

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

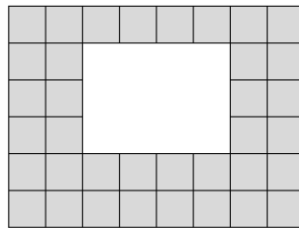
5. klase

1. Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1. att.) vienu skaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās trīs blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu 223. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

			19				20					
--	--	--	----	--	--	--	----	--	--	--	--	--

1. att.

2. Rūķīši mežā ir uzbūvējuši astoņas mājiņas un starp tām izveidojuši vairākas taciņas. Katra taciņa savieno divas mājiņas, taciņas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **a)** 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4 taciņas; **b)** 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5 taciņas?
3. Parādi, kā 2. att. figūru (6×8 rūtiņu taisnstūris, no kura izgriezts 3×4 rūtiņu taisnstūris), griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt trīs vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



2. att.

4. Parādi, kā skaitli 174 var uzrakstīt kā 3 dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitļu summa dalītos ar trešo skaitli!
5. Ja automātā ievieto sarkanu monētu, tad tas izdod 5 zilās monētas, bet, ja automātā ievieto zilu monētu, tad tas izdod 3 sarkanās monētas. Vai, atkārtoti izmantojot automātu, ir iespējams iegūt vienāda skaita sarkanās un zilās monētas, ja sākumā ir dota viena sarkana monēta?

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

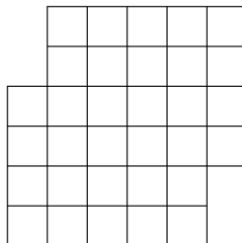
6. klase

1. Atrodi vienu veidu, kādi naturāli skaitļi jāievieto x , y un z vietā, lai vienādība

$$2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{37}{13}$$

būtu patiesa!

2. Rūķīši mežā ir uzbūvējuši desmit mājiņas un starp tām izveidojuši vairākas taciņas. Katra taciņa savieno divas mājiņas, taciņas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **a)** 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 7 taciņas; **b)** 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4 taciņas?
3. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 1. att. doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras pilnīgi sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



1. att.

4. Vai skaitli: **a)** 72, **b)** 73 var izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitļu summa dalītos ar atlikušo skaitli?
5. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2, kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus 0, 3, 6, 9 (varbūt tikai kādu no tiem). Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitļa 17 var iegūt: **a)** skaitli 1; **b)** skaitli 15?

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

1. Vai tukšajās rūtiņās (skat. 1. att.) var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 25 un katri divi skaitļi, kuru starpība ir 1, būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?

	6			
				24
			2	
	15			

1. att.

2. Vai **a)** 90 lampiņas, **b)** 73 lampiņas ar vadiem var savienot tā, lai katra no tām būtu savienota ar vadu ar tieši 5 citām lampiņām?
3. Dots četrstūris $ABCD$, kuram visi leņķi ir mazāki nekā 180° , $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $BC = 1$ un $AD = 3$. Pierādīt, ka $CD > 2$.
4. Cik ir tādu naturālu skaitļu n , kuriem skaitlim n^2 ir tikpat ciparu, cik skaitlim n^3 ?
5. Kastē atrodas baltas, sarkanas un zaļas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izņemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti (vienmēr pietiek jebkuras krāsas lodīšu, ko ielikt kastē). Vai var panākt, ka kastē paliek tikai viena lodīte, ja sākumā kastē atrodas:
- a)** 10 baltas, 12 sarkanas un 16 zaļas lodītes;
b) 10 baltas, 12 sarkanas un 15 zaļas lodītes?

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

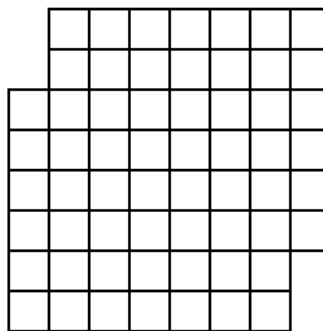
8. klase

1. Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1. att.) vienu pirmskaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu 127. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

		11										3		
--	--	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--

1. att.

2. Pasākumā satikās m cilvēki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši 3 citiem cilvēkiem (ja A draudzējas ar B , tad B draudzējas ar A). Zināms, ka no katriem trim cilvēkiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Vai var gadīties, ka **a)** $m = 11$, **b)** $m = 10$?
3. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AB = BC$. Uz malas AB izvēlēts punkts M un uz malas BC izvēlēts punkts K tā, ka $AM = AK = AC$. Zināms, ka $AK \perp MC$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!
4. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 2. att. doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



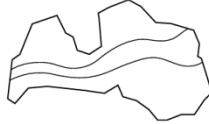
2. att.

5. Pa apļveida trasi vienā virzienā Kārlis skrien ar kājām un Sandris brauc ar skrejriteni, bet pretējā virzienā Vilnis brauc ar velosipēdu un Mārtiņš ar mopēdu (katrs brauc ar savu, nemainīgu ātrumu). Zināms, ka Kārlis satiek Vilni ik pēc 12 minūtēm, Sandris apdzen Kārli ik pēc 20 minūtēm, bet Mārtiņš apdzen Vilni ik pēc 5 minūtēm. Cik bieži Mārtiņš satiek Sandri?



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

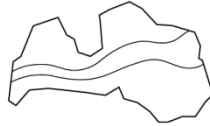
03.02.2023.

1. Dots, ka x ir naturāls skaitlis. Kāds lielākais skaits skaitļu $x; x + 2; x + 4; x + 6; x + 8$ vienlaicīgi var būt pirmskaitļi?
2. Novadījumā dzīvo 73 rūķi un daži no tiem savā starpā draudzējas (ja rūķis A draudzējas ar rūķi B, tad arī B draudzējas ar A, tas ir, draudzība ir abpusēja). Vai var būt tā, ka katram rūķim ir tieši 9 draugi?
3. Punkts X ir izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles AC viduspunkts. Zināms, ka $CD \parallel BX$. Aprēķināt AD garumu, ja $BX = 3$, $BC = 7$ un $CD = 6$.
4. Atrast visus tādus reālu skaitļu pārus $(x; y)$, kuriem
$$(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2.$$
5. Dabas rezervātā katra koka vecums gados izsakāms kā naturāls skaitlis. Koku vidējais vecums pirms vakardienas negaisa bija tieši 72 gadi. Negaisa laikā zibens spēriena dēļ gāja bojā viens 2023 gadus vecs koks un tagad rezervāta koku vidējais vecums ir tieši 71 gads. Kāds lielākais skaits 2023 gadus vecu koku varēja atrasties rezervātā pirms vakardienas negaisa?
Piezīme. Pa šīm divām dienām neviens koks nav kļuvis vecāks.



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

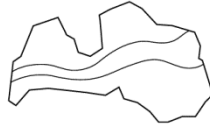
Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

03.02.2023.

1. Noskaidrot, vai skaitlis $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ ir racionāls vai iracionāls!
2. Uz papīra lapas atzīmēti daži punkti tā, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Daži punkti ir savienoti ar nogriežņiem tā, ka no katra punkta iziet tieši 4 nogriežņi. Zināms, ka nav uzzīmēts neviens tāds trijstūris, kuram visas virsotnes ir dotajos punktos. Kāds ir mazākais skaits punktu, kas var būt atzīmēti uz papīra lapas?
3. Šaurleņķu trijstūra ABC augstumi krustojas punktā H . Aprēķināt četrstūra $ABHC$ laukumu, ja $AH = BC = 8$.
4. Atrast lielāko naturālo skaitli N ar īpašību – katram pirmskaitlim $p < N$ skaitlis $N + 2p$ arī ir pirmskaitlis!
5. Volejbola turnīrā katra komanda spēlēja ar katru tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Ir zināms: lai kuru komandu mēs izvēlētos (apzīmēsim to ar K), tā ir izcīnījusi tieši tikpat uzvaru, cik kopā izcīnījušas visas tās komandas, pret kurām K uzvarēja. Kāds var būt komandu skaits, kas piedalījās šajā turnīrā? (Nevienā turnīrā nav mazāk kā 2 komandas.)



Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.

Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

03.02.2023.

1. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \geq x + y$ visiem reāliem x un y .
2. Kādā zemē dzīvo rūķi, katri divi no tiem vai nu draudzējas, vai viens otru ienīst. Zināms, ka nav tādu trīs rūķu, kas visi viens otru ienīst. Vai noteikti var atrast tādus trīs rūķus, kas visi savā starpā draudzējas, ja šajā zemē ir **a)** 5 rūķi, **b)** 6 rūķi?
3. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AB = AC$ un $\sphericalangle BAC < 60^\circ$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC , krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D un E . Aprēķināt $\frac{AD}{DC}$, ja $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{5}$.
4. Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $36n + 8$, kur n ir naturāls skaitlis!
5. Skaitļu virkni, kurā ir N elementi, sauksim par N mazāko naturālo skaitļu permutāciju, ja tajā atrodami visi naturālie skaitļi no 1 līdz N .
Zināms, ka virkne $\{a_i\}$ ir n ($n > 3$) mazāko naturālo skaitļu permutācija.
Virknes $\{b_i\}$ ($1 \leq i \leq n - 1$) elementus aprēķina pēc formulas $b_i = |a_{i+1} - a_i|$.
Virknes $\{c_i\}$ ($1 \leq i \leq n - 2$) elementus aprēķina pēc formulas $c_i = |b_{i+1} - b_i|$.
Pierādīt, ka $\{b_i\}$ un $\{c_i\}$ vienlaikus abas nevar būt attiecīgi $n - 1$ un $n - 2$ mazāko naturālo skaitļu permutācijas!



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

03.02.2023.

1. Atrast mazāko reālo skaitli a , ar kuru visiem reāliem skaitļiem x, y, z ir spēkā nevienādība:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a \geq x + 2y + 3z.$$

2. Šaha turnīrā katri divi šahisti ir vai nu izspēlējuši tieši vienu šaha partiju, vai arī nav izspēlējuši nevienu partiju. Vai noteikti var atrast tādus trīs šahistus, kas savā starpā ir izspēlējuši vai nu visas 3 partijas, vai nevienu partiju, ja turnīrā piedalās **a)** 5, **b)** 6 šahisti?
3. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AB = AC$ un $\sphericalangle BAC < 60^\circ$. Riņķa līnija, kuras centrs ir punktā B un rādiuss BC , krusto trijstūra malas AC un AB attiecīgi punktos D (kas nesakrīt ar C) un E . Pierādīt, ka $AD < 2AE$.
4. Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā $27n + 11$, kur n ir naturāls skaitlis.
5. Dotas 2023 kastes, sākumā tajās ir attiecīgi 1, 2, 3, ..., 2023 konfektes. Vienā gājienā var izvēlēties naturālu skaitli n un no dažām kastēm (varbūt tikai no vienas) apēst n konfektes. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var panākt, ka visas kastes ir tukšas?