No trijstūra nevienādības trijstūrī BCD iegūstam, ka $DC > DB - BC > 3 - 1 = 2$.



15. att.

7.4. Cik ir tādu naturālu skaitļu n, kuriem skaitlim n^2 ir tikpat ciparu, cik skaitlim n^3?

Atrisinājums. Ir trīs skaitļi, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, šie skaitļi ir 1; 2 un 4, jo $1^2 = 1^3 = 1$; $2^2 = 4$ un $2^3 = 8$ visi ir vienciparu skaitļi, un $4^2 = 16$ un $4^3 = 64$ abi ir divciparu skaitļi. Pamatosim, ka citu derīgu n vērtību nav.

Skaitlis 3 neder, jo $3^2 = 9$, bet $3^3 = 27$.

Skaitļu no 5 līdz 9 kvadrāti ir divciparu skaitļi, jo $5^2 = 25$ un $9^2 = 81$ abi ir divciparu, tātad arī skaitļu 6; 7; 8 kvadrāti ir divciparu skaitļi. Šo skaitļu kubi ir trīsciparu skaitļi, jo $5^3 = 125$ un $9^3 = 729$ abi ir trīsciparu, tātad pa vidu esošo skaitļu kubi arī ir trīsciparu skaitļi.

Skaitļiem, kas lielāki nekā 9, lai no skaitļa kvadrāta iegūtu skaitļa kubu, tie jāreizina ar pašu skaitli, tātad vismaz ar 10. Tādā gadījumā skaitļa kuba ciparu skaits ir vismaz par 1 lielāks nekā šī skaitļa kvadrāta ciparu skaits.

7.5. Kastē atrodas baltas, sarkanas un zaļas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izņemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti (vienmēr pietiek jebkuras krāsas lodīšu, ko ielikt kastē). Vai var panākt, ka kastē paliek tikai viena lodīte, ja sākumā kastē atrodas:

a) 10 baltas, 12 sarkanas un 16 zaļas lodītes;

b) 10 baltas, 12 sarkanas un 15 zaļas lodītes?

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Ar katru gājienu visu krāsu lodīšu skaita paritāte mainās (no pāra skaitļa uz nepāra skaitli un otrādi). Tāpēc nevaram iegūt situāciju, ka divi lodīšu skaiti ir 0 (pāra skaitlis), bet viens skaits ir 1 (nepāra skaitlis), jo sākumā visu krāsu lodīšu skaits ir pāra skaitlis.

b) Jā, var. Ar trīs pēc kārtas sekojošiem gājieniem ņemot balta-sarkana (apzīmēsim ar *bs*), balta-zaļa (apzīmēsim ar *bz*), sarkana-zaļa (apzīmēsim ar *sz*), katras krāsas lodīšu skaits samazinās par 1. Atkārtojot 9 reizes šādu gājienu trijniekus, iegūstam, ka kastē ir 1 balta, 3 sarkanas un 6 zaļas lodītes. Tālāk ar gājieniem *sz*, *sz*, *bz* izveidojam situāciju, ka kastē ir 2 baltas, 2 sarkanas un 3 zaļas lodītes. To ar gājieniem *bs*, *sz*, *bz*, *sz*, *bz*, *bs* pārveidojam par situāciju, kad kastē ir 0 baltas, 0 sarkanas un 1 zaļa lodīte.

8.1. Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. 16. att.) vienu pirmskaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu 127. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

		11										3		

16. att.

Atrisinājums. To var izdarīt, kā parādīts 17. att., kur katru četru pēc kārtas ierakstītu skaitļu summa ir 36.

3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11	17	3	5	11

17. att.

Piezīme. Paskaidrosim, kā šos skaitļus var atrast. Aplūkojam piecas rūtiņas pēc kārtas, kurās ierakstīti skaitļi x; a; b; c un y (skat. 18. att.).

x	a	b	c	y

18. att.

Tā kā katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa ir viena un tā pati, tad $x+a+b+c=a+b+c+y$, tātad $x=y$ un rūtiņās x un y jābūt ierakstītam vienam un tam pašam skaitlim. Tātad rūtiņās ierakstītie skaitļi atkārtojas ar periodu 4 (skat. 19. att.), kur m un n ir kādi vēl nezināmi pirmskaitļi.

3	m	11	n	3	m	11	n	3	m	11	n	3	m	11

19. att.

No tā, ka visu skaitļu summa ir 127 iegūstam, ka $4m+3n=127-(3+11)\cdot 4=71$, no kā iegūstam, ka $n=(71-4m):3$. Aplūkosim dažas iespējamās pirmskaitļa m vērtības, līdz iegūsim derīgu n vērtību:

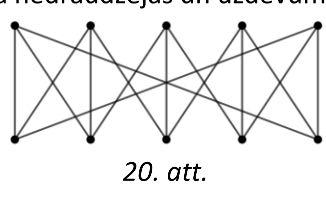
- ja $m=2$, tad $n=(71-8):3=21$ (nav pirmskaitlis);
- ja $m=3$, tad $n=(71-12):3=19\frac{2}{3}$ (nav pirmskaitlis);
- ja $m=5$, tad $n=(71-20):3=51:3=17$ (pirmskaitlis).

8.2. Pasākumā satikās m cilvēki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši 3 citiem cilvēkiem (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A). Zināms, ka no katriem trim cilvēkiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Vai var gadīties, ka **a)** $m=11$, **b)** $m=10$?

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Cilvēkus iedomāsimies kā punktus, bet draudzības kā nogriežņus, kas šos punktus savieno. Tā kā no katra punkta iziet tieši 3 nogriežņi un katru nogriezni ieskaitām divas reizes (nogrieznis AB un BA ir viens un tas pats nogrieznis), tad kopējais nogriežņu skaits ir $11\cdot 3:2=16{,}5$. Iegūta pretruna, jo nogriežņu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim.

Piezīme. Pretrunu var iegūt arī, ja skaita nogriežņu galus – tā kā no katra punkta iziet 3 nogriežņi, tad kopā ir $11\cdot 3=33$ nogriežņu gali, bet katram nogrieznim ir divi gali, tātad kopā jābūt pāra skaitam nogriežņu galu.

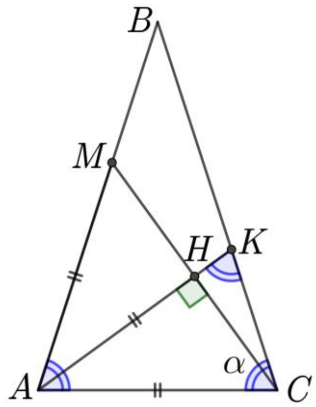
b) Jā, var gadīties, piemēram, skat. 20. att. Dotajā piemērā dalībnieki sadalīti divās grupās pa pieciem dalībniekiem tā, ka katrs pirmās grupas dalībnieks draudzējas ar tieši trīs dalībniekiem no otrās grupas, bet nedraudzējas ar nevienu savas grupas dalībnieku. Tā kā starp jebkuriem trīs dalībniekiem vismaz divi atrodas vienā grupā, tad tie savā starpā nedraudzējas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



20. att.

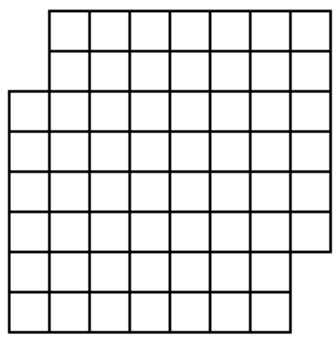
8.3. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = BC$. Uz malas AB izvēlēts punkts M un uz malas BC izvēlēts punkts K tā, ka $AM = AK = AC$. Zināms, ka $AK \perp MC$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

Atrisinājums. Apzīmējam AK un MC krustpunktu ar H (skat. 21. att.). Tā kā ΔKAC un ΔABC ir vienādsānu trijstūri, tad $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ACK = \sphericalangle BAC = \alpha$. Nogrieznis AH ir vienādsānu trijstūra MAC augstums pret pamatu, tātad arī bisektrise, tāpēc $\sphericalangle KAC = \sphericalangle BAC : 2 = \frac{\alpha}{2}$. Tā kā trijstūra KAC iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad iegūstam, ka $\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180°$, no kurienes $\frac{5}{2}\alpha = 180°$ jeb $\alpha = 72°$.
Tātad $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 72°$ un $\sphericalangle B = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

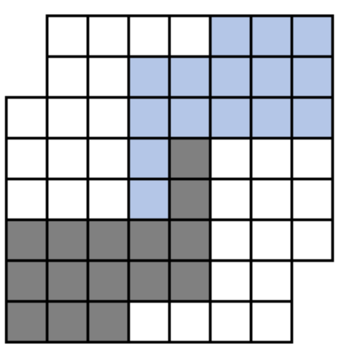


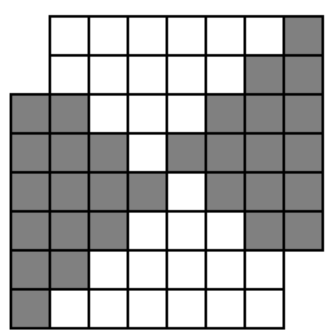
21. att.

8.4. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 22. att. doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).


22. att.

Atrisinājums. Skat. 23. att. vai 24. att.


23. att.


24. att.

8.5. Pa apļveida trasi vienā virzienā Kārlis skrien ar kājām un Sandris brauc ar skrejriteni, bet pretējā virzienā Vilnis brauc ar velosipēdu un Mārtiņš ar mopēdu (katrs brauc ar savu, nemainīgu ātrumu). Zināms, ka Kārlis satiek Vilni ik pēc 12 minūtēm, Sandris apdzen Kārli ik pēc 20 minūtēm, bet Mārtiņš apdzen Vilni ik pēc 5 minūtēm. Cik bieži Mārtiņš satiek Sandri?

1. atrisinājums. Apzīmēsim Kārļa ātrumu ar k, Sandra ātrumu ar s, Viļņa ātrumu ar v, Mārtiņa ātrumu ar m un trases garumu ar l.

No tā, ka Kārlis satiek Vilni ik pa 12 minūtēm, izriet, ka $k + v = \frac{l}{12}$.

No tā, ka Sandris apdzen Kārli ik pa 20 minūtēm, izriet, ka $s - k = \frac{l}{20}$.

No tā, ka Mārtiņš apdzen Vilni ik pa 5 minūtēm izriet, ka $m - v = \frac{l}{5}$.

Tā kā $m + s = (m - v) + (s - k) + (k + v) = \frac{l}{5} + \frac{l}{20} + \frac{l}{12} = \frac{l}{3}$, tad secinām, ka Mārtiņš Satiek Sandri ik pēc 3 minūtēm.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka Kārlis un Sandris pārvietojas pa labi, bet Vilnis un Kārlis – pa kreisi. Pieņemsim arī, ka viņi visi sāk pārvietoties vienā laikā no viena punkta un noskaidrosim, cik apļus un kurā virzienā 60 minūtēs Kārli apdzen pārējie (60 izvēlēts, kā 5, 12 un 20 minūšu mazākais kopīgais dalāmais).

No tā, ka Kārlis satiek Vilni ik pa 12 minūtēm izriet, ka Vilnis ir veicis $60 : 12 = 5$ apļus pa kreisi attiecībā pret Kārli.

No tā, ka Mārtiņš apdzen Vilni ik pa 5 minūtēm izriet, ka Mārtiņš ir veicis $60 : 5 = 12$ apļus pa kreisi attiecībā pret Vilni, tātad viņš veicis $12 + 5 = 17$ apļus pa kreisi attiecībā pret Kārli.

No tā, ka Sandris apdzen Kārli ik pa 20 minūtēm izriet, ka Sandris ir veicis $60 : 20 = 3$ apļus pa labi attiecībā pret Kārli.

Tā kā Mārtiņš ir veicis attiecībā pret Kārli 17 apļus pa kreisi, bet Sandris veicis 3 apļus pa labi, tad viņi šajās 60 minūtēs ir satikušies $17 + 3 = 20$ reizes. Tātad viņi satiekas ik pēc $60 : 20 = 3$ minūtēm.

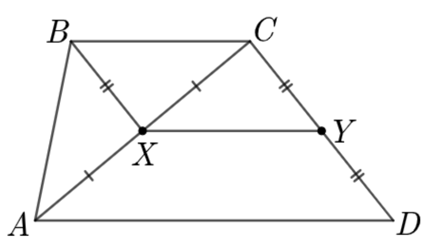
Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

9. klase

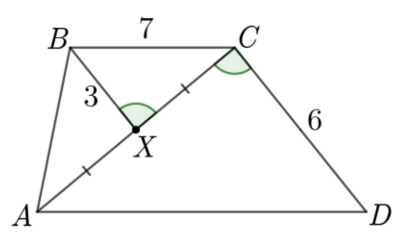
9.1. Dots, ka x ir naturāls skaitlis. Kāds lielākais skaits skaitļu $x; x+2; x+4; x+6; x+8$ vienlaicīgi var būt pirmskaitļi?
Atrisinājums. Ja $x=1$, tad ir 3 pirmskaitļi, un tie ir 3; 5; 7 ($1+8=9$ nav pirmskaitlis).
Ja x ir pāra skaitlis, tad ir ne vairāk kā viens pirmskaitlis (pirmskaitlis 2, pārējie ir pāra skaitļi, tātad nav pirmskaitļi).
Ja $x=3$, tad pirmskaitļu skaits ir 4, un tie ir 3; 5; 7; 11 ($3+6=9$ nav pirmskaitlis).
Ja $x=5$, tad pirmskaitļu skaits ir 4, un tie ir 5; 7; 11; 13 ($5+4=9$ nav pirmskaitlis).
Ja x ir nepāra skaitlis un $x>5$, tad skaitļa x pēdējais cipars var būt 1; 3; 5; 7; 9, bet tad vienam no skaitļiem pēdējais cipars būs 5 (jo $1+4=5$; $3+2=5$, $7+8=15$, $9+6=15$), tātad tas nebūs pirmskaitlis, jo dalīsies ar 5 un būs lielāks nekā 5. Līdz ar to vismaz viens no skaitļiem nebūs pirmskaitlis, un pirmskaitļu skaits nebūs lielāks kā 4.
Tātad lielākais pirmskaitļu skaits ir 4.
Piezīme. Var pamatot, ka viens no skaitļiem x, $x+2$ vai $x+4$ dalās ar 3 (un ir lielāks nekā 3).

9.2. Novadijā dzīvo 73 rūķi un daži no tiem savā starpā draudzējas (ja rūķis A draudzējas ar rūķi B, tad arī B draudzējas ar A, tas ir, draudzība ir abpusēja). Vai var būt tā, ka katram rūķim ir tieši 9 draugi?
Atrisinājums. Rūķus apzīmējam ar punktiem un divus punktus savienojam ar nogriezni, ja punktiem atbilstošie rūķi savā starpā draudzējas. Tā kā no katra punkta iziet 9 nogriežņu gali, tad nogriežņu galu kopējais skaits ir $73\cdot 9=657$, kas ir nepāra skaitlis. Bet katram nogrieznim ir divi gali, tāpēc nogriežņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim. Esam ieguvuši pretrunu. Tāpēc nevar būt, ka katram rūķim ir tieši 9 draugi.

9.3. Punkts X ir izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles AC viduspunkts. Zināms, ka $CD||BX$. Aprēķināt AD garumu, ja $BX=3, BC=7$ un $CD=6$.
1. atrisinājums. Apzīmēsim CD viduspunktu ar punktu Y un novilksim nogriezni XY (skat. 1. att.). Tā kā $CD=6$, tad $CY=3$. Tā kā nogriežņi $BX=CY=3$ ir vienādi un paralēli, tad četrstūris $BCYX$ ir paralelograms. Tādā gadījumā $XY=BC=7$ kā paralelograma malas. Nogrieznis XY ir trijstūra ACD viduslīnija, tātad $AD=2XY=14$.



1. att.



2. att.

2. atrisinājums. Tā kā $BX||CD$, tad $\sphericalangle BXC=\sphericalangle ACD$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm (skat. 2. att.). No dotā izriet, ka $\frac{BX}{CD}=\frac{CX}{AC}=\frac{1}{2}$. Tātad $\Delta BXC\sim\Delta DCA$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $AD=2BC=14$ kā atbilstošās malas līdzīgos trijstūros.

9.4. Atrast visus tādus reālu skaitļu pārus $(x; y)$, kuriem

$$(x^4+1)(y^4+1)=4x^2y^2.$$

1. atrisinājums. Atverot iekavas un abām vienādojuma pusēm atņemot $4x^2y^2$, iegūstam:

$$x^4y^4+x^4+y^4+1-4x^2y^2=0;$$
$$(x^4y^4-2x^2y^2+1)+(x^4-2x^2y^2+y^4)=0;$$
$$(x^2y^2-1)^2+(x^2-y^2)^2=0.$$

Divu kvadrātu summa ir nulle tikai tad, ja katrs saskaitāmais ir nulle, tātad

$$x^2y^2=1 \text{ un } x^2=y^2.$$

Tas nozīmē, ka $x^2=y^2=1$. Tātad vienādojumam ir četri atrisinājumi: $(-1;-1), (-1;1), (1;\ -1)$ un $(1;1)$.
2.atrisinājums. Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad

$$(x^2-1)^2 \geq 0;$$
$$x^4-2x^2+1 \geq 0;$$
$$x^4+1 \geq 2x^2\,.$$

Analoģiski iegūstam, ka $y^4+1 \geq 2y^2$. Sareizinot kopā pēdējās divas nevienādības (to drīkst darīt, jo abu nevienādību abas puses ir nenegatīvas), iegūstam, ka

$$(x^4+1)(y^4+1) \geq 4x^2y^2.$$

No iepriekš veiktajiem spriedumiem izriet, ka vienādība tiks sasniegta tad un tikai tad, ja $(x^2-1)^2=0$ un $(y^2-1)^2=0$, tas ir, $x^2=y^2=1$. Tātad vienādojumam ir četri atrisinājumi: $(-1;-1), (-1;1), (1;\ -1)$ un $(1;1)$.

9.5. Dabas rezervātā katra koka vecums gados izsakāms kā naturāls skaitlis. Koku vidējais vecums pirms vakardienas negaisa bija tieši 72 gadi. Negaisa laikā zibens spēriena dēļ gāja bojā viens 2023 gadus vecs koks un tagad rezervāta koku vidējais vecums ir tieši 71 gads. Kāds lielākais skaits 2023 gadus vecu koku varēja atrasties rezervātā pirms vakardienas negaisa?

Piezīme. Pa šīm divām dienām neviens koks nav kļuvis vecāks.

Atrisinājums. Koku skaitu pirms negaisa apzīmēsim ar n, bet koku gadu kopsummu apzīmēsim ar s.
Tad $s=72n$ un $s-2023=71(n-1)$. Tātad $72n-2023=71n-71$ un iegūstam, ka $n=1952$ un $s=72\cdot1952=140544$.
Noskaidrosim, kāds lielākais skaits 2023 gadus vecu koku var būt. Ievērojam, ka $s=2023\cdot69+957$. Tātad 2023 gadus veco koku skaits nevar pārsniegt 69. Pieņemot, ka atlikušo koku vecums ir mazākais iespējamais (1 gads), koku kopskaits ir mazāks nekā koku skaits parkā: $69+957=1026<1952$. Tātad 2023 gadus veco koku skaits nevar būt 69.
Nākamā iespējamā vērtība ir 68. Izsakām $s=2023\cdot68+2980$. Pieņemsim, ka starp atlikušajiem kokiem ir v viengadīgi koki un viens koks, kuram ir x gadi ($x>1$).
Tad koku skaits $68+v+1=1952$, no kā iegūstam, ka $v=1883$ jeb parkā ir 1883 viengadīgi koki. Ņemot vērā, ka $v+x=2980$, iegūstam, ka $x=1097$ jeb atlikušā koka vecums ir 1097 gadi.
Tātad lielākais skaits 2023 gadus vecu koku parkā pirms vakardienas negaisa ir 68.

10. klase

10.1. Noskaidrot, vai skaitlis $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ir racionāls vai iracionāls!

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)=2.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dotais skaitlis ir racionāls skaitlis.

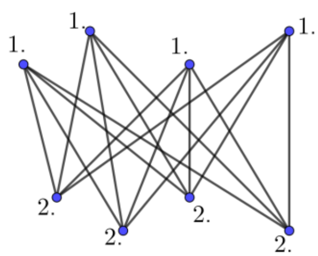
2. atrisinājums. Doto skaitli kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}+4-2\sqrt{3}=8-2\sqrt{16-12}=4.$$

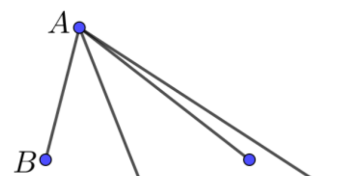
Tā kā skaitļa kvadrāts ir 4, tad dotais skaitlis ir racionāls skaitlis.

10.2. Uz papīra lapas atzīmēti daži punkti tā, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Daži punkti ir savienoti ar nogriežņiem tā, ka no katra punkta iziet tieši 4 nogriežņi. Zināms, ka nav uzzīmēts neviens tāds trijstūris, kuram visas virsotnes ir dotajos punktos. Kāds ir mazākais skaits punktu, kas var būt atzīmēti uz papīra lapas?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais punktu skaits ir astoņi. Dotajā piemērā (skat. 3. att.) punkti sadalīti divās grupās (1. grupa un 2. grupa) pa četriem punktiem tā, ka katrs pirmās grupas punkts ir savienots ar katru otrās grupas punktu, bet nav savienots ar nevienu savas grupas punktu. Izvēloties jebkurus trīs punktus, vismaz divi būs vienā grupā, tātad attiecīgie punkti nebūs savienoti ar nogriezni, līdz ar to nebūs uzzīmēts neviens trijstūris, kura virsotnes ir dotajos punktos.



3. att.



4. att.

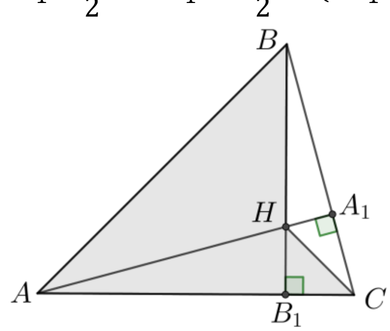
Pierādīsim, ka uz lapas nevar būt atzīmēts mazāks skaits punktu. Apskatām punktu A (skat. 4. att.), kas savienots ar tieši 4 citiem punktiem. Apskatām punktu B (skat. 4. att.). Tā kā nav uzzīmēts neviens trijstūris, tad punkts B nevar būt savienots ne ar vienu citu punktu, kas savienots ar A, bet tādā gadījumā nepieciešami vēl vismaz 3 citi punkti, tas ir, kopā uz lapas ir atzīmēti vismaz 8 punkti.

10.3. Šaurleņķu trijstūra ABC augstumi krustojas punktā H. Aprēķināt četrstūra $ABHC$ laukumu, ja $AH=BC=8$.

1. atrisinājums. Pret malām BC un AC novilktos augstumus apzīmējam ar AA_1 un BB_1 (skat. 5. att.). Ievērojam, ka $S_{ABHC}=S_{ABH}+S_{ACH}$.

Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, iegūstam, ka

$$S_{ABHC}=S_{ABH}+S_{ACH}=\frac{1}{2}AH\cdot BA_1+\frac{1}{2}AH\cdot A_1C=\frac{1}{2}AH(BA_1+A_1C)=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32.$$



5. att.

2. atrisinājums. Pret malām BC un AC novilktos augstumus apzīmējam ar AA_1 un BB_1 (skat. 5. att.). Ievērojam, ka $S_{ABHC} = S_{ABC} - S_{HBC}$.

Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, iegūstam, ka

$$S_{ABHC} = S_{ABC} - S_{HBC} = \frac{1}{2}BC \cdot AA_1 - \frac{1}{2}BC \cdot HA_1 = \frac{1}{2}BC(AA_1 - HA_1) = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32.$$

10.4. Atrast lielāko naturālo skaitli N ar īpašību – katram pirmskaitlim $p < N$ skaitlis $N + 2p$ arī ir pirmskaitlis!

Atrisinājums. Aplūkojam vērtību $N = 7$ un pārbaudām, vai $N + 2p$ ir pirmskaitlis visiem p, kas mazāki nekā N:

- ja $p = 2$, tad $7 + 2 \cdot 2 = 11$ (pirmskaitlis);
- ja $p = 3$, tad $7 + 2 \cdot 3 = 13$ (pirmskaitlis);
- ja $p = 5$, tad $7 + 2 \cdot 5 = 17$ (pirmskaitlis).

Pamatosim, ka neder skaitļi, kas lielāki nekā 7. Ja $N > 7$, tad kāds no trīs skaitļiem: $N + 4$, $N + 6$, $N + 14$ nav pirmskaitlis, jo

- $N + 6$ dalās ar 3, ja $N = 3k$;
- $N + 14$ dalās ar 3, ja $N = 3k + 1$;
- $N + 4$ dalās ar 3, ja $N = 3k + 2$.

10.5. Volejbola turnīrā katra komanda spēlēja ar katru tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Ir zināms: lai kuru komandu mēs izvēlētos (apzīmēsim to ar K), tā ir izcīnījusi tieši tikpat uzvaru, cik kopā izcīnījušas visas tās komandas, pret kurām K uzvarēja. Kāds var būt komandu skaits, kas piedalījās šajā turnīrā? (Nevienā turnīrā nav mazāk kā 2 komandas.)

Atrisinājums. Turnīrā varēja piedalīties 3 vai 4 komandas, piemēram, atbilstošu spēļu norisi skat. 6. att., kur skaitlis 1 norāda rindā rakstītās komandas atbilstošās uzvaras pret komandām, kas rakstītas kolonnā, skaitlis 0 norāda zaudējumu (piemēram, trīs komandu gadījumā komanda A ir uzvarējusi komandu B un zaudējusi komandai C). Pamatosim, ka cits komandu skaits nav iespējams. Komandu skaits nevar būt 2, jo tad ir tikai viena spēle, kurā ir uzvarētājs un zaudētājs.

	A	B	C
A		1	0
B	0		1
C	1	0	

	A	B	C	D
A		1	1	1
B	0		1	0
C	0	0		1
D	0	1	0	

6. att.

Ievērosim, ka x komandas savā starpā kopā izspēlē $(x-1) + (x-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{x(x-1)}{2}$ spēles un izcīna tikpat uzvaras. Tā kā vidēji uz vienu komandu ir $\frac{x-1}{2}$ uzvaras, tad ir komanda ar vismaz $\frac{x-1}{2}$ uzvarām (ja šādas komandas nebūtu, tad kopējais uzvaru skaits būtu mazāks nekā $\frac{x(x-1)}{2}$).

Apzīmēsim turnīra komandu skaitu ar x un pieņemsim, ka lielākais uzvaru skaits vienai komandai ir y; apzīmēsim šo komandu ar A. Tās y komandas, kas zaudējušas pret A, savā starpā spēlējušas $\frac{y(y-1)}{2}$ spēles, kurās izcīnītas $\frac{y(y-1)}{2}$ uzvaras; bez tam viņām varbūt ir vēl kādas citas uzvaras. Tāpēc $y \geq \frac{y(y-1)}{2}$, no kurienes izriet, ka $y \leq 3$.

Apskatām visas iespējamās y vērtības.

- Ja $y = 3$, tad A izcīnījusi 3 uzvaras pret B, C, D. Tātad C un D savā starpā arī ir 3 uzvaras. Ja būtu vēl kāda komanda E, tad tā ir uzvarējusi gan pret A, gan pret B, C, D (citādi B, C, D kopā būtu vairāk par 3 uzvarām), un tā ir pretruna ar to, ka A ir vislielākais uzvaru skaits. Tātad šajā gadījumā citu komandu nav, un turnīrā piedalās 4 komandas.
- Ja $y = 2$, tad no iepriekš iegūtās nevienādības $y \geq \frac{x-1}{2}$ izriet, ka $x \leq 5$. Mums tikai jānoskaidro, vai var būt, ka $x = 5$. Ja $x = 5$, tad tiek izspēlētas 10 spēles un izcīnītas 10 uzvaras. Ja lielākais uzvaru skaits ir 2, tad visām komandām ir pa 2 uzvarām, un tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc $x \neq 5$.
- Ja $y = 1$, tad no $y \geq \frac{x-1}{2}$ izriet, ka $x \leq 3$. Tātad citu iespēju bez sākumā uzrādītajām nav.

11. klase

11.1. Pierādīt, ka $x^2+y^2+\frac{1}{2}\geq x+y$ visiem reāliem x un y.

1. atrisinājums. Reizinām abas nevienādības puses ar 4 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$4x^2-4x+4y^2-4y+2\geq 0;$$
$$(4x^2-4x+1)+(4y^2-4y+1)\geq 0;$$
$$(2x-1)^2+(2y-1)^2\geq 0.$$

Tā kā divu kvadrātu summa ir nenegatīva, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

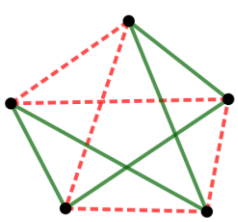
$$x^2-x+y^2-y+\frac{1}{2}\geq 0;$$
$$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2\cdot\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\geq 0;$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0.$$

Tā kā divu kvadrātu summa ir nenegatīva, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

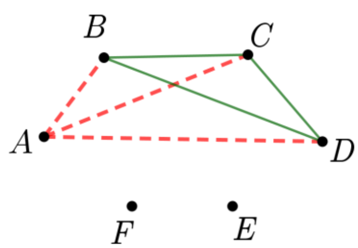
11.2. Kādā zemē dzīvo rūķi, katri divi no tiem vai nu draudzējas, vai viens otru ienīst. Zināms, ka nav tādu trīs rūķu, kas visi viens otru ienīst. Vai noteikti var atrast tādus trīs rūķus, kas visi savā starpā draudzējas, ja šajā zemē ir **a)** 5 rūķi, **b)** 6 rūķi?

Atrisinājums. Katru rūķi apzīmēsim ar punktu. Ja divi rūķi draudzējas, tad tos savienosim ar zaļu nogriezni (nepārtraukta līnija), ja tie viens otru ienīst, tad savienosim tos ar sarkanu nogriezni (pārtraukta līnija).

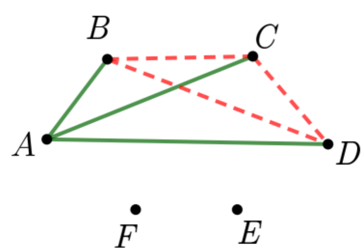
a) Nē, var gadīties, ka nav tādu trīs rūķu, kas visi savā starpā draudzējas, piemēram, skat. 7. att.



7. att.



8. att.



9. att.

b) Pamatosim, ka noteikti var atrast tādus trīs rūķus, kas visi savā starpā draudzējas.

Apskatām punktu A. No tā iziet vismaz 3 vienas krāsas nogriežņi, jo katri divi rūķi vai nu draudzējas, vai ir ienaidnieki un no viena punkta iziet 5 nogriežņi (pēc Dirihlē principa). Apskatām abus iespējamos gadījumus, kādā krāsā var būt nogriežņi AB, AC un AD.

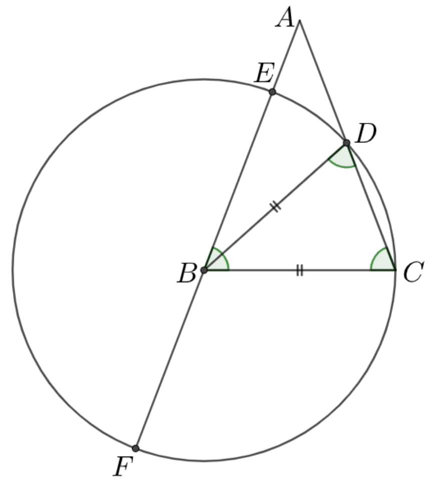
1. Ja nogriežņi $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}$ ir sarkanā krāsā (ienīst), tad nogriežņiem $\boldsymbol{BC}, \boldsymbol{CD}, \boldsymbol{BD}$ ir jābūt zaļā krāsā (skat. 8. att.), lai neveidotos sarkani trijstūri ABC, ACD un ABD, jo pēc dotā nav tādu trīs rūķu, kas visi ienīst viens otru. Tātad ir trīs rūķi B, C un D, kas visi draudzējas savā starpā (veidojas zaļš trijstūris BCD).
2. Nogriežņi $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}$ ir zaļā krāsā (draudzējas). Pieņemsim pretējo, ka nav tādu trīs rūķu, kas visi savā starpā draudzējas (nav zaļa trijstūra). Tad punkti B, C, D jāsavieno ar sarkaniem nogriežņiem $\boldsymbol{BC}, \boldsymbol{CD}, \boldsymbol{BD}$ (skat. 9. att.), lai neviens no trijstūriem ABC, ACD un ABD nebūtu zaļš. Bet tādā gadījumā rūķi B, C, D visi viens otru ienīst, kas ir pretrunā ar doto. Tātad pieņēmums ir aplams un ir tādi trīs rūķi, kas visi savā starpā draudzējas.

11.3. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB=AC$ un $\sphericalangle BAC<60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D un E. Aprēķināt $\frac{AD}{DC}$, ja $\frac{AE}{EB}=\frac{2}{5}$.

1. atrisinājums. Apzīmējam $AE=2x$ un $EB=BD=BC=5x$. Tad $AB=AC=7x$.

Trijstūri ABC un BCD ir vienādsānu trijstūri ($AB=AC$ pēc dotā un $BC=BD$ kā rādiusi), turklāt leņķi pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ($\sphericalangle ACB$ ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 10. att.). Tātad $\Delta BCD\sim\Delta ABC$ pēc pazīmes $\ell\ell$.

Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{DC}$ un līdz ar to iegūstam, ka $DC=\frac{BC^2}{AB}=\frac{(5x)^2}{7x}=\frac{25x}{7}$. Tātad $AD=7x-\frac{25x}{7}=\frac{24x}{7}$ un $\frac{AD}{DC}=\frac{24}{25}$.



10. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $AE=2x$ un $EB=BD=BC=5x$ (skat. 10. att.). Tad $AB=AC=7x$.
Pagarināsim AB līdz otram krustpunktam ar riņķa līniju, apzīmēsim to ar F. Tādā gadījumā $BF=EB=5x$ kā rādiusi un $AF=AE+EB+BF=12x$. Izmantojot sekanšu īpašību, iegūstam, ka

$$AE\cdot AF=AD\cdot AC;\qquad 2x\cdot 12x=AD\cdot 7x;\qquad AD=\frac{24x^2}{7x}=\frac{24x}{7}.$$

Tā kā $DC=AC-AD=7x-\frac{24x}{7}=\frac{25x}{7}$, tad $\frac{AD}{DC}=\frac{24}{25}$.

11.4. Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $36n+8$, kur n ir naturāls skaitlis.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka šādi skaitļi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar x un $x+1$, iegūstot vienādojumu $x(x+1)=36n+8$.
Pareizinot abas vienādojuma puses ar 4 un pieskaitot 1, iegūstam, ka

$$4x^2+4x+1=144n+33;$$
$$(2x+1)^2=144n+33.$$

Ievērojam, ka 144 dalās ar 9, toties 33 dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad $144n+33$ dalās ar 3, bet nedalās ar 9, un tas nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $36n+8$, kur n – naturāls skaitlis.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka šāds secīgu naturālu skaitļu pāris eksistē. Tad to reizinājums pēc moduļa 9 ir 8, jo. $36n+8\equiv 8 \pmod 9$. Aplūkosim, kādus atlikumus pēc moduļa 9 var iegūt, reizinot secīgus skaitļus x un $(x+1)$.

$\boldsymbol{x \pmod 9}$	$\boldsymbol{x+1 \pmod 9}$	$\boldsymbol{x(x+1) \pmod 9}$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	3
4	5	2
5	6	3
6	7	6
7	8	2
8	0	0

Visi iespējamie varianti ir aplūkoti un nevienā gadījumā reizinājuma atlikums pēc moduļa 9 nav 8. Tātad esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $36n+8$, kur n ir naturāls skaitlis.

11.5. Skaitļu virkni, kurā ir N elementi, sauksim par N mazāko naturālo skaitļu permutāciju, ja tajā atrodami visi naturālie skaitļi no 1 līdz N.

Zināms, ka virkne $\{a_i\}$ ir n $(n > 3)$ mazāko naturālo skaitļu permutācija. Virknes $\{b_i\}$ $(1 \le i \le n-1)$ elementus aprēķina pēc formulas $b_i = |a_{i+1} - a_i|$. Virknes $\{c_i\}$ $(1 \le i \le n-2)$ elementus aprēķina pēc formulas $c_i = |b_{i+1} - b_i|$. Pierādīt, ka $\{b_i\}$ un $\{c_i\}$ vienlaikus abas nevar būt attiecīgi $n-1$ un $n-2$ mazāko naturālo skaitļu permutācijas!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka abas virknes $\{b_i\}$ un $\{c_i\}$ ir attiecīgi $n-1$ un $n-2$ mazāko skaitļu permutācijas. Tas nozīmē, ka virknē $\{c_i\}$ ir skaitlis $n-2$, bet virknē $\{b_i\}$ ir visi skaitļi no 1 līdz $n-1$.

Uzskatāmības pēc rakstīsim virknes vienu zem otra tā, ka elements b_i atrodas zem elementiem a_i un a_{i+1} pa vidu un arī elements c_i atrodas zem elementiem b_i un b_{i+1} pa vidu. Tieši virs $n-2$ virknē $\{c_i\}$ jāatrodas virknes $\{b_i\}$ skaitļiem 1 un $n-1$, jo nav cita veida, kā virknē $\{c_i\}$ iegūt $n-2$. Līdzīgi tieši virs $n-1$ virknē $\{b_i\}$ jāatrodas virknes $\{a_i\}$ skaitļiem 1 un n, jo nav cita veida, kā virknē $\{b_i\}$ iegūt skaitli $n-1$. Tādējādi ir iespējami divi varianti, kādi skaitļi atrodas virknē $\{a_i\}$ virs 1 un $n-1$ (skat. 11. att. un 12. att.). Gadījumi, kad virknē $\{b_i\}$ skaitļi 1 un $n-1$ atrodas pretējā secībā, ir šiem simetriski.

$\boxed{n-1}$; $\boxed{n}$; $\boxed{1}$

$\boxed{1}$; $\boxed{n-1}$

$\boxed{n-2}$

11. att.

$\boxed{2}$; $\boxed{1}$; $\boxed{n}$

$\boxed{1}$; $\boxed{n-1}$

$\boxed{n-2}$

12. att.

Virknē $\{b_i\}$ kaut kur jāatrodas arī skaitlim $n-2$, ko var iegūt tikai divos veidos: vai nu kā $n-2$, vai arī kā $(n-1)-1$. Tātad virknē $\{a_i\}$ vai nu skaitļu pārim $(1;\ n-1)$, vai arī $(2;\ n)$ jāatrodas blakus. Bet nevienā no gadījumiem tas nav iespējams. Patiešām, 11. att. gadījumā 1 un $n-1$ neatrodas blakus, bet skaitlim n abi kaimiņi jau ir aizņemti, un līdzīgi 12. att. gadījumā skaitļi 2 un n neatrodas blakus, bet skaitlim 1 abi kaimiņi jau ir aizņemti.

Tātad pieņēmums bija aplams un abas virknes $\{b_i\}$ un $\{c_i\}$ vienlaikus nevar būt attiecīgi $n-1$ un $n-2$ mazāko naturālo skaitļu permutācijas.

12. klase

12.1. Atrast mazāko reālo skaitli a, ar kuru visiem reāliem skaitļiem x, y, z ir spēkā nevienādība:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a \geq x + 2y + 3z.$$

Atrisinājums. Mazākā iespējamā vērtība ir $a = \frac{7}{2}$. Ekvivalenti pārveidosim doto nevienādību, atdalot pilnos kvadrātus:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) + \left(z^2 - 3z + \frac{9}{4}\right) \geq \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} - a;$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{7}{2} - a.$$

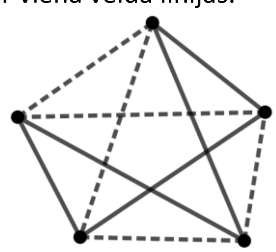
Vispirms pamatosim, ka a nevar būt mazāks kā $\frac{7}{2}$. Ievietosim nevienādībā $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = \frac{3}{2}$, iegūstot, ka nevienādības kreisā puse kļūst vienāda ar 0, tātad $a \geq \frac{7}{2}$.

Ja $a = \frac{7}{2}$, tad nevienādība izpildās visiem reāliem x, y un z, jo triju kvadrātu summa noteikt ir nenegatīvs skaitlis. Tātad $a = \frac{7}{2}$ ir mazākā iespējamā vērtība, ar kuru izpildās dotā nevienādība visiem reāliem skaitļiem x, y, z.

12.2. Šaha turnīrā katri divi šahisti ir vai nu izspēlējuši tieši vienu šaha partiju, vai arī nav izspēlējuši nevienu partiju. Vai noteikti var atrast tādus trīs šahistus, kas savā starpā ir izspēlējuši vai nu visas 3 partijas, vai nevienu partiju, ja turnīrā piedalās **a)** 5, **b)** 6 šahisti?

Atrisinājums. Šahistus apzīmējam ar punktiem. Divus šahistus savienosim ar nepārtrauktu līniju, ja tie ir izspēlējuši partiju, bet ar pārtrauktu līniju, ja tie nav izspēlējuši partiju.

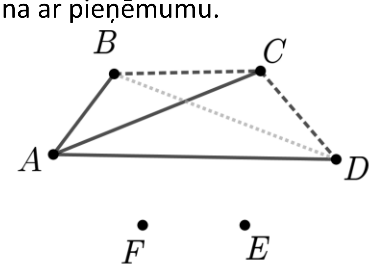
a) Nē, var gadīties, ka nav tādu trīs šahistu, kas izspēlējuši vai nu 3, vai nevienu partiju, piemēram, skat. 13. att., kur nav neviena trijstūra, kuram visas malas ir viena veida līnijas.



13. att.

b) Pierādīsim, ka noteikti var atrast tādus trīs šahistus, kas kopā ir izspēlējuši vai nu 3 partijas, vai nevienu partiju, tas ir, ka var atrast tādu trijstūri, kuram visas malas ir viena veida līnijas.

Pieņemsim, ka nav neviena šāda trijstūra. Aplūkojam punktu A. Tā kā no tā iziet 5 nogriežņi, tad vismaz trīs no tiem ir viena veida (pēc Dirihlē principa). Nezaudējot vispārīgumu, uzskatīsim, ka nogriežņi AB, AC, AD nepārtrauktas līnijas**.** Tad BC un CD jābūt pārtrauktām līnijām, bet tādā gadījumā trijstūrim ABD vai BCD visas malas būs viena veida līnijas (skat. 14. att.). Iegūta pretruna ar pieņēmumu.



14. att.

12.3. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = AC$ un $\sphericalangle BAC < 60°$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC, krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D (kas nesakrīt ar C) un E. Pierādīt, ka $AD < 2AE$.

Atrisinājums. Trijstūri ABC un BCD ir vienādsānu trijstūri ($AB = AC$ pēc dotā un $BC = BD$ kā rādiusi), turklāt leņķi pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ($\sphericalangle ACB$ ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 15. att.). Tātad $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ pēc pazīmes $\ell\ell$.

Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE + EB}{BC} = \frac{BC}{AE + EB - AD};$$

$$(AE + EB)(AE + EB - AD) = BC^2.$$

Tā kā $BC = EB$ kā rādiusi, tad

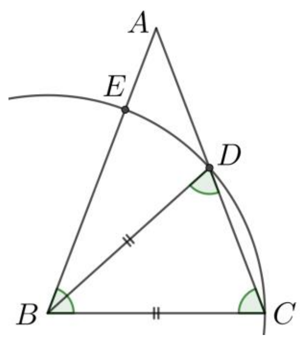
$$AE^2 + 2AE \cdot BC + BC^2 - AD \cdot AE - AD \cdot BC = BC^2;$$

$$AE^2 + 2AE \cdot BC = AD(AE + BC);$$

$$2AE(AE + BC) - AE^2 = AD(AE + BC).$$

Dalot abas vienādības puses ar $(AE + BC)$, iegūstam, ka

$$AD = 2AE - \frac{AE^2}{AE + BC} \quad \Rightarrow \quad AD < 2AE.$$



15. att.

12.4. Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $27n + 11$, kur n ir naturāls skaitlis.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka šādi skaitļi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar x un $x + 1$, iegūstot vienādojumu $x(x + 1) = 27n + 11$.

Pareizinot abas puses ar 4 un pieskaitot 1, iegūstam, ka

$$4x^2 + 4x + 1 = 108n + 45;$$

$$(2x + 1)^2 = 108n + 45.$$

Vienādojuma labā puse dalās ar 9, tātad $2x + 1$ dalās ar 3. Izdalot abas vienādojuma puses ar 9, iegūstam, ka

$$\left(\frac{2x + 1}{3}\right)^2 = 12n + 5.$$

Ievērojam, ka, dalot vienādojuma labo pusi ar 3, tiek iegūts atlikums 2. Toties, dalot skaitļa kvadrātu ar 3, var iegūt tikai atlikumu 0 vai 1. Tātad šim vienādojumam nav atrisinājuma un esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $27n + 11$, kur n – naturāls skaitlis.

2. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka šādi skaitļi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar x un $x+1$, iegūstot vienādojumu $x(x+1)=27n+11$.
Ja x vai $x+1$ dalās ar 3, tad vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, bet labā nedalās, tātad vienādojumam nav atrisinājuma. No tā iegūstam, ka, x dalot ar 3, nevar iegūt atlikumu 0 vai 2, tātad tiek iegūts atlikums 1. Tātad x var izeikt formā $x=3k+1$. Ievietojot doto vienādību vienādojumā, iegūstam

$$(3k+1)(3k+2)=27n+11;$$
$$9k^2+9k+2=27n+11;$$
$$9k^2+9k=27n+9.$$

Abas vienādojuma puses izdalot ar 9 un sadalot reizinātājos, iegūstam

$$k(k+1)=3n+1.$$

Tā kā vienādojuma labā puse nedalās ar 3, tad analogi iepriekš secinātajam, iegūstam, ka, k dalot ar 3, var iegūt tikai atlikumu 1 (citādi vienādojuma kreisā puse dalīsies ar 3). Līdz ar to, apzīmējot $k=3m+1$, iegūstam vienādojumu

$$(3m+1)(3m+2)=3n+1;$$
$$9m^2+9m=3n-1.$$

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 3, bet labā – nedalās. Tātad šim vienādojumam nav atrisinājuma un esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $27n+11$, kur n – naturāls skaitlis.

12.5. Dotas 2023 kastes, sākumā tajās ir attiecīgi 1, 2, 3, ..., 2023 konfektes. Vienā gājienā var izvēlēties naturālu skaitli n un no dažām kastēm (varbūt tikai no vienas) apēst n konfektes. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var panākt, ka visas kastes ir tukšas?

Atrisinājums. Mazākais gājienu skaits ir 11.
Parādīsim, ka ar 11 gājieniem pietiek. Pirmajā gājienā apēdam pa 1 konfektei no kastēm, kurās ir nepāra skaits konfekšu. Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar 2. Otrajā gājienā apēdam pa 2 konfektēm no tām kastēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4. Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar 4. Trešajā gājienā apēdam pa 4 konfektēm no tām kastēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 8. Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar 8. Līdzīgi turpinot, pēc 11 gājieniem konfekšu skaits visās kastēs dalās ar $2^{11}=2048$. Tā kā nevienā kastē konfekšu skaits nepārsniedz 2048, tad šajā brīdī tas ir 0.
Pamatosim, ka ar 10 gājieniem nepietiek. Sākumā visās kastēs ir dažāds skaits konfekšu. Līdz ar to pēc pirmā gājiena vienāds konfekšu skaits var būt lielākais 2 kastēs, pēc otrā gājiena – lielākais $2+2=4$ kastēs, pēc trešā gājiena – lielākais $4+4=8$ kastēs, … , pēc 10. gājiena – lielākais $2^{10}=1024$ kastēs. Tāpēc pēc 10. gājiena visas 2023 kastes nevar būt tukšas.