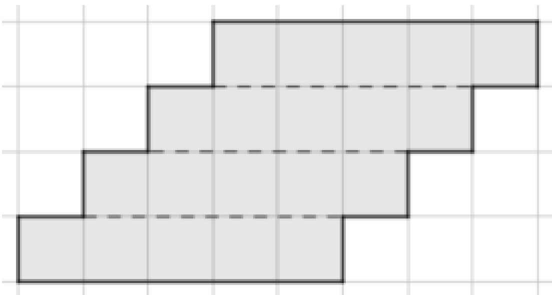
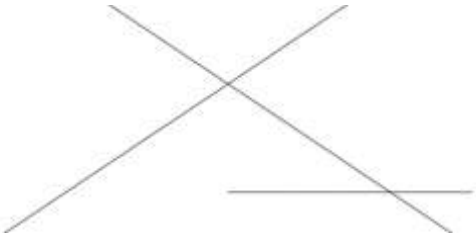
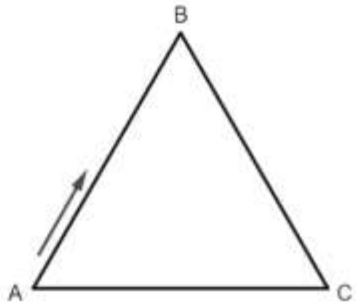
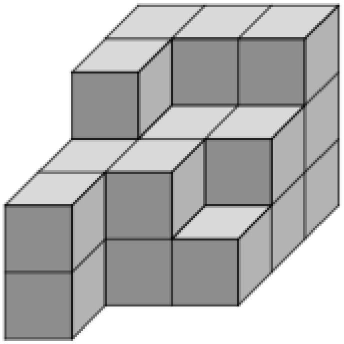
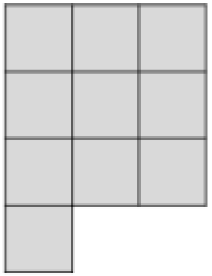
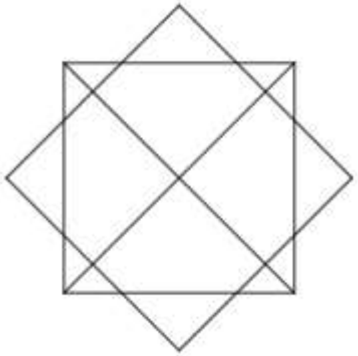
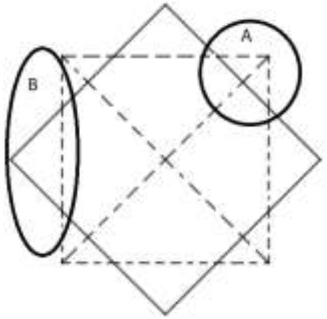
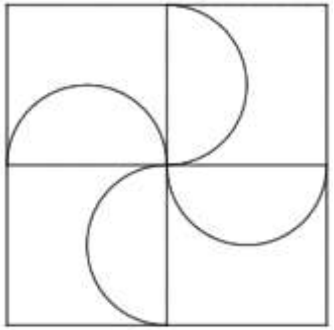
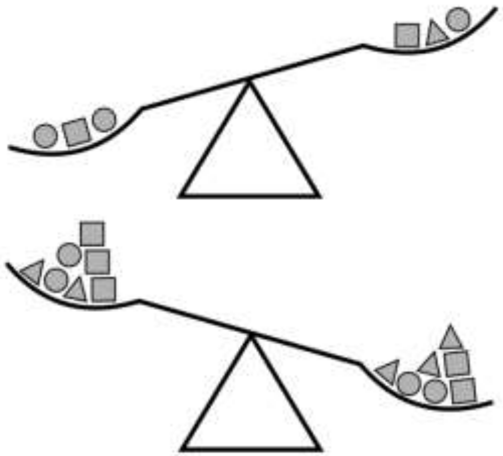
Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma 1. kārtas uzdevumi, atbildes un īsi atrisinājumi

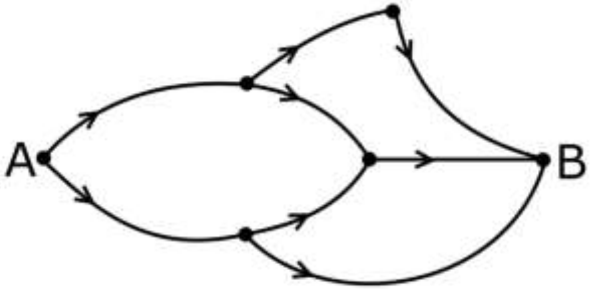
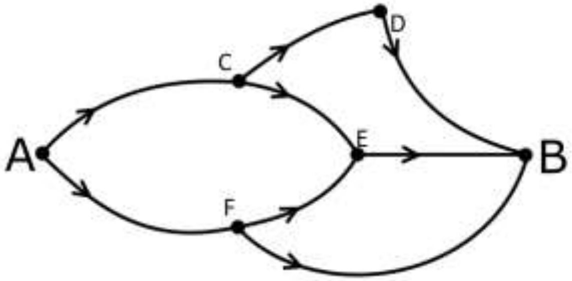
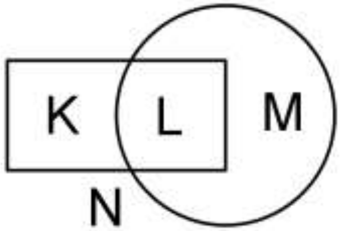
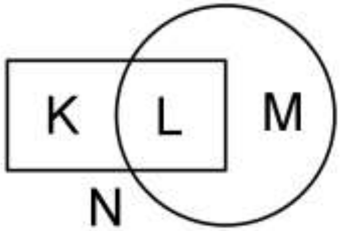
5. klase

Nr.	Uzdevums	Atbilde	Īss risinājums
1	Mārtiņš uz papīra lapas uzrakstīja 10 mazākos naturālos skaitļus, kas dalās ar 3. Kāda ir uzrakstīto skaitļu summa?	165	$3+6+9+12+15+18+21+24+27+30=$ $=(3+27)+(6+24)+(9+21)+(12+18)++30+15=$ $=30\cdot 4+15=165$
2	Kāda ir divu mazāko pirmskaitļu summa?	5	$2+3=5$
3	Uz galda atrodas vairākas kastes, kas sakārtotas rindā. Pirmajā kastē ir 1024 konfektes, katrā nākamajā kastē ir divas reizes mazāk konfekšu nekā iepriekšējā kastē. Kāds lielākais skaits kastu var atrasties uz galda, ja katrā kastē ir vismaz 10 konfektes?	7	Konfekšu skaits kastēs ir 1024; 512; 256; 128; 64; 32; 16, ja būtu vēl viena kaste, tad tajā būtu 8 konfektes, bet uzdevumā teikts, ka katrā kastē ir vismaz 10.
4	Tirgus dienas rītā saimnieks vienādās kastēs rūpīgi sapakoja vistu olas. Braucot uz tirgu, nelaimīgi gadījās, ka puse no kastēm izkrita no mašīnas piekabes un olas saplīsa. Piekabē palika puse olu, kuru skaits bija 287. Cik kastes olu saimnieks bija sapakojis no rīta, ja zināms, ka katrā kastē ir vismaz 2 olas, bet nav vairāk kā 10 olas, un visās kastēs ir vienāds olu skaits?	82	Tā kā $287=7\cdot 41$, tad varam secināt, ka vienā kastē ir 7 olas un kopā piekabē palika 41 kaste. Sākumā kastu bija divreiz vairāk, tātad sākumā bija 82 kastes.
5	Figūra izveidota no simts 5-rūtiņu figūrām, kuras pakāpienveidā saliktas viena virs otras. Kāds ir šīs figūras perimetrs centimetros, ja rūtiņas malas garums ir 1 cm? Piemēram, attēlā redzama figūra, kas sastāv no četrām 5-rūtiņu figūrām. 	408	Var ievērot, ka, uzliekot jaunu 5-rūtiņu figūru, kopējais figūras perimetrs palielinās par 4 cm (nāk klāt augšējās 5-rūtiņu figūras “treknā” līnija, kuras garums ir 8 cm, un nāk nost tās “raustītā” līnija, kuras garums ir 4 cm) . Vienas 5-rūtiņu figūras perimetrs ir 12 cm, uzliekot virsū 99 figūras, kopējais perimetrs būs $12+4\cdot 99=408$ cm.

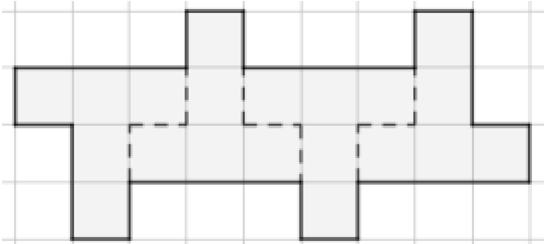
6	Divām kosmētikas salona darbiniecēm kopā ir septiņas klientes, un katra no tām vēlas, lai viņai veic manikīru. Četras klientes vēlas arī sejas kopšanas procedūru. Katrai darbiniecei vajag 15 minūtes, lai veiktu sejas kopšanas procedūru, un 5 minūtes manikīram. Abas darbinieces var veikt gan manikīru, gan sejas procedūru, bet, apkalpojot kādu klienti, nevar iesākto procedūru pārtraukt, lai to turpinātu otra darbiniece. Kāds ir īsākais laiks (minūtēs), kurā viņas var apkalpot visas septiņas klientes?	50	Lai pamatotu, ka 50 minūtes ir īsākais laiks, mums jāparāda, ka 50 minūtēs to var izdarīt, un jāpierāda, ka īsākā laikā to nevar. Ja darbinieces klientes sadala gandrīz vienādi: 1. darbiniece: $15+15+5+5+5+5$, 2. darbiniece: $15+15+5+5+5$, tad redzams, ka ar 50 minūtēm pietiek. Nākamais īsākais iespējamais laiks būtu 45 min, bet redzams, ka ar to nepietiek, jo visu procedūru kopējais garums ir 95 min, kas ir vairāk nekā $2 \cdot 45$ min.
7	Ciemata veikalā pudele piena maksā 55 centus un maizes kukulis maksā 1,20 eiro. Mārtiņš iztērēja 5,80 eiro, nopērkot dažus maizes kukuļus un dažas pudeles piena. Cik maizes kukuļu nopirka Mārtiņš?	3	$$580 = 120 \cdot 3 + 55 \cdot 4$$ Atbildi var atrast, pārlasot variantus (pārbaudot, kurš no skaitļiem: $580-120$, $580-2\cdot 120$, $580-3\cdot 120$ utt. dalās ar 55).
8	Cik krustpunktu ir trīs dotajām taisnēm (skat. att.)? 	3	Redzams, ka nekādas divas taisnes nav paralēlas, tātad tām ir visi 3 krustpunkti. *Atceries!* Taisne ir bezgalīga.
9	Robots kustas pa trijstūra ABC kontūru (skat. att.), kura katras malas garums ir 3 cm. Tas sāka kustību no virsotnes A un 2021 reizi apgāja trijstūra kontūru. Aprēķini robota veikto attālumu centimetros! 	18189	Trijstūra perimetrs ir $3 \cdot 3\,cm = 9\,cm$, tātad robots nogāja $9 \cdot 2021 = 18189\,cm$.
10	Cik skaitļi intervālā no 1 līdz 200 dalās ar 7?	28	Skaitļi, kas dalās, ir $7;\ 2\cdot 7;\ 3\cdot 7;\ \ldots;\ 28\cdot 7 = 196$.

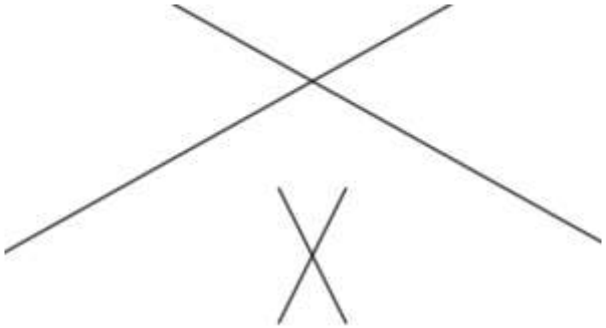
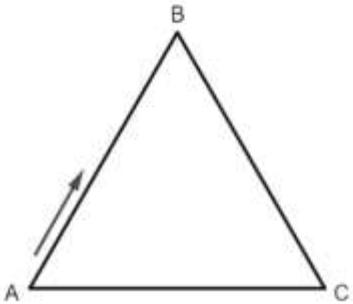
11	Kāds atlikums rodas, ja 10003 dala ar 4?	3	Var ievērot, ka 10000 dalās ar 4, tātad, 10003 dalot ar 4, atlikumā iegūs 3.
12	Ilze uz galda no vairākiem vienādiem klucīšiem salika figūru (skat. 1. att.). No cik klucīšiem sastāv izveidotā figūra, ja zināms, ka no augšas tā izskatās, kā parādīts 2. att.?  1. att.  2. att.	23	Skaitīt var dažādi, piemēram šādi. Pirmajā “stāvā” ir 10 klucīši (kā 2. att.), otrajā “stāvā” ir 9, trešajā “stāvā” ir 4. Tātad kopējais klucīšu skaits ir $$10 + 9 + 4 = 23.$$
13	Aprēķini un atbildi izsaki kilogramos! 25 t 50 kg + 13 t 950 kg – (24 t 8 c – 18 t 3 kg)	32203	25050 kg + 13950 kg – (24800 kg – 18003 kg) = 32203 kg
14	Vai skaitlis 2021 dalās ar 5?	nē	Jo tā pēdējais cipars nav ne 0, ne 5. *Atceries!* Skaitļis a dalās ar skaitli b, ja, a dalot ar b, atlikumā iegūst 0.
15	Cik trijstūri redzami dotajā zīmējumā? 	24	Mazākajā kvadrātā (atzīmēts ar raustīto līniju) redzami 8 trijstūri (4 “mazie” un 4 “lielie”). Riņķī A redzami 3 trijstūri (divi “mazie” un viens “lielais”), tādi ir 4 vietās. Ovālā B redzams viens trijstūris, tādi arī ir 4 vietās. Līdz ar to kopējais trijstūru skaits ir $$8 + 3 \cdot 4 + 4 = 24.$$ 

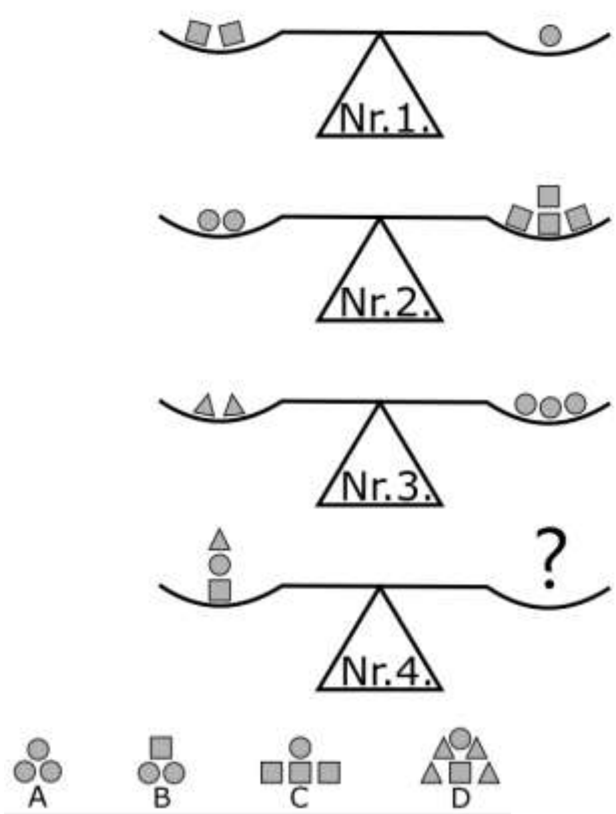
16	Flīzes raksts veidots no četriem pusriņķiem (skat. att. vienu flīzi). Kāds ir flīzes perimetrs centimetros, ja pusriņķa rādiuss ir 4 cm? 	64	Flīzes malas garums sastāv no diviem pusriņķu diametriem, tātad tas ir $4\ cm \cdot 2 \cdot 2 = 16\ cm$. Tātad tās perimetrs ir $16 \cdot 4 = 64\ cm$.
17	Taisnstūra laukums ir 71 cm^2 un tā malu garumi centimetros ir naturāli skaitļi. Kāds ir taisnstūra perimetrs centimetros?	144	Tā kā 71 ir pirmskaitlis, tad vienīgie iespējamie taisnstūra malu garumi ir 1 cm un 71 cm (lai to reizinājums būtu 71). Tātad tā perimetrs ir $(1 + 71) \cdot 2 = 144$ cm.
18	Kura no figūrām ir visvieglākā? 	kvadrāts 	Ievērosim, ka, ja no svaru kausa abām pusēm mēs noņemsim vienādus “komplektus”, tad svari savu stāvokli nemainīs. No pirmo svaru abām pusēm varam noņemt riņķi un kvadrātu, smagākajā (kreisajā) kausā mums paliks riņķis, vieglākajā (labajā) trijstūris. Tātad riņķis ir smagāks nekā trijstūris. Līdzīgi no otro svaru abām pusēm varam noņemt divus riņķus, divus trijstūrus un divus kvadrātus. Smagākajā (labajā) pusē paliks trijstūris, vieglākajā (kreisajā) kvadrāts. Tātad trijstūris ir smagāks nekā kvadrāts. Tā kā riņķis ir smagāks nekā trijstūris, kas savukārt ir smagāks nekā kvadrāts, tad secinām, ka kvadrāts ir visvieglākais.

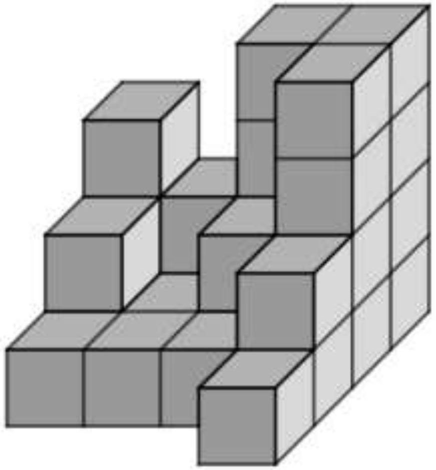
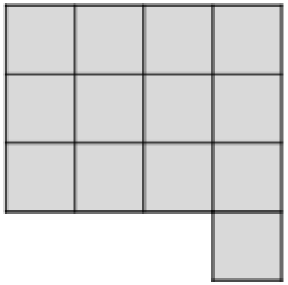
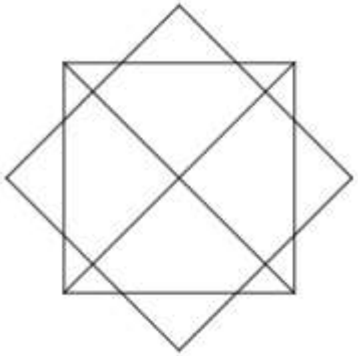
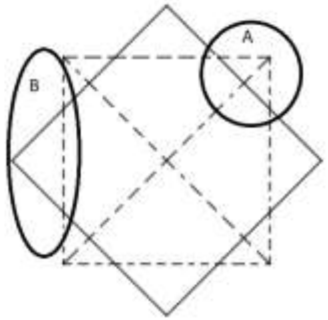
19	Cik dažādos veidos pa zīmējumā attēlotajiem ceļiem var nokļūt no punkta A uz punktu B? Pa ceļiem var pārvietoties tikai bultiņu norādītajā virzienā. 	4	Iespējamie ceļi ir ACDB, ACEB, AFEB, AFB. 
20	Visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 2 eiro monētām, atrodas taisnstūrī, bet visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 5 eiro banknotēm, atrodas riņķī. Kurā plaknes daļā atrodas grāmata, kas maksā 7 eiro? 	N	Tā kā 7 eiro nevar samaksāt tikai ar 2 eiro monētām, ne arī tikai ar 5 eiro banknotēm, tad tas neatrodas ne taisnstūrī, ne riņķī.
21	Visi skaitļi, kas dalās ar 20, atrodas taisnstūrī, bet visi skaitļa 20 dalītāji atrodas aplī. Kurā plaknes daļā atrodas skaitlis 5? 	M	Skaitlis 5 nedalās ar 20, tātad tas neatrodas taisnstūrī. Bet 5 ir skaitļa 20 dalītājs, tātad tas atrodas aplī.
22	Telpā ir 3 cilvēki. Cik dažādās secībās viņi var pamest šo telpu?	6	Apzīmēsim cilvēkus ar A, B un C, tad ir iespējamas sešas dažādas secības: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

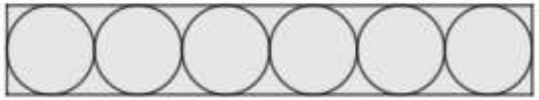
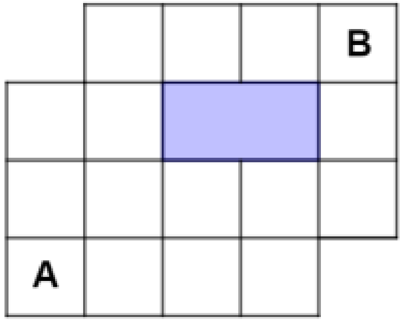
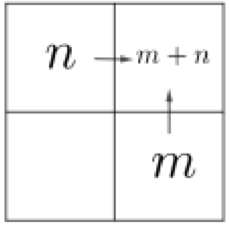
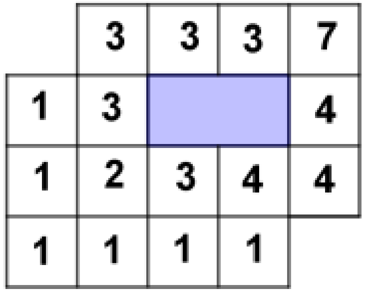
6. klase

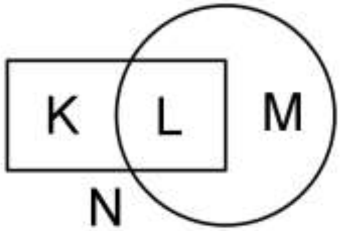
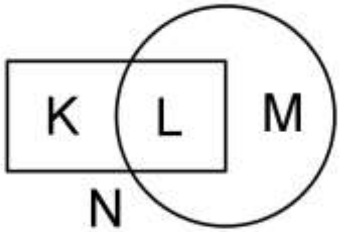
Nr.	Uzdevums	Atbilde	Īss risinājums
1	Kāda ir pirmo 10 pirmskaitļu summa?	129	$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129$
2	Fasēšanas cehā ir novietotas vairākas kastes ar vitamīnu tabletēm. Pirmajā kastē ir 160 tūkstoši tablešu. Otrajā kastē ir par vienu piektdaļu mazāk tablešu nekā pirmajā kastē. Trešajā kastē ir par vienu piektdaļu mazāk nekā otrajā kastē, bet ceturtajā – par vienu piektdaļu mazāk tablešu nekā trešajā kastē. Novērtē pirmās un ceturtās kastes tablešu skaita starpību! A) mazāk nekā 10000 B) no 10000 līdz 100000 C) no 100000 līdz 1000000 D) vairāk nekā 1000000	B	Tā kā katrā kastē ir par $\frac{1}{5}$ mazāk nekā iepriekšējā, tad katrā nākamajā kastē ir $\frac{4}{5}$ no iepriekšējās kastes tablešu skaita. Tātad otrajā kastē ir $160000\cdot\frac{4}{5}=128000$ tablešu, trešajā kastē ir $128000\cdot\frac{4}{5}=102400$ tablešu, ceturtajā kastē ir $102400\cdot\frac{4}{5}=81920$ tablešu. Starpība tablešu skaitam 1. un 4. kastē ir $160000-81920=78080$. Piezīme. Tā kā $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, tad, lai skaitli reizinātu ar $\frac{4}{5}$, to var izdalīt ar 10 un reizināt ar 8. Piemēram, $$160000\cdot\frac{4}{5}=\frac{160000}{10}\cdot 8=16000\cdot 8=128000.$$
3	Figūra izveidota no divdesmit piecām T-veida piecu rūtiņu figūrām, tās liekot rindā vienu aiz otras un katru otro T-veida figūru apgriežot otrādi. Kāds ir šīs figūras perimetrs centimetros, ja rūtiņas malas garums ir 1 cm? Piemēram, attēlā redzama figūra, kas sastāv no četrām šādi saliktām T-veida figūrām. 	156	Ievērosim, ka pie jau esošās figūras, pieliekot jaunu T burtu, kopējais figūras perimetrs palielinās par 6 cm (nāk klāt malējā T burta "treknā līnija", kuras garums ir 9 cm, un nāk nost tā "raustītā" līnija, kuras garums ir 3 cm). Viena T burta perimetrs ir 12 cm, pieliekot klāt vēl 24 citus T burtus, kopējais perimetrs būs $$12+24\cdot 6=156\ cm.$$
4	Aprēķini lauztās līnijas garumu centimetros, ja tai ir 6 posmi, pirmā posma garums ir 5 cm, bet katra nākamā posma garums ir par 2 cm garāks nekā iepriekšējais!	60	$5+7+9+11+13+15=60\ cm$

5	Cik krustpunktu ir četrām dotajām taisnēm (skat. att.)? 	6	Redzams, ka nekādas no 4 taisnēm nav paralēlas, līdz ar to katra taisne krusto visas 3 pārējās, tātad krustpunktu skaits ir $4\cdot 3 : 2 = 6$.
6	Ja skaitli A kāpina trešajā pakāpē un pieskaita 2, tad rezultātā iegūst skaitli 127. Nosaki A vērtību!	5	$5\cdot 5\cdot 5+2=127$ Atbildi var viegli atrast, ievērojot, ka A trešajā pakāpē būs $127-2=125$, tātad skaitlis A beigsies ar ciparu 5.
7	Robots kustas pa trijstūra ABC kontūru (skat. att.), kura visas malas ir vienāda garuma. Tas sāka kustību no virsotnes A un 41 reizi apgāja trijstūra kontūru, veicot 369 cm. Nosaki trijstūra malas garumu centimetros! 	3	Robota noietais attālums ir 41 reizi trijstūra perimetrs, tātad trijstūra ABC perimetrs ir $369\ cm : 41 = 9\ cm$. Tātad trijstūra malas garums ir $9\ cm : 3 = 3\ cm$.
8	Divām kosmētikas salona darbiniecēm kopā ir septiņas klientes, un katra no tām vēlas, lai viņai veic manikīru. Četras klientes vēlas arī sejas kopšanas procedūru. Katrai darbiniecei vajag 15 minūtes, lai veiktu sejas kopšanas procedūru, un 5 minūtes manikīram. Abas darbinieces var veikt gan manikīru, gan sejas procedūru, bet, apkalpojot kādu klienti, nevar iesākto procedūru pārtraukt, lai to turpinātu otra darbiniece. Kāds ir īsākais laiks minūtēs, kurā viņas var apkalpot visas septiņas klientes?	50	Lai pamatotu, ka 50 minūtes ir īsākais laiks, mums jāparāda, ka 50 minūtēs to var izdarīt, un jāpierāda, ka īsākā laikā to nevar. Ja darbinieces klientes sadala gandrīz vienādi: 1. darbiniece: $15+15+5+5+5+5$, 2. darbiniece: $15+15+5+5+5$, tad redzams, ka ar 50 minūtēm pietiek. Nākamais īsākais iespējamais laiks būtu 45 min, bet redzams, ka ar to nepietiek, jo visu procedūru kopējais garums ir 95 min, kas ir vairāk nekā $2\cdot 45$ min.
9	Cik skaitļi intervālā no 1 līdz 600 dalās ar 7?	85	Dalās visi skaitļi $7;\ 2\cdot 7;\ 3\cdot 7;\ \ldots;\ 84\cdot 7;\ 85\cdot 7=595$.

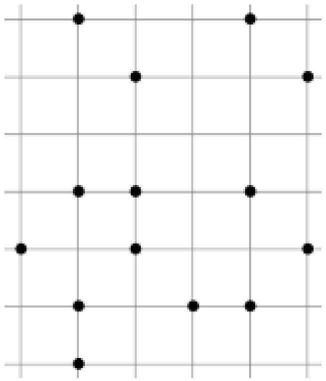
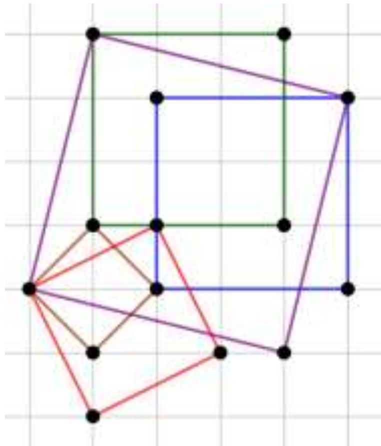
10	Skolā 32 skolēni piedalījās olimpiādē, bet 8 skolēni nepiedalījās olimpiādē. Cik procentu no skolas skolēniem nepiedalījās olimpiādē?	20	$\frac{8}{8+32}=\frac{1}{5}=20\%$
11	Kurš no figūru komplektiem jānovieto uz svariem Nr. 4., lai tie atrastos līdzsvarā?  	A	No svariem Nr.1 mēs varam secināt, ka riņķis sver tikpat, cik divi kvadrāti. Ja mēs uz svariem Nr.3 aizstāsim 3 riņķus ar 6 kvadrātiem, tad varēsim secināt, ka divi trijstūri sver tikpat, cik 6 kvadrāti, jeb viens trijstūris sver tikpat, cik trīs kvadrāti. Tātad uz svariem Nr.4 labajā pusē esošo komplektu mēs varam aizstāt ar trijstūris + riņķis + kvadrāts = 3 kvadrāti + 2 kvadrāti + kvadrāts = = 6 kvadrāti = 3 riņķi. *Piezīme.* Svari Nr.2 šajā spriedumā netika izmatoti, tie pēc būtības tikai atkārto to, kas dots ar svariem Nr.1.
12	Kāds atlikums rodas, ja 10035 dala ar 6?	3	Var ievērot, ka 10032 dalās ar 6 (tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar 3).

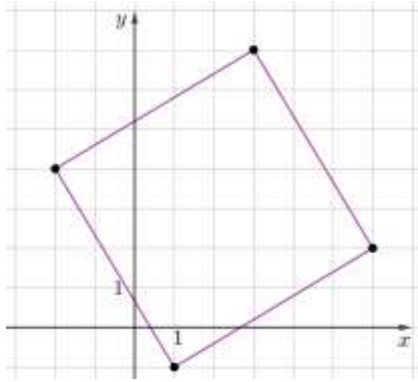
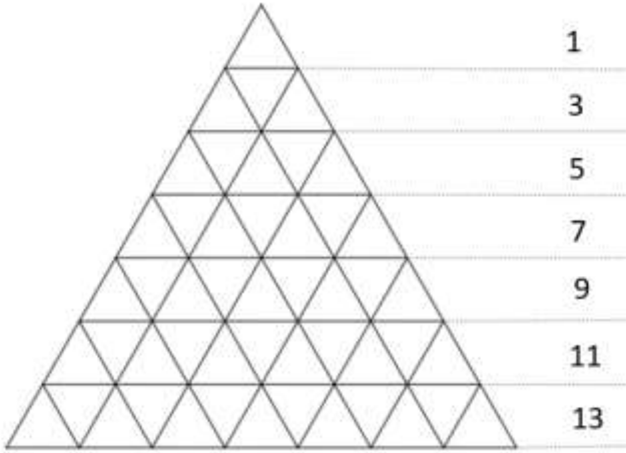
13	Baiba uz galda no vairākiem vienādiem klucīšiem salika figūru (skat. 1. att.). No cik klucīšiem sastāv izveidotā figūra, ja zināms, ka no augšas tā izskatās, kā parādīts 2. att.?  1. att.  2. att.	28	Skaitīt var dažādi, piemēram, šādi. Pirmajā “stāvā” ir 13 klucīši (kā 2. att.), otrajā “stāvā” ir 8, trešajā “stāvā” ir 4, ceturtajā “stāvā” ir 3. Kopā $13 + 8 + 4 + 3 = 28$ klucīši.
14	Aprēķini un atbildi izsaki minūtēs! (2 h 41 min + 5 h 59 min) : 2 – 28 min	232	(161 min + 359 min) : 2 – 28 min = 232 min.
15	Vai skaitlis 20212021 dalās ar 5?	nē	Jo tas nebeidzas ne ar 0, ne ar 5.
16	Cik trijstūri redzami dotajā zīmējumā? 	24	Mazākajā kvadrātā (atzīmēts ar raustīto līniju) redzami 8 trijstūri (4 “mazie” un 4 “lielie”). Riņķī A redzami 3 trijstūri (divi “mazie” un viens “lielais”), tādi ir 4 vietās. Ovālā B redzams viens trijstūris, tādi arī ir 4 vietās. Līdz ar to kopējais trijstūru skaits ir $$8 + 3 \cdot 4 + 4 = 24.$$ 

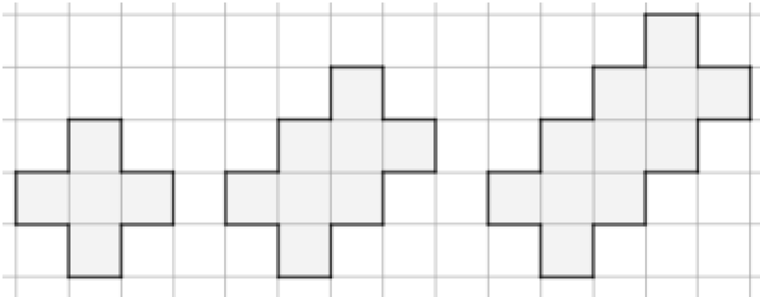
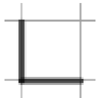
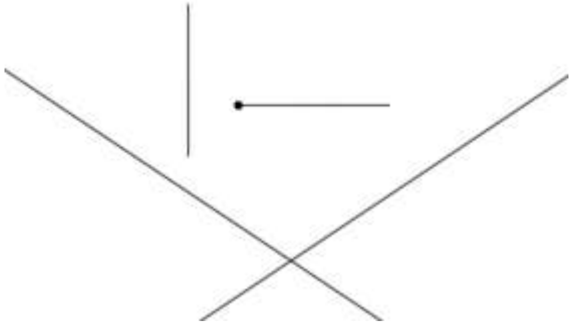
17	Kāds ir taisnstūra perimetrs, ja riņķa līnijas rādiuss ir 4 cm? 	112	Riņķa līnijas diametrs ir $2 \cdot 4\ cm = 8\ cm$. Taisnstūra platums ir vienāds ar riņķa līnijas diametru (8 cm), bet garums vienāds ar sešiem riņķa līnijas diametriem ($6 \cdot 8\ cm = 48\ cm$). Tātad tā perimetrs ir $(8 + 48) \cdot 2 = 112\ cm$.
18	*Varde* vienā lēcienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos *varde* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās ir šķērslis, tajās *varde* neiet.  	7	Atradīsim rezultātu pakāpeniski, atrodot, cik veidos varde var nokļūt katrā rūtiņā. Katrā rūtiņā varde var nonākt vai nu no apakšas, vai no kreisās puses. Ja rūtiņā, kas atrodas zem aplūkojamās, varde var nonākt m veidos, bet rūtiņā, kas ir pa kreisi no aplūkojamās, tā var nonākt n veidos, tad aplūkojamajā rūtiņā tā var nonākt $m + n$ veidos (m veidos caur apakšējo rūtiņu un n veidos caur rūtiņu pa kreisi). Ierakstīsim katrā rūtiņā, cik veidos varde tajā var nonākt, sākot no kreisā apakšējā stūra. Katrā rūtiņā mums jāraksta summa skaitļiem, kas atrodas zem un pa kreisi no aplūkojamās rūtiņas.  
19	Kāds cipars jāievieto y vietā, lai skaitlis 5783y1y0 dalītos ar 90?	6	Lai skaitlis dalītos ar 90, tam jādalās ar 9 un ar 10. Ar 10 dotais skaitlis noteikti dalās (jo tā pēdējais cipars ir 0), ar 9 tas dalīsies, ja tā ciparu summa dalīsies ar 9. Tātad $5 + 7 + 8 + 3 + y + 1 + y + 0$ jādalās ar 9 jeb $24 + 2 \cdot y$ jādalās ar 9. Redzams, ka vienīgais, kas der, ir $y = 6$.
20	Maruta nokrāsoja $\frac{1}{3}$ no kubveida kastes virsmas laukuma dzeltenā krāsā. Cik kvadrātcentimetri no kastes virsmas laukuma palika nenokrāsoti, ja kastes šķautnes garums ir 7 cm?	196	Kuba vienas skaldnes laukums ir $7 \cdot 7 = 49$ cm^2, tā kopējais virsmas laukums ir $49 \cdot 6 = 294$ cm^2. Maruta nenokrāsoja $\frac{2}{3}$ no tā, tas ir, $294 \cdot \frac{2}{3} = 196$ cm^2.
21	Cik dažādās secībās 3 skolēni var nostāties rindā pie kases?	6	Apzīmēsim skolēnus ar A, B, C, tad šīs secības ir ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

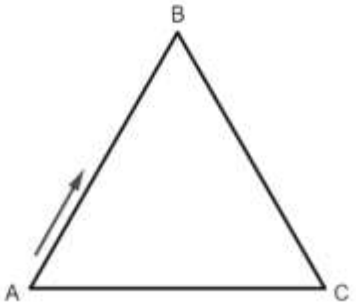
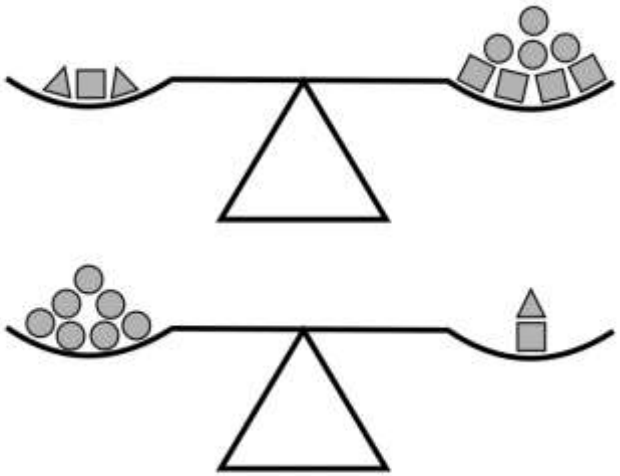
22	Visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 2 eiro monētām, atrodas taisnstūrī, bet visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 5 eiro banknotēm, atrodas riņķī. Kurā plaknes daļā atrodas grāmata, kas maksā 17 eiro? 	N	Tā kā 17 eiro nevar samaksāt tikai ar 2 eiro monētām, ne arī tikai ar 5 eiro banknotēm, tad grāmata neatrodas ne taisnstūrī, ne riņķī.
23	Visi skaitļi, kas dalās ar 10, atrodas taisnstūrī, bet visi skaitļa 10 dalītāji atrodas aplī. Kurā plaknes daļā atrodas skaitlis 10? 	L	Tā kā skaitlis 10 dalās ar 10 un ir arī 10 dalītājs, tad tas atrodas gan taisnstūrī, gan aplī.

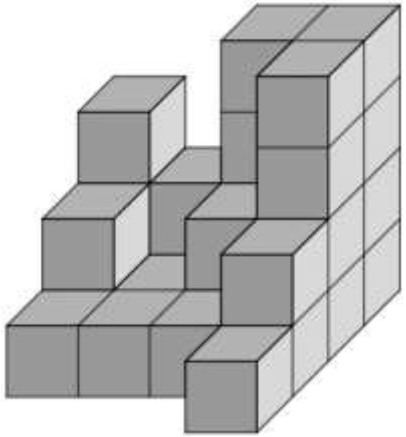
7. klase

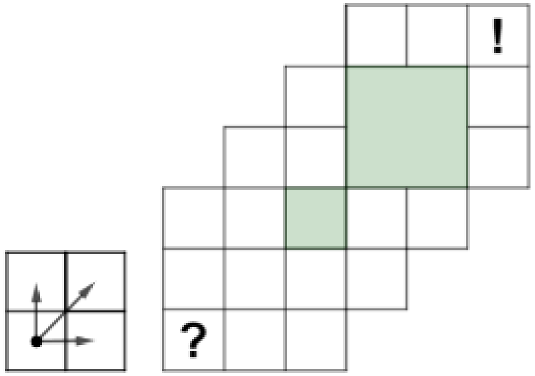
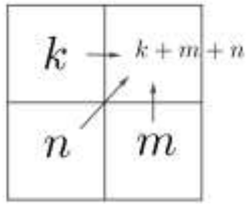
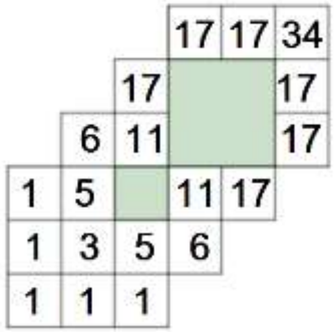
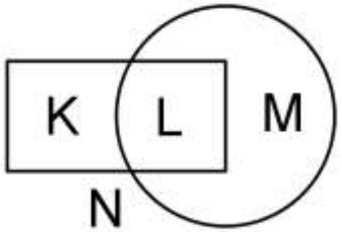
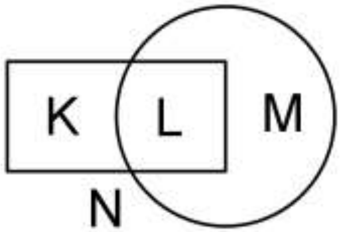
Nr.	Uzdevums	Atbilde	Īss risinājums
1	Cik dažādos veidos 5 skolēni var nostāties rindā?	120	Pirmo skolēnu var izvēlēties 5 veidos, otro – 4 veidos, trešo – 3 veidos, ceturto – 2 veidos. Tātad kopā ir $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ veidi.
2	Pa apli uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (tieši šādā secībā). Jebkurus divus skaitļus, kas neatrodas blakus, drīkst mainīt vietām. Kāds mazākais maiņu skaits ir vajadzīgs, lai skaitļi pa apli būtu uzrakstīti pretējā secībā?	3	Jāsamaina 2 ar 8, 3 ar 7, 4 ar 6.
3	Zīmējumā (skat. zemāk) bija uzzīmēti vairāki kvadrāti, bet Jevgēnijs izdzēsa kvadrātu malas tā, ka palika redzamas tikai visas kvadrātu virsotnes. Cik kvadrāti ar dotajām virsotnēm bija attēloti sākotnējā zīmējumā? 	5	
4	Taisne iet caur punktiem (-3; 2) un (6; 5). Kurš punkts atrodas uz šīs taisnes? A (1; 3,5) B (8; 6) C (-12; -1) D (-5; 1)	C	Var arī uzzīmēt taisni un no grafika nolasīt prasīto.

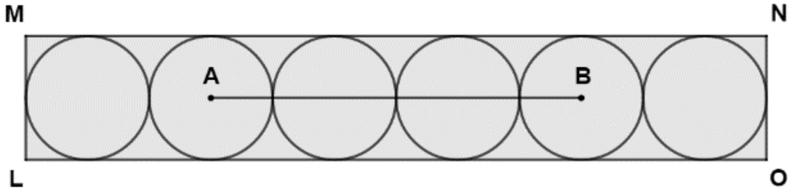
5	Kvadrāta trīs virsotņu koordinātas ir (3; 7), (6; 2), (-2; 4). Nosaki ceturtās virsotnes koordinātu summu!	0	Ceturtās virsotnes koordinātas ir $(1; -1)$. Tātad koordinātu summa ir $1 - 1 = 0$. 
6	Vienādmalu trijstūri ar malas garumu 7 sagrieza mazākos vienādmalu trijstūrīšos, kuru malas garums ir 1. Cik mazos trijstūrīšus ieguva?	49	Ievērojam, ka katrā nākamajā *slānī* ir par 2 trijstūrīšiem vairāk nekā iepriekšējā *slānī*, tātad pavisam ir $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ trijstūrīši. 
7	Ja Dace nopirks 11 klades, viņai vēl paliks 50 centi. Savukārt, ja viņa pirktu 15 klades, tad 70 centu viņai pietrūktu. Cik centu ir Dacei?	380	Pieņemsim, ka 11 klades Dace jau ir nopirkusi. Tad viņai ir atlikuši 50 centi. Iedosim viņai vēl 70 centus, tagad viņa var nopirkt vēl tieši 4 klades. Tātad 4 klades maksā 120 centus, tātad viena klade maksā 30 centus. Tātad 11 klades maksā $11 \cdot 30 = 330$ centus un Dacei ir $330 + 50 = 380$ centu.

8	Ingrīda rūtiņu plaknē zīmēja figūras – sākumā uzzīmēja *krustu*, katrai nākamai figūrai pievienoja *stūrīti*, kas sastāv no 3 rūtiņām (skat. 1. att., kur redzamas pirmās trīs figūras). No cik divu posmu leņķīšiem (skat. 2. att.) var salikt Ingrīdas uzzīmētās figūras, kas sastāv no 35 rūtiņām, kontūru?  1. att.  2. att.	26	Katru nākamo figūru var iegūt, iepriekšējai figūrai noņemot nost vienu leņķīti un pieliekot klāt trīs citus, tātad katrai nākamajai figūrai vajag par 2 leņķīšiem vairāk. Figūru, kas sastāv no 35 rūtiņām, var iegūt krustam (5 rūtiņas) pievienojot 10 stūrīšus (· $10 = 30$ rūtiņas). Tā kā krusta kontūru var salikt no 6 leņķīšiem, tad tai būs vajadzīgi $6 + 10 \cdot 2 = 26$ leņķīši.
9	Cik krustpunktu ir trīs dotajām taisnēm un staram (skat. att.)? 	4	Trijām taisnēm kopā ir 3 krustpunkti, stars krusto tikai vienu no tām.
10	Guna skaitli 12345678911111111198765432 kāpināja trešajā pakāpē un pēc tam iegūtajam rezultātam pieskaitīja 2. Kāds ir galarezultāta pēdējais cipars?	0	Tā kā reizinājuma pēdējais cipars ir atkarīgs tikai no reizinātāju pēdējiem cipariem, tad Gunas skaitli, izkāpinot kubā, tā pēdējais cipars būs $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Pieskaitot tam divi, pēdējais cipars būs 0.

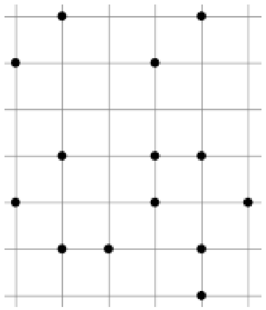
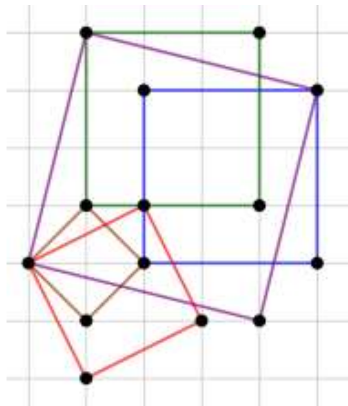
11	Robots kustas pa trijstūra ABC kontūru (skat. att.). Tas sāka kustību no virsotnes A un nogāja 2021 cm. Uz kuras trijstūra malas robots apstājās, ja katras trijstūra malas garums ir 4 cm? 	BC	Trijstūra perimetrs ir $4 \cdot 3 = 12$ cm. Ievērosim, ka skaitlis 2016 dalās ar 12 (jo tas dalās gan ar 4, gan ar 3). Tātad tad, kad robots būs nogājis 2016 cm, tas būs atgriezies punktā A. Tam jānoiet vēl tikai 5 cm, pēc kuriem tas atradīsies uz malas BC (1 cm no punkta B un 3 cm no punkta C).
12	Skolā 16 skolēni piedalījās olimpiādē, bet 64 skolēni nepiedalījās olimpiādē. Cik procentu no skolas skolēniem piedalījās olimpiādē?	20	$\frac{16}{64+16} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} = 20\%$
13	Kāda ir riņķa un kvadrāta masa, ja trijstūra masa ir 5 kg? 	Riņķis 1 kg Kvadrāts 2 kg	Pieliksim pirmajiem svariem abās pusēs vēl pa vienam kvadrātam (tad tie joprojām būs līdzsvarā). No tā secināsim, ka 2 trijstūri un 2 kvadrāti sver tikpat, cik 4 riņķi un 5 kvadrāti. Uzliksim otrajiem svariem abās pusēs vēl tieši tik, cik tur jau ir (kreisajā pusē 7 riņķus, labajā trijstūri un kvadrātu), tad tie joprojām būs līdzsvarā. Tātad 2 trijstūri un 2 kvadrāti sver tikpat, cik 14 riņķi. Salīdzinot iegūtos rezultātus, varam secināt, ka 4 riņķi un 5 kvadrāti sver tikpat, cik 14 riņķi. Tātad 5 kvadrāti sver tikpat, cik 10 riņķi, jeb 1 kvadrāts sver tikpat, cik 2 riņķi. Atgriezīsimies pie pirmajiem svariem, noņemsim no abām pusēm nost vienu kvadrātu un aizstāsim 4 riņķus ar 2 kvadrātiem (svari joprojām būs līdzsvarā). Iegūsim, ka divi trijstūri sver tikpat, cik 5 kvadrāti. Divi trijstūri sver 10 kg, tātad 5 kvadrāti arī sver 10 kg, un viens kvadrāts sver 2 kg, bet riņķis sver 1 kg.
14	Kāds atlikums rodas, ja 2021 dala ar 4?	1	2020 dalās ar 4.

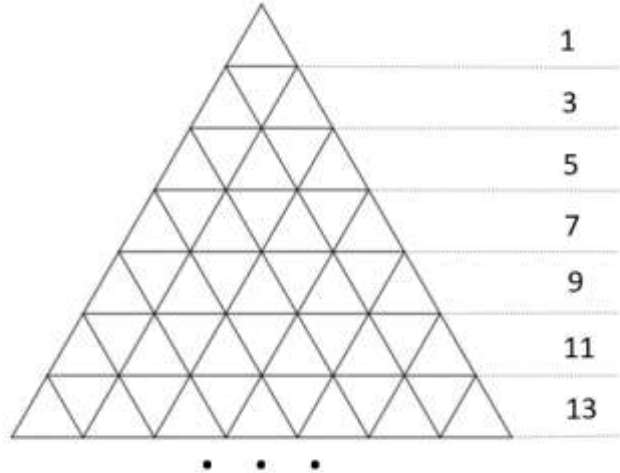
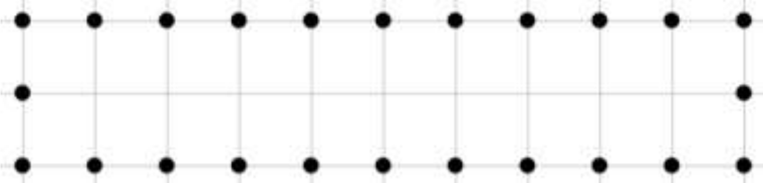
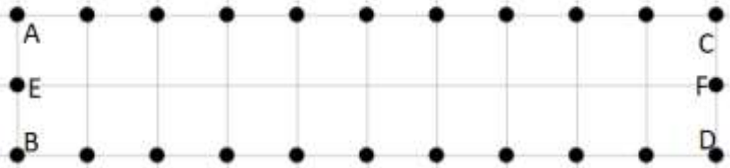
15	Sākotnēji klucīši bija sakārtoti kubā ar malas garumu 4 klucīši, taču kāds dažus klucīšus aiznesa prom. Cik klucīši tika aiznesti prom, ja tagadējais klucīšu izkārtojums redzams attēlā? 	36	Skaitīt var dažādi. No pirmā "stāva" ir aiznesti 3 klucīši, no otrā "stāva" – 8, no trešā – 12, no ceturtā – 13, kopā ir aiznesti $3+8+12+13=36$ klucīši.
16	Kāds skaitlis jāieraksta x vietā, lai vienādība $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{x}=2$$ būtu patiesa?	12	$$\frac{1}{x}=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{24-6-4-3-10}{12}=\frac{1}{12}$$
17	Kāds cipars jāieraksta m vietā, lai skaitlis $\overline{12345689m8}$ dalītos ar 36?	8	Lai skaitlis dalītos ar 36, tam jādalās ar 9 un ar 4. Lai tas dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Tātad $1+2+3+4+5+6+8+9+m+8$ dalās ar 9 jeb $46+m$ dalās ar 9. Tātad vienīgā iespējamā m vērtība ir 8. Tā kā skaitlis tagad beidzas ar 88, tad tas noteikti dalās arī ar 4.

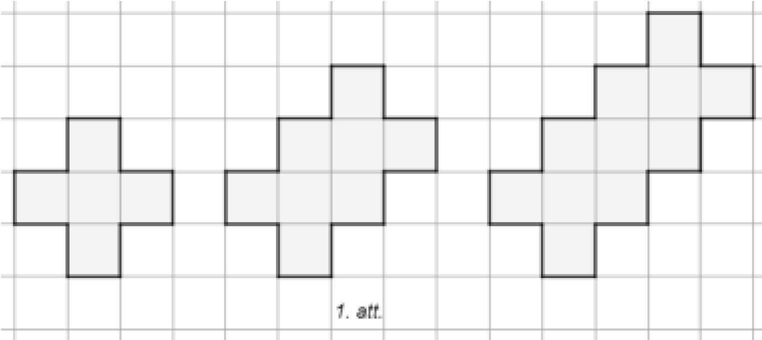
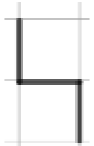
18	*Varde* vienā lēcienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu, vienu rūtiņu pa labi vai arī vienu rūtiņu pa diagonāli (skat. attēlu pa kreisi). Cik dažādos veidos *varde* no rūtiņas “?” var nokļūt rūtiņā “!” (skat. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās ir šķērslis, tajās *varde* neiet.  	34	Katrā rūtiņā varde var nonākt vai nu no kreisās puses, vai no apakšas, vai pa diagonāli no kreisās apakšējās puses. Pieņemsim, ka rūtiņā pa kreisi varde var nonākt k veidos, apakšējā rūtiņā – m veidos, bet rūtiņā pa diagonāli kreisajā pusē apakšā – n veidos. Tad aplūkojamajā rūtiņā varde var nonākt $k + m + n$ veidos. Līdz ar to, varam pakāpeniski aprēķināt, cik veidos varde var nonākt katrā rūtiņā, sākot no jautājuma zīmes (kur tā var nonākt vienā veidā, jo tā jau tur ir).  
19	Visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 2 eiro monētām, atrodas taisnstūrī, bet visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 5 eiro banknotēm, atrodas riņķī. Kurā plaknes daļā atrodas grāmata, kas maksā 27 eiro?  	N	Tā kā 27 eiro nevar samaksāt tikai ar 2 eiro monētām, ne arī tikai ar 2 eiro banknotēm, tad šī grāmata neatrodas ne taisnstūrī, ne riņķī.
20	Visi skaitļi, kas dalās ar 15 atrodas taisnstūrī, bet visi skaitļa 15 dalītāji atrodas aplī. Kurā plaknes daļā atrodas skaitlis 45?  	K	Tā kā 45 dalās ar 15, bet nav skaitļa 15 dalītājs, tad tas atrodas taisnstūrī, bet neatrodas aplī.

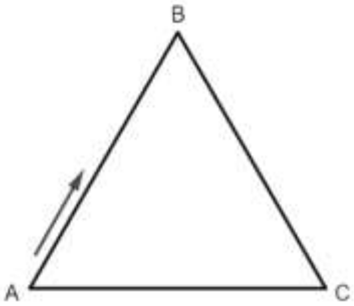
21	Kāds ir nogriežņa AB garums centimetros, ja punkti A un B atrodas riņķa līniju centros un taisnstūra LMNO perimetrs ir 112 cm? 	24	Ja riņķa līnijas diametrs ir D, tad taisnstūra platums ir D, garums ir $6D$ un perimetrs ir $(D+6D)\cdot 2 = 14D$. Tātad riņķa līnijas diametrs $D = 112 : 14 = 8$ cm. Attālums starp A un B ir $R + D + D + R = 3D = 24$ cm, kur R ir riņķa līnijas rādiuss.
22	Kādai jābūt punkta abscisai, lai punkts, kura ordināta ir 4, atrastos uz funkcijas $y = 3x - 71$ grafika?	25	Ievietojot $y = 4$, iegūstam $3x = 75$ jeb $x = 25$.
23	Lineārās funkcijas $y = ax + b$ grafiks ir paralēls funkcijas $y = 71x + 2021$ grafikam un iet caur punktu $A(2; 200)$. Nosaki b vērtību!	58	Grafiki ir paralēli, ja to virziena koeficienti sakrīt, tātad $a = 71$. Ievietojot $y = 200$ un $x = 2$ iegūstam, ka $200 = 71 \cdot 2 + b$, no kurienes $b = 58$.

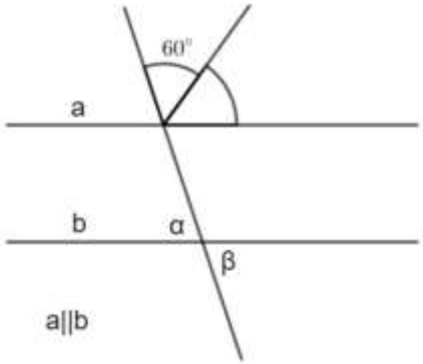
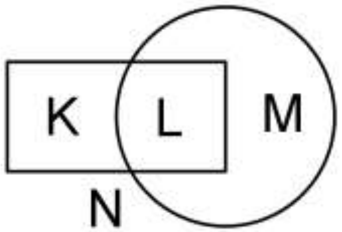
8. klase

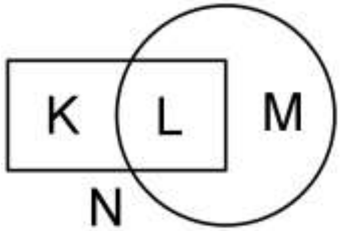
Nr.	Uzdevums	Atbilde	Īss risinājums
1	Kāda ir pirmo 10 pirmskaitļu summa?	129	$2+3+5+7+11+13+17+18+23+29=129$
2	Septiņi kasieri sēž ap apaļu galdu un gatavojas skaitīt naudu. Galvenajam kasierim Mārim ir 128 pakas ar naudu, bet pārējiem nav nevienas pakas ar naudu. Pusi no savām pakām Māris atdod abiem saviem blakus sēdētājiem, sadalot to vienādās daļās. Kad katrs kasieris pārskaita (pirmā naudas skaitīšana) viņam piederošo naudu, tad katrs kasieris (arī Māris) pusi no savām naudas pakām vienādās daļās atdod abiem saviem blakus sēdētājiem. Un tā viņi turpina darbu. Cik naudas pakas bija Mārim trešajā naudas skaitīšanas reizē?	40	Pieņemsim, ka Māris sēž vidū un virknes gali ir “savienoti riņķī”. Paku skaits pēc pirmās pārdales (pirmā skaitīšana): 0, 0, 32, **64**, 32, 0, 0. Paku skaits pēc otrās pārdales (otrā skaitīšana): 0, 8, 32, **48**, 32, 8, 0. Paku skaits pēc trešās pārdales (trešā skaitīšana): 2, 12, 30, **40**, 30, 12, 2.
3	Cik dažādos veidos 6 skolēni var nostāties rindā?	720	Pirmo skolēnu var izvēlēties 6 veidos, otro – 5, trešo – 4, ceturto – 3, piekto – 2. Tātad kopējais veidu skaits ir $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720$.
4	Pa apli uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (tieši šādā secībā pulksteņa rādītāja kustības virzienā). Jebkurus divus skaitļus, kas neatrodas blakus, drīkst mainīt vietām. Kāds mazākais maiņu skaits ir vajadzīgs, lai skaitļi aplī būtu pierakstīti šādā secībā 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 2, skatoties pulksteņa rādītāja kustības virzienā?	3	Var ievērot, ka skaitļi 1, 3, 5, 7 atrodas savās vietās, jāsamaina tikai pāra cipari. To var izdarīt ar 3 maiņām 2 ar 4, 2 ar 6, 2 ar 8.
5	Zīmējumā uz rūtiņu (skat. zemāk) bija attēloti vairāki kvadrāti, bet laika gaitā kvadrātu malas izdzisa un palika redzamas tikai visas kvadrātu virsotnes. Cik kvadrāti ar dotajām virsotnēm bija attēloti sākotnējā zīmējumā? 	5	

6	Taisne iet caur punktiem (3; 2) un (-6; 5). Kurš punkts atrodas uz šīs taisnes? A (-1; 3,5) B (-8; 6) C (12; -1) D (5; 1)	C	Pieņemsim, ka taisnes vienādojums ir $y = kx + b$. Ievietojot dotos punktus iegūstam, ka $2 = -3k + b$ un $5 = 6k + b$. Izsakām nezināmo b $b = 2 + 3k$ un $b = 5 - 6k$. Tātad $2 + 3k = 5 - 6k$. Līdz ar to $k = \frac{1}{3}$ un $b = 3$. Pārbaudot atbilžu variantus, redzam, ka $-1 = -12 \cdot \frac{1}{3} + 3$. *Piezīme.* Var arī atrisināt grafiski.
7	Vienādmalu trijstūri ar malas garumu 15 sagrieza mazākos vienādmalu trijstūrīšos, kuru malas garums ir 1. Cik mazos trijstūrīšus ieguva?	225	Ievērojam, ka katrā nākamajā *slānī* ir par 2 trijstūrīšiem vairāk nekā iepriekšējā *slānī* (attēlā doti pirmie 7 *slāņi*), tātad mazo trijstūrīšu skaits ir $1 + 3 + 5 + +7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 =$ $= (1 + 29) + (3 + 27) + (5 + 25) + (7 + 23) + (9 + 21) + (11 + 19) +$ $+(13 + 17) + 15 = 30 \cdot 7 + 15 = 225.$ 
8	Cik trijstūrus ar laukumu 10 cm^2 var uzzīmēt tā, lai to virsotnes atrastos atzīmētajos punktos (skat. att.)? Rūtiņas malas garums ir 1 cm. 	24	Var ievērot, ka visa taisnstūra laukums ir 20 cm^2, tātad trijstūrim jāaizņem tieši puse no taisnstūra laukuma. Der 11 trijstūri ar virsotnēm punktos B un D un trešo virsotni uz augšējās malas, 11 trijstūri ar virsotnēm punktos A un C un trešo virsotni uz apakšējās malas, kā arī trijstūri AFB un CED. 

9	Ja Inese nopirks 11 klades, viņai vēl paliks 50 centi. Savukārt, ja viņa pirktu 15 klades, tad 70 centu viņai pietrūktu. Cik centu ir Inese?	380	Pieņemsim, ka 11 klades Inese jau ir nopirkusi. Tad viņai ir atlikuši 50 centi. Iedosim viņai vēl 70 centus, tagad viņa var nopirkt vēl tieši 4 klades. Tātad 4 klades maksā 120 centus, tātad viena klade maksā 30 centus. Tātad 11 klades maksā $11 \cdot 30 = 330$ centus un Inesei ir $330 + 50 = 380$ centu.
10	Ingrīda rūtiņu plaknē zīmēja figūras – sākumā uzzīmēja *krustu*, katrai nākamai figūrai pievienoja *stūrīti*, kas sastāv no 3 rūtiņām (skat. 1. att., kur redzamas pirmās trīs figūras). No cik trīs posmu stieplītēm (skat. 2. att.) var salikt Ingrīdas uzzīmētās figūras kontūru, kas sastāv no 50 rūtiņām?  1. att.  2. att.	24	Pieņemsim, ka rūtiņas malas garums ir 1. Katras nākamās figūras perimetrs ir par 4 lielāks nekā iepriekšējās (no pieliktā trijstūrīša nāk klāt 6 redzamās rūtiņu malas un nāk nost 2 neredzamās). Figūru, kas sastāv no 50 rūtiņām, var iegūt krustam (5 rūtiņas), pieliekot trijstūrīti (3 rūtiņas) 15 reizes. Sākumā krusta perimetrs ir 12, tātad šīs figūras perimetrs būs $$12 + 15 \cdot 4 = 72.$$ Katra trīs posmu stieplīte noklāj 3 rūtiņu malas, tāpēc vajadzīgas $72 : 3 = 24$ stieplītes.
11	Ilze skaitli 12345678777777777777765412 kāpināja kubā un pēc tam iegūtajam rezultātam pieskaitīja 2. Kāds ir galarezultāta desmitu (pirmspēdējais) cipars?	3	Tā kā reizinājuma pēdējie divi cipari ir atkarīgi tikai no reizinātāju diviem pēdējiem cipariem, tad rezultāts būs tāds pats kā, ja Ilze aprakstīto darītu ar skaitli 12. Tā kā $12^3 + 2 = 1730$, tad desmitu cipars būs 3.

12	Robots kustas pa trijstūra ABC kontūru (skat. att.). Tas sāka kustību no virsotnes A un nogāja 2031 cm. Uz kuras trijstūra malas robots apstājās, ja katras trijstūra malas garums ir 7 cm?  	AC	Trijstūra perimetrs ir 21 cm. Ievērosim, ka skaitlis 2016 dalās ar 21, tātad pēc tam, kad robots būs nogājis 2016 centimetrus, tas būs atgriezies punktā A. Vēl tam atlicis noiet 15 cm, pēc kuriem tas atradīsies uz malas AC (1 cm no punkta C).
13	Kāds mazākais naturālais skaitlis jāieliek x vietā, lai nevienādība $2\sqrt{50}+x>20$ būtu patiesa?	6	Ja $x=6$, tad nevienādība ir spēkā, jo $$\sqrt{50}>\sqrt{49}=7,$$ x nevar būt mazāks, jo $$\sqrt{50}<7{,}5=\sqrt{56{,}25},$$ tāpēc $$2\sqrt{50}+x<2\cdot 7{,}5+5=20$$
14	Vienādsānu trijstūra divu malu attiecība ir 2:4 un tā perimetrs ir 60 cm. Cik gara ir trijstūra pamata mala centimetros?	12	Šajā gadījumā jāievēro, ka īsākā mala nevar būt sānu mala (ja tā būtu, tad neizpildītos trijstūra nevienādība $2x+2x>4x$). Tātad 2:4 ir pamata attiecība pret sānu malu. Tātad trijstūra pamats ir $2x$, sānu mala ir $4x$ un perimetrs ir $2x+4x+4x=10x$, no kurienes iegūstam, ka $x=6$ cm un pamata mala ir $2x=12$ cm.
15	Kāds skaitlis jāieraksta x vietā, lai vienādība $$\frac{2^{30}\cdot 8^4}{4^{20}}=2^x$$ būtu patiesa?	2	Ievērojam, ka $8^4=2^{12}$ un $4^{20}=2^{40}$. Tātad $$x=30+12-40=2.$$
16	Cik skaitļi intervālā no 1 līdz 1000 dalās ar 7?	142	Tie ir $7;\ 2\cdot 7;\ 3\cdot 7;\ \ldots;\ 142\cdot 7=994$.
17	Novembra pirmajās astoņpadsmit dienās Rihards katru dienu izlasīja 5 lappuses no detektīvromāna, bet katrā no atlikušajām novembra dienām – 15 lappuses. Cik lappuses novembrī vidēji vienā dienā izlasīja Rihards?	9	Kopā novembrī Rihards izlasīja $5\cdot 18+15\cdot 12=270$ lappuses. Tātad vienā dienā vidēji $270:30=9$ lappuses.

18	Nosaki leņķu α un β summu (grādos)!  	120	Ievērojam, ka $\beta = \alpha$ (krustleņķi) un $\alpha = \gamma$ (kāpšļu leņķi), kā arī $\gamma = 180° - 2 \cdot 60° = 120°$ (blakusleņķi). Tātad $\alpha + \beta = 60° + 60° = 120°$.
19	Vienādsānu trijstūra virsotnes leņķis ir par $20°$ mazāks nekā abu pamata pieleņķu summa. Cik grādus liels ir virsotnes leņķis?	80	Ja virsotnes leņķis ar α, tad pamata pieleņķu summa ir $\alpha + 20°$ un visu trijstūra leņķu summa ir $\alpha + \alpha + 20° = 180°$. Tātad $\alpha = 80°$.
20	Funkcija $y = 2020x + 2021$ un $y = 2021x + 2022$ krustojas vienā punktā. Kāda ir šī krustpunkta abscisas kvadrāta un ordinātas kvadrāta summa?	2	Funkciju krustpunkta koordinātas ir $(-1; 1)$ (to var uzminēt, vai arī atrisināt vienādojumu $2020x + 2021 = 2021x + 2022$).
21	Skolā 16 skolēni piedalījās olimpiādē, bet 64 skolēni nepiedalījās olimpiādē. Cik procentu no skolas skolēniem nepiedalījās olimpiādē?	80	$\frac{64}{64+16} = \frac{4}{5} = 80\%$.
22	Visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 2 eiro monētām, atrodas taisnstūrī, bet visas grāmatas, ko var nopirkt, norēķinoties tikai ar 5 eiro banknotēm, atrodas riņķī. Kurā plaknes daļā atrodas grāmata, kas maksā 37 eiro?  	N	Tā kā 37 eiro nevar samaksāt tikai ar 2 eiro monētām, ne arī tikai ar 5 eiro banknotēm, tad šī grāmata neatrodas ne taisnstūrī, ne riņķī.

23	Visi skaitļi, kas dalās ar 8, atrodas taisnstūrī, bet visi skaitļa 64 dalītāji atrodas aplī. Kurā plaknes daļā atrodas skaitlis 8? 	L	Tā kā 8 dalās ar 8 un ir arī skaitļa 64 dalītājs, tad tas atrodas gan taisnstūrī, gan aplī.
24	Kāds atlikums rodas, ja 10003 dala ar 4?	3	Viegli ievērot, ka 10000 dalās ar 4.

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma 2. kārtas uzdevumi, atrisinājumi un vērtēšanas kritēriji

5.-8. klase

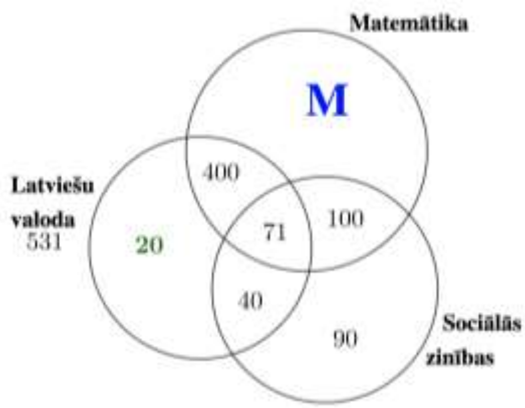
5.1. Šogad uz Novadijas 5. klašu matemātikas olimpiādi ir reģistrējušies 1270 skolēni, kuriem jautāja par mācību priekšmetiem (matemātika, sociālās zinības, latviešu valoda), kuri tiem patīk:

- 400 dalībniekiem patīk matemātika un arī latviešu valoda, bet nepatīk sociālās zinības;
- 100 dalībniekiem patīk matemātika un arī sociālās zinības, bet nepatīk latviešu valoda;
- 40 dalībniekiem patīk latviešu valoda un arī sociālās zinības, bet nepatīk matemātika;
- 90 dalībniekiem patīk tikai sociālās zinības;
- latviešu valoda patīk 531 dalībniekam;
- visi trīs priekšmeti patīk 71 dalībniekam.

Zināms, ka katram no skolēniem patīk vismaz viens no šiem priekšmetiem. Cik dalībniekiem patīk tikai matemātika?

Atrisinājums. Uzzīmējam trīs riņķus, tie ilustrēs attiecīgi skolēnu skaitu, kam patīk konkrētie priekšmeti (matemātika, latviešu valoda un sociālās zinības). Ievērojam, ka ir daļas, kurā pārklājas divi riņķi, un ir arī daļa, kurā pārklājas visi trīs riņķi. Mums jānoskaidro, kas ierakstīts daļā M.

Uzmanīgi lasot uzdevumā doto, ierakstam Eilera diagrammā informāciju (skat. 1. att. skaitļus, kas ierakstīti ar melnu). Lai noskaidrotu, cik dalībniekiem patīk tikai latviešu valoda, no dalībnieku skaita, kam patīk latviešu valoda jāatņem to dalībnieku skaits, kam patīk latviešu valoda un vēl vismaz viens cits mācību priekšmets. Līdz ar to tikai latviešu valoda patīk $531-400-71-40=20$ dalībniekiem (skat. 1. att. zaļā krāsā).



1. att.

Aprēķināsim skaitli, kas jāieraksta daļā M (dalībnieku skaits, kuriem patīk tikai matemātika). Lai to izdarītu, no kopējā dalībnieku skaita attiecīgi jāatņem dalībnieku skaits, kuriem

- patīk gan matemātika, gan latviešu valoda;
- patīk gan matemātika, gan sociālās zinības;
- patīk gan latviešu valoda, gan sociālās zinības;
- patīk tikai latviešu valoda;
- patīk tikai sociālās zinības;
- patīk visi trīs priekšmeti.

Tātad no 1270 jāatņem visi 1. att. redzamie plaknes daļās ierakstītie skaitļi, tas ir,

$$M = 1270 - 400 - 100 - 40 - 20 - 90 - 71 = 549.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka 549 skolēniem patīk tikai matemātika.

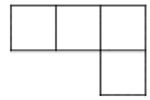
Uzzīmē Eilera riņķus un pareizi atzīmē tajos dotos	4
Aprēķina, cik ir dalībnieku, kam patīk tikai latviešu valoda	3
Aprēķina, cik ir dalībnieku, kam patīk tikai matemātika	3
Ja ir tikai darbības, bet nav teksta	ne vairāk kā 6

Piebildes pie vērtēšanas kritērijiem

1. **10 punkti** - Par korektu risinājumu, kurā ir parādīts, kā iegūta pareiza atbilde (vai nu ar aprēķiniem, vai uzzīmētiem un aizpildītiem Eilera riņķiem. Eilera riņķus izmantot un pat pieminēt nav obligāti).
2. **10 punkti** - Par korektu risinājumu, pat ja risinājumā ir pārrakstīšanās kļūda, bet tas netraucēja autoram nonākt pie pareiza rezultāta.
3. **9 punkti** - Par citādi korektu risinājumu, bet ar kādu aritmētisku kļūdu aprēķinos, kas rezultējās nepareizā atbildē.
4. **8 punkti** - Par vairākām aritmētiskām kļūdām aprēķinos.
5. **7 punkti** - korekti Eilera riņķi un aprēķināta "tikai latviešu valodas" vērtība, bet ar būtiskām problēmām "tikai matemātikas" iegūšanā.

1. **4 punkti** (*šis bija ļoti populārs gadījums*) - Autors kļūdaini pieņēmis, ka "patīk latviešu valoda" nozīmē "patīk tikai latviešu valoda" un atrisinājis šo uzdevumu, izmantojot Eilera riņķus, iegūstot atbildi 38. (*4 punkti tāpēc, ka atrisināts cits uzdevums, kas ir tehniski vieglāks par oriģinālo - Eilera apļi ar vienu nezināmu vērtību pret Eilera apļiem ar divām nezināmām vērtībām.).*
2. **3 punkti** - 1. gadījums, bet bez Eilera apļiem. (*Manuprāt Eilera apļi ir tieši tas mehānisms, kas ļauj runāt par starpību starp "patīk latviešu valoda" un "patīk tikai latviešu valoda", tāpēc tas šeit tiek novērtēts. Citādi, ja risinājums ir korekts, par Eilera apļu nelietošanu punktu neatņemam.*).
3. **1 vai 2 punkti** - ja ir kaut kādas idejas, kaut kas ir rēķināts vai zīmēts.
4. **0 punktu** – tikai par atbildi, pareizu vai nepareizu.

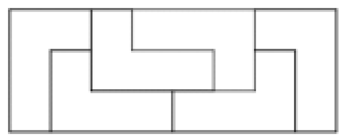
5.2. Vai ar 2. att. figūrām, kas sastāv no 4 rūtiņām, var noklāt rūtiņu laukumu, kura izmērs ir **a)** 6×7, **b)** 3×8 rūtiņas? Figūras nedrīkst pārklāties un iziet ārpus laukuma robežām, tās drīkst pagriezt un “apmest otrādi”.



2. att.

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Kopējais rūtiņu laukuma rūtiņu skaits ir $6 \cdot 7 = 42$, kas nedalās ar 4, bet katra figūra aizņem 4 rūtiņas; tātad kopējam noklāto rūtiņu skaitam ir jādalās ar 4. Iegūta pretruna, tātad nevar pārklāt.

b) Jā, var, piemēram, skat. 3. att.



3. att.

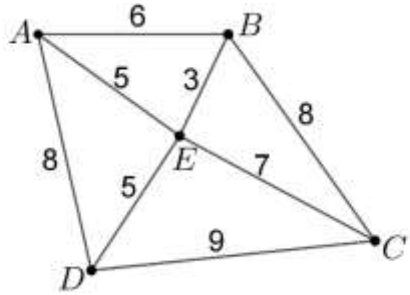
Par **a)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Par atbildi, ka nevar	1
Spriedums par kopējo rūtiņu skaitu	2
Spriedums, ka 42 nedalās ar 4	2
Par **b)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Par atbildi, ka var	1
Par pareizu pārklājuma piemēru	4
a) gadījumā par dažiem piemēriem, kuros neizdodas pārklāt	1
Ja b) ir atbilde, ka var, un tikai spriedums, ka 24 dalās ar 4	1+1

5.3. Ciemi A, B, C, D, E savienoti ar ceļiem tā, kā tas parādīts 4. att. (mērogs nav ievērots). Blakus katram ceļam norādīts tā garums kilometros.

a) Vai pa ceļiem var veikt maršrutu, kas sākas pilsētā A, beidzas pilsētā A un kura kopgarums ir tieši 95 km?

b) Vai pa ceļiem var veikt maršrutu, kas sākas pilsētā A, beidzas pilsētā A un kura kopgarums ir tieši 95 km, ja ceļš CD ir slēgts (tas ir, pa ceļu CD nedrīkst braukt)?

Piezīme. Sākot braukt pa kādu ceļu, pa to jābrauc līdz galam.



4. att.

Atrisinājums. a) Var, piemēram, izbraucot maršrutu ABCDABCDABCDEA.

b) Nē, nevar. Ievērosim, ka visu atlikušo ceļu garumi, kas iet "pa ārpusi" (AB, BC, AD) ir pāra skaitļi, bet visu ceļu garumi, kas iet uz ciemu E, ir nepāra skaitļi. Līdz ar to, braucot "pa ārpusi", nobrauktā ceļa garums palielināsies par pāra skaitli, un, iebraucot ciemā E un izbraucot no tā, nobrauktā ceļa garums arī palielināsies par pāra skaitli (jo divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis). Tātad kopējais nobrauktā ceļa garums no ciema A līdz ciemam A vienmēr būs pāra skaitlis, tātad tas nevar būt 95 km.

Par **a)** gadījumu (kopā 4 punkti)	
Par atbildi, ka var	1
Par derīgu piemēru	3
Par **b)** gadījumu (kopā 6 punkti)	
Par atbildi, ka nevar	1
Par pareizu pamatojumu	5
Ja a) gadījumā ir atbilde, ka var, bet ir kļūda aritmētikā	1+1
Ja b) gadījumā sāk apskatīt gadījumus (atkarībā no apskatīti gadījumu skaita)	ne vairāk kā 2 punkti

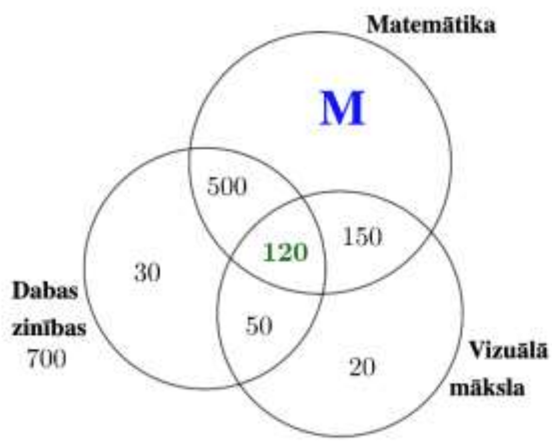
6.1. Šogad uz Olimpijas 6. klašu matemātikas olimpiādi ir reģistrējušies 1243 skolēni, kuriem jautāja par mācību priekšmetiem (matemātika, dabas zinības, vizuālā māksla), kuri tiem patīk:

- dabas zinības patīk 700 dalībniekam;
- 500 dalībniekiem patīk matemātika un arī dabas zinības, bet nepatīk vizuālā māksla;
- 150 dalībniekiem patīk matemātika un arī vizuālā māksla, bet nepatīk dabas zinības;
- 50 dalībniekiem patīk dabas zinības un arī vizuālā māksla, bet nepatīk matemātika;
- 20 dalībniekiem patīk tikai vizuālā māksla;
- 30 dalībniekiem patīk tikai dabas zinības.

Zināms, ka katram no skolēniem patīk vismaz viens no šiem priekšmetiem. Cik dalībniekiem patīk tikai matemātika?

Atrisinājums. Uzzīmējam trīs riņķus, tie ilustrēs attiecīgi skolēnu skaitu, kam patīk konkrētie priekšmeti (matemātika, dabas zinības un vizuālā māksla). Ievērojam, ka ir daļas, kurā pārklājas divi riņķi, un ir arī daļa, kurā pārklājas visi trīs riņķi. Mums jānoskaidro, kas ierakstīts daļā M.

Uzmanīgi lasot uzdevumā doto, ierakstam Eilera diagrammā informāciju (skat. 5. att. skaitļus, kas ierakstīti ar melnu). Lai noskaidrotu, cik dalībniekiem patīk gan matemātika, gan dabas zinības, gan vizuālā māksla, no dalībnieku skaita, kam patīk dabas zinības jāatņem dalībnieku skaits, kam patīk tikai dabas zinības un dalībnieku skaits, kam patīk dabas zinības un vēl viens mācību priekšmets. Tātad gan matemātika, gan dabas zinības, gan vizuālā māksla patīk $700-30-500-50=120$ dalībniekiem (skat. 5. att. ierakstīts zaļā krāsā).



5. att.

Aprēķināsim skaitli, kas jāieraksta daļā M (dalībnieku skaits, kuriem patīk tikai matemātika). Lai to izdarītu, no kopējā dalībnieku skaita attiecīgi jāatņem dalībnieku skaits, kuriem

- patīk gan matemātika, gan dabas zinības;
- patīk gan matemātika, gan vizuālā māksla;
- patīk gan dabas zinības, gan vizuālā māksla;
- patīk tikai dabas zinības;
- patīk tikai vizuālā māksla;
- patīk visi trīs priekšmeti.

Tātad no 1243 jāatņem visi 5. att. redzamie plaknes daļās ierakstītie skaitļi:

$$M=1243-500-150-50-30-20-120=373.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka 373 skolēniem patīk tikai matemātika.

Uzzīmē Eilera riņķus un pareizi atzīmē tajos dotos	4
Aprēķina, cik ir dalībnieku, kam patīk visi trīs priekšmeti	3
Par pareizu aprēķinu (darbību), cik ir dalībnieku, kam patīk tikai matemātika	2
Par pareizu atbildi	1
Ja ir tikai darbības, bet nav teksta	ne vairāk kā 6
Ja ir tikai pareiza atbilde	1

6.2. Ieraksti 5×6 rūtiņu laukumā 14 plusus un 16 mīnusus (katrā rūtiņā tieši vienu zīmi) tā, lai katram plusam blakus rūtiņās atrastos tieši divi mīnusi! Rūtiņas atrodas blakus, ja tām ir kopīga mala.

Atrisinājums. To var izdarīt, piemēram, kā parādīts 6. att.

+	−	−	−	−	+
−	+	+	+	+	−
−	+	−	−	+	−
−	+	+	+	+	−
+	−	−	−	−	+

6. att.

Vērtēšanas kritēriji

- **10 punkti** - ja viss atbilst - mīnusi plusiem un plusu skaits (līnijas varēja būt vilktas ar lineālu un ar brīvu roku un zīmējums varēja būt veikts arī uz baltas, nevis rūtiņu, papīra lapas).
- **8-9 punkti** - ja ir lieks pluss, bet, to noņemot, viss ir kārtībā, bez papildus piepūles vai ir lietoti krustiņi, kas nav plusi.
- 7 punkti - ja vienam plusam nebija tieši 2 mīnusi blakus vai arī visi bija, bet plusu skaits atšķīrās par viens no 14.
- **5 punkti** - ja 2 plusiem nav tieši 2 mīnusi vai plusu atšķirība par 2, bet mīnusi ir tieši 2.
- **4 punkti** - ja ir 3 plusi "ar defektiem".
- **3 punkti** - ja 4-5 plusi "ar defektiem".
- **2 punkti** - ja 6 -9 plusi "ar defektiem".
- **1 punkts** - ja 10-12 plusi "ar defektiem", bet pāris vismaz ir pareizi.
- **0 punkti** - ja plusu skaits ir atšķirīgs un 6-9 plusi "ar defektiem"/ pat kāds pluss nav ar pareizo mīnusu skaitu /citi gadījumi, kad nav saprasts, ko darīt.

6.3. Dotas deviņas kārtis ar cipariem no 1 līdz 9, uz katras kārts uzrakstīts atšķirīgs cipars. Kāds mazākais skaits kāršu jāizvelk (nezinot to vērtības), lai no tām noteikti varētu izveidot divciparu skaitli, kurš dalās ar 7 (veidojot divciparu skaitli, katru kārti drīkst izmantot ne vairāk kā vienu reizi)?

Atrisinājums. Mazākais skaits kāršu, kas jāizvelk, ir 5. Pierādīsim to. Sadalām visus ciparus četrās grupās:

- pirmā grupa 1, 2 un 4;
- otrā grupa 3, 5 un 6;
- trešā grupa 8 un 9;
- ceturtā grupa 7.

Ievērojam, ka, paņemot no kādas grupas divus ciparus (ja grupā ir vismaz divi cipari), tad no šiem cipariem var izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7.

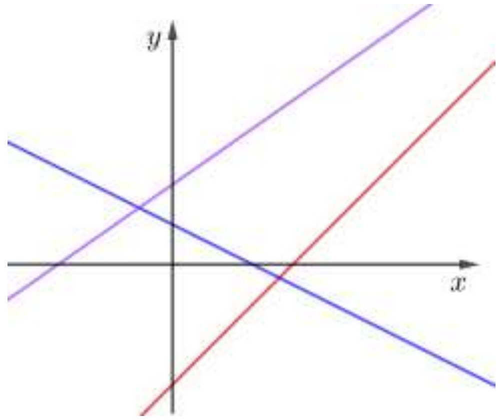
Līdz ar to, ja tiks izvilktas piecas kārtis, tad pēc Dirihlē principa no kādas grupas būs izvilktas vismaz divas kārtis un no tām varēs izveidot uzdevumā prasīto skaitli.

Vēl jāpierāda, ka ir iespējams izvilkt četras kārtis, no kurām nevar izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7. Ja izvelk četras kārtis 1, 3, 7 un 8, tad no tām nevar izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 7 (neviens no skaitļiem 13, 31, 17, 71, 18, 81, 37, 73, 38, 83, 78, 87 nedalās ar 7).

Tātad mazākais kāršu skaits, kas jāizvelk, ir 5.

Par atbildi 5 kārtis	1
Par pretpiemēru, ka ar 4 kārtīm nepietiek	2
Uzrakstīti visi divciparu skaitļi, ko var izveidot no kārtīm un kas dalās ar 7	2
Par pamatojumu, ka ar 5 kārtīm pietiek	5
Uzrakstīti visi divciparu skaitļi, ko var izveidot no kārtīm un kas dalās ar 7	2

7.1. Vai var gadīties, ka 7. att. dotās taisnes ir funkciju $y = ax + b$, $y = bx - c$ un $y = cx + a$ grafiki (grafiki nav doti mērogā)?



7. att.

Atrisinājums. Nē, nevar.
Tā kā divas funkcijas ir augošas un viena dilstoša, tad diviem no taišņu virziena koeficientiem a, b, c ir jābūt pozitīviem un vienam negatīvam.
Tā kā divas taisnes krusto y asi punktā, kura ordināta ir pozitīva, bet viena krusto y asi punktā, kura ordināta ir negatīva, tad no skaitļiem b, $-c$, a divi ir pozitīvi un viens ir negatīvs.
Apskatām iespējamos gadījumus.

Virziena koeficienti			Brīvie locekļi			
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{-c}$	$\boldsymbol{a}$	
$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	Pretruna
$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	Pretruna
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	Pretruna

Līdz ar to esam pamatojuši, ka dotās taisnes nevar atbilst uzdevumā dotajām formulām.

Par atbildi “nē”	1
Spriedums, ka diviem no taišņu virziena koeficientiem a, b, c ir jābūt pozitīviem un vienam negatīvam.	2
Spriedums, ka no skaitļiem b, $-c$, a divi ir pozitīvi un viens ir negatīvs.	2
Pamatojums, ka uzzīmētie grafiki neatbilst formulām	5
Par konkrētiem piemēriem, kuros neizdodas	ne vairāk kā 2

7.2. Naturālu skaitli sauc par *īpašu*, ja tas ir vienāds ar četru savu dažādu dalītāju summu.

a) Atrodi vienu *īpašu* skaitli!

b) Pierādi, ka *īpašo* skaitļu ir bezgalīgi daudz!

c) Pierādi, ka visi *īpašie* skaitļi ir pāra skaitļi.

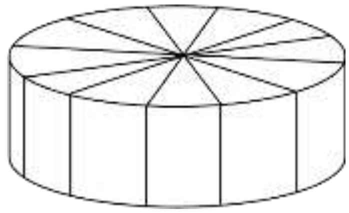
Atrisinājums. a) *Īpašs* skaitlis ir, piemēram, 12, jo $12 = 1 + 2 + 3 + 6$.

b) *Īpaši* ir visi skaitļi, kas ir formā, piemēram, $12n$, kur n ir naturāls skaitlis, jo $12n = n + 2n + 3n + 6n$.

c) Pieņemsim pretējo, ka ir kāds *īpašs* nepāra skaitlis. Nepāra skaitlim visi tā dalītāji ir nepāra skaitļi, bet četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis – pretruna.

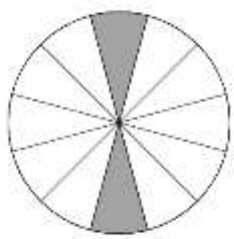
Par **a)** gadījumu (kopā 2 punkti)	
Atrasts *īpašs* skaitlis	1
Parādīts, ka atrastais skaitlis ir 4 savu dalītāju summa	1
Par **b)** gadījumu (kopā 4 punkti)	
Atrasts *īpašs* skaitlis vispārīgā formā	2
Parādīts, ka visi atrastie skaitļi ir 4 savu dalītāju summa	2
Par **c)** gadījumu (kopā 4 punkti)	
Spriedums, ka nepāra skaitļa visi dalītāji ir nepāra skaitļi	2
Spriedums, ka četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis	2
b) gadījumā par dažiem atrastiem īpašiem skaitļiem	1

7.3. Torte sagriezta 12 gabaliņos (skat. 8. att.). Brālītis un Karlsons pēc kārtas izdara gājienus, Brālītis sāk pirmais. Vienā gājienā var apēst vai nu vienu tortes gabaliņu, vai divus blakus esošus gabaliņus (blakus esoši gabaliņi ir gabaliņi, kam ir kopīga mala). Uzvar tas, kurš apēd pēdējo gabaliņu. Kurš uzvarēs, pareizi spēlējot, un kā viņam jārīkojas?

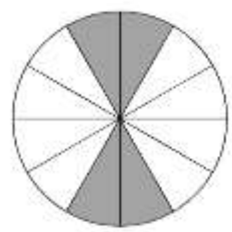


8. att.

Atrisinājums. Pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Karlsons. Viņš var izmantot simetriju. Ja Brālītis pirmajā gājienā apēd vienu gabalu, tad Karlsons arī apēd vienu gabalu, kas atrodas tieši pretējā pusē tā, ka atliek divi vienādi tortes gabalu "bloki" pa 5 gabaliem (skat. 9. att.). Bet, ja brālītis pirmajā gājienā apēd divus tortes gabalus, tad arī Karlsons apēd divus pretējā pusē tā, ka atliek divi vienādi gabalu bloki pa 4 gabaliem (skat. 10. att.).



9. att.



10. att.

Tālākajā spēlē, ja Brālītis apēd vienu gabalu vai divus gabalus no kāda bloka, tad Karlsonam jāapēd attiecīgi vienu vai divus gabali, kas atrodas tajā pašā vietā otrā blokā, tā, lai pēc viņa gājiena abi bloki atkal būtu vienādi. Tādā veidā Karlsons var nodrošināt, ka tieši viņš apēdīs pēdējo tortes gabalu, jo, ja tortes gabalu varēs apēst Brālītis, tad arī Karlsons varēs apēst simetrisko gabalu, kas atrodas otrā blokā.

Par atbildi, ka vienmēr var uzvarēt Karlsons	1
Par ideju, ka jāizmanto simetrija	2
Par spriedumu, kā Karlsonam jārīkojas savā pirmajā gājienā (ja Brālītis paņem 1 vai 2 gabaliņus pirmajā gājienā)	3
Par spriedumu, kā Karlsonam jārīkojas nākamajos gājienos	3
Par secinājumu, ka Karlsons varēs izvēlēties tortes gabalu, ja to varēs izdarīt Brālītis	1
Par konkrētiem piemēriem	ne vairāk kā 2

8.1. Aplūkosim lineāras funkcijas $y = bx - 71 + m$, kur koeficientus b un m saista sakarība $b + 2m = 2021$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafiki krustojas vienā punktā!

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y = bx - 71 + m$ vērtību, ja argumenta vērtība $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{2}b - 71 + m = \frac{1}{2}(b + 2m) - 71 = \frac{1}{2} \cdot 2021 - 71 = 1010\frac{1}{2} - 71 = 939\frac{1}{2}.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai $\frac{1}{2}$ jebkuras dotās funkcijas vērtība būs $939\frac{1}{2}$. Tātad visas dotās taisnes krustojas punktā $\left(\frac{1}{2}; 939\frac{1}{2}\right)$.

Par pareizi noteiktu krustpunktu	4
Par pamatojumu, ka visas funkcijas iet caur šo punktu	6

8.2. Kādus pirmskaitļus var izteikt formā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|,$$

kur n ir kāds vesels skaitlis?

Atrisinājums. Vienīgais pirmskaitlis, ko var izteikt šādā formā, ir 13.

Ja $n \geq 7$, tad dotajā izteiksmē visas zemmoduļu izteiksmes ir nenegatīvas, tāpēc to var pārrakstīt kā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|=$$
$$=n-1+n-2+n-3+n-4+n-5+n-6+n-7=7n-28=7\cdot(n-1)$$

Visi skaitļi šādā formā nav pirmskaitļi, jo tos var sadalīt reizinātājos.

Ja $n \leq 1$, tad dotajā izteiksmē visas zemmoduļu izteiksmes ir negatīvas vai 0, tāpēc to var pārrakstīt kā

$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|+|n-6|+|n-7|=$$
$$=1-n+2-n+3-n+4-n+5-n+6-n+7-n=28-7n=7\cdot(4-n)$$

Visi skaitļi šādā formā nav pirmskaitļi, jo tos var sadalīt reizinātājos.

Apskatīsim atlikušās n vērtības.

- Ja $n=2$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 2 un iegūst
$$|2-1|+|2-2|+|2-3|+|2-4|+|2-5|+|2-6|+|2-7|=$$
$$|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|+|-4|+|-5|=1+0+1+2+3+4+5=15$$
Skaitlis 15 nav pirmskaitlis.
- Ja $n=3$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 3 un iegūst
$$|3-1|+|3-2|+|3-3|+|2-4|+|3-5|+|3-6|+|3-7|=$$
$$|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|+|-4|=2+1+0+1+2+3+4=13$$
Skaitlis 13 ir pirmskaitlis.
- Ja $n=4$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 4 un iegūst
$$|4-1|+|4-2|+|4-3|+|4-4|+|4-5|+|4-6|+|4-7|=$$
$$|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|+|-3|=3+2+1+0+1+2+3=12$$
Skaitlis 12 nav pirmskaitlis.
- Ja $n=5$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 5 un iegūst
$$|5-1|+|5-2|+|5-3|+|5-4|+|5-5|+|5-6|+|5-7|=$$
$$|4|+|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|+|-2|=4+3+2+1+0+1+2=13$$
Skaitlis 13 ir pirmskaitlis.
- Ja $n=6$, dotajā izteiksmē n vietā ievieto 6 un iegūst
$$|6-1|+|6-2|+|6-3|+|6-4|+|6-5|+|6-6|+|6-7|=$$
$$|5|+|4|+|3|+|2|+|1|+|0|+|-1|=5+4+3+2+1+0+1=16$$
Skaitlis 16 nav pirmskaitlis.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka tikai pirmskaitli 13 var izteikt prasītajā formā.

Par atbildi 13	1
Par gadījumu $n \leq 1$	3
Par gadījumu $n \geq 7$	3
Par gadījumiem $n=2; 3; 4; 5; 6$	3

8.3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise AE. Uz taisnes AE atlikts punkts D, tā ka $AD = AB + AC$ un punkts E atrodas starp punktiem A un D. Pierādīt, ka ΔBCD ir vienādmalu trijstūris, ja zināms, ka $\sphericalangle BAC = 120°$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $BC = BD$.

Atliekam uz taisnes AD tādu punktu G, ka $AG = AB$ un $GD = AC$ (skat. 11. att.). Aplūkojam trijstūri GAB. Tas ir vienādmalu trijstūris, jo pēc konstrukcijas $AG = AB$ un pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle GAB = 60°$. Tātad $GB = AB$ un $\sphericalangle AGB = 60°$.

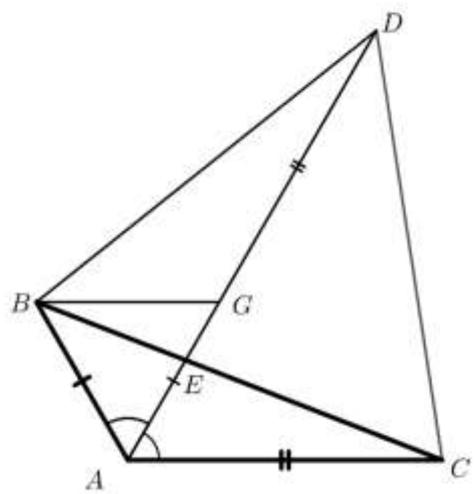
Ievērojam, ka $\Delta CAB = \Delta DGB$ pēc pazīmes $m\ell m$:

- $DG = CA$ pēc konstrukcijas,
- $\sphericalangle DGB = 180° - \sphericalangle AGB = 120 = \sphericalangle CAB$,
- $GB = AB$ pēc iepriekš pierādītā.

Tā kā vienādos trijstūros attiecīgie lielumi ir vienādi, tad $BD = BC$.

Līdzīgi, atliekot uz AD tādu punktu M, ka $AM = AC$ un $MD = AB$, pierāda, ka $BC = CD$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $BC = BD = CD$. Tātad trijstūris BCD ir vienādmalu.



11. att.

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Par punkta G atlikšanu uz AD	3
Pamatots, ka ΔAGB ir vienādmalu trijstūris	2
Korekti pabeigts pamatojums, ka ΔBCD ir vienādmalu trijstūris	5

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

9. klase

9.1. Neaizsalušas upes krastā 50 km attālumā atrodas divas piestātnes Novadija un Olimpija, no kurām vienlaicīgi izbrauca Rihards un Kalvis. Rihards ar laivu izbrauca no Novadijas un brauca pret straumi, bet Kalvis ar laivu izbrauca no Olimpijas un brauca pa straumi. Pēc 3 stundām abi sastapās. Aprēķināt abu braucēju laivu ātrumu stāvošā ūdenī, ja zināms, ka ātrumi stāvošā ūdenī ir vienādi un upes straumes ātrums ir 5 km/h.

Atrisinājums. Riharda un Kalvja laivu kustības ātrumu stāvošā ūdenī apzīmējam ar x. Tad Rihards uz Olimpiju brauca ar ātrumu $(x-5)$ km/h, savukārt Kalvis uz Novadiju brauca ar ātrumu $(x+5)$ km/h. Līdz tikšanās momentam Rihards nobrauca $3(x-5)$ km un Kalvis nobrauca $3(x+5)$ km. Kopā abi braucēji nobrauca $3(x-5)+3(x+5)$ jeb 50 km. Sastādām vienādojumu un to atrisinām:

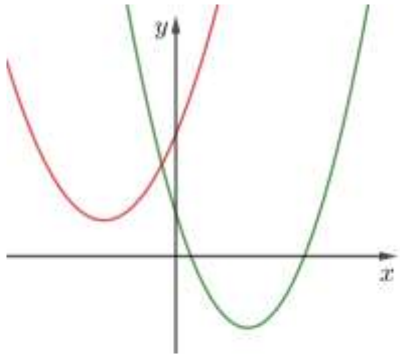
$$3(x-5)+3(x+5)=50;$$
$$3x-15+3x+15=50;$$
$$6x=50;$$
$$x=8\frac{1}{3}.$$

Esam ieguvuši, ka Riharda un Kalvja laivu kustības ātrums stāvošā ūdenī ir $8\frac{1}{3}$ km/h.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī ar darbībām (bez mainīgā ieviešanas), bet tādā gadījumā visas darbības ir jāpaskaidro.

Ievieš apzīmējumus	2
Pareizi izmanto formulu $s=vt$	1
Sastāda vienādojumu	3
Atrisina vienādojumu	3
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir skaitliska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Risināts ar darbībām, bet nav paskaidrojumi	Ne vairāk kā 3

9.2. Vai var gadīties, ka 1. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$ un $y = bx^2 + cx + a$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



1. att.

Atrisinājums. Nē, nevar gadīties. Tā kā parabolu zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$ un $b > 0$. Abi grafiki krusto y asi punktos, kuru ordinātas ir pozitīvas, tāpēc $a > 0$ un $c > 0$.
Tālāk risinājumu var turpināt trīs veidos.
1. veids. Apskatām abu parabolu virsotņu x koordinātas:

- funkcijai $y = ax^2 + bx + c$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\frac{b}{2a} < 0$, jo $a > 0$ un $b > 0$;
- funkcijai $y = bx^2 + cx + a$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\frac{c}{2b} < 0$, jo $b > 0$ un $c > 0$.

Iegūta pretruna, jo 1. att. zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) virsotnes koordināta $x_v > 0$.
2. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes. Bet kvadrātvienādojumam, kam visi trīs koeficienti ir pozitīvi, nevar būt pozitīvas saknes (ja $A, B, C > 0$, tad $Ax^2 + Bx + C > 0$ visiem pozitīviem x).
3. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes x_1 un x_2. Pieņemsim, ka tās vienādojums ir $y = ax^2 + bx + c$ (otrs gadījums līdzīgs). Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$. Iegūta pretruna, jo divu pozitīvu skaitļu summa nevar būt negatīva.

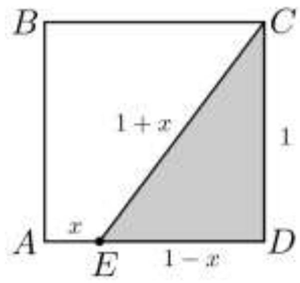
Par atbildi "Nē", "Pierādīsim, ka nevar gadīties..." vai tamlīdzīgu tekstu, kurā skaidri norādīts, ka prasītais nav iespējams	1
Pamato, ka $a > 0$ un $b > 0$	1
Pamato, ka $a > 0$ un $c > 0$	2
1. veids	
Ideja par parabolas virsotnes x koordinātu izmantošanu un formula $x_0 = -\frac{b}{2a}$	1+1
Aprēķina abu parabolu virsotnes x koordinātu	1+1
Secina, ka ir pretruna	2
2. veids	
Uzraksta, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas dažādas pozitīvas saknes	2
Pamato, ka, ja $A, B, C > 0$, tad $Ax^2 + Bx + C > 0$ visiem pozitīviem x (pretruna, jo nav pozitīvu sakņu)	4
3. veids	
Uzraksta, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas dažādas pozitīvas saknes	2
Izsaka saknes, izmantojot diskriminantu, vai sastāda Vjeta formulas sakņu summai	2
No sakņu formulas ar diskriminantu secina, ka viena sakne ir negatīva (pretruna) vai arī no Vjeta teorēmas iegūst, ka sakņu summa ir negatīva (pretruna)	2

9.3. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AD izvēlēts punkts E tā, ka $AB + AE = CE$. Aprēķināt S_{CED}, ja $AB = 1$.

Atrisinājums. Apzīmējam $AE = x$, tad $ED = 1 - x$ un $EC = 1 + x$ (skat. 2. att.). Pēc Pitagora teorēmas trijstūrī EDC iegūstam, ka

$$EC^2 = ED^2 + CD^2,$$
$$(1 + x)^2 = (1 - x)^2 + 1^2,$$
$$1 + 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + 1,$$
$$4x = 1,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Līdz ar to $S_{CED} = \frac{1}{2}ED \cdot CD = \frac{1}{2}(1 - x) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.



2. att.

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Izsaka nogriežņus CE un ED, lai parādītos tikai viens nezināms lielums (var nebūt x, bet AE)	2
Uzraksta Pitagora teorēmu ΔCDE	1
Iegūst vienādojumu ar vienu nezināmo	1
Atrisina vienādojumu un iegūst $AE = \frac{1}{4}$ (vērtējums netika samazināts, ja ieguva iracionālu vienādojumu, kuram neveica sakņu pārbaudi)	3
Aprēķina ED garumu	1
Aprēķina S_{CED} (pareiza formula un pareizs skaitlisks rezultāts)	1+1
Ja uzminētas pareizas nogriežņu vērtības un pareizi aprēķināts laukums	2
Ja uzminētas pareizas nogriežņu vērtības, pārbaudīts Pitagora teorēmas nosacījums un pareizi aprēķināts laukums	4

9.4. Atrast mazāko naturālo skaitli k, kuram izpildās sekojoša īpašība: nevienam pirmskaitlim p skaitlis $p+1$ nav naturāla skaitļa k-tā pakāpe.

Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākā derīgā vērtība ir $k=4$.

Vērtība $k=1$ neder, jo, piemēram, ja $p=2$, tad $p+1=3=3^1$.

Vērtība $k=2$ neder, jo, piemēram, ja $p=3$, tad $p+1=4=2^2$.

Vērtība $k=3$ neder, jo, piemēram, ja $p=7$, tad $p+1=8=2^3$.

Pamatosim, ka vērtība $k=4$ der.

Pieņemsim pretējo – ir tāds pirmskaitlis p, ka $p+1=n^4$, kur n – naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1. Tādā gadījumā $p=n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Bet jebkurai naturālai n vērtībai, kas lielāk nekā 1, šis skaitlis ir salikts un nevar būt pirmskaitlis. Tātad jebkurai pirmskaitļa p vērtībai skaitlis $p+1$ nav naturāla skaitļa ceturtā pakāpe.

Par pretpiemēru, ka $k=1$ neder	1
Par pretpiemēru, ka $k=2$ neder	1
Par pretpiemēru, ka $k=3$ neder	1
Par atbildi $k=4$	1
Pieņem pretējo, ka $p+1=n^4$	1
Izsaka, ka $p=n^4-1$	1
Sadala reizinātājos $n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$ vai arī $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$ un pamato, ka $n^2-1>1$, jo $n>1$	3
Secina, ka p ir salikts skaitlis un iegūta pretruna	1

9.5. Doti 120 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 1000. Pierādīt, ka, ja šos dotos 120 skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 22. un 99. skaitļa summa arī būtu lielāka nekā 1000.

Atrisinājums. Apzīmēsim visus skaitļus augošā secībā ar $a_1; a_2; \ldots; a_{120}$. Pieņemsim pretējo, ka $a_{22} + a_{99} \leq 1000$. Tas nozīmē, ka katrs no 22 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{22}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{99}. Bet tādu skaitļu ir tikai 21 (a_{100}; a_{101}; $\ldots$; a_{120}), iegūta pretruna. Tātad $a_{22} + a_{99} > 1000$.

Ievieš apzīmējumus	1
Pieņem pretējo, ka $a_{22} + a_{99} \leq 1000$	3
Secina, ka katrs no 22 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{22}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{99}	4
Pamato, ka ir iegūta pretruna	2
Par konkrētiem piemēriem	1
Ja ir konkrēti piemēri un dažas idejas, par ko dod punktus, tad punktu skaitu summē	

10. klase

10.1. Maruta un Elīna raksta olimpiādes uzdevuma atrisinājumu. Maruta sāka rakstīt atrisinājumu, pēc tam, kad viņa bija rakstījusi 1 h un 12 min, Elīna turpināja rakstīt risinājumu un pēc 3 h to pabeidza. Cik ilgā laikā uzdevuma atrisinājumu varētu uzrakstīt Maruta un Elīna, strādājot atsevišķi, ja zināms, ka Elīnai nepieciešams par 2 h vairāk laika atrisinājuma uzrakstīšanai nekā Marutai?

Atrisinājums. Ar x apzīmējam stundu skaitu, kas nepieciešams Marutai, lai uzrakstītu uzdevuma atrisinājumus. Tādā gadījumā Elīnai nepieciešamas $x+2$ stundas. Tā kā Maruta rakstīja atrisinājumu 1 h 12 min jeb 1,2 h, tad viņa izdarīja $\frac{1{,}2}{x}$ no visa darba, bet Elīna, strādājot 3 h, izdarīja $\frac{3}{x+2}$ no visa darba. Tā kā tika izdarīts viss darbs, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{1{,}2}{x}+\frac{3}{x+2}=1$$

Reizinot abas vienādojuma puses ar $5x(x+2)\neq 0$, iegūstam vienādojumu

$$6(x+2)+15x=5x(x+2);$$
$$5x^2-11x-12=0.$$

Līdz ar to $x_1=\frac{11+\sqrt{121+240}}{10}=\frac{11+19}{10}=3$ un $x_2=\frac{11-19}{10}=-0{,}8$ (neder).

Esam ieguvuši, ka, atsevišķi strādājot, Maruta var uzrakstīt atrisinājumu 3 stundās, bet Elīna – 5 stundās.

Piezīme. Uzdevumu var risināt, sastādot vienādojumu sistēmu.

Apzīmē stundu skaitu, kas nepieciešams Marutai un Elīnai, lai atsevišķi veiktu darbu	1
Izsaka, kādu darba daļu katra veica ($\frac{1{,}2}{x}$ un $\frac{3}{x+2}$)	1+1
Iegūst daļveida vienādojumu	1
Risinot vienādojumu, ņem vērā definīcijas kopu $x(x+2)\neq 0$	1
Atrisina vienādojumu	3
Secina, ka negatīvā sakne neder	1
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir skaitliska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Nepareizi sastādīts vienādojums	Ne vairāk kā 3

10.2. Aplūkosim funkcijas $y = ax^2 + 2x + 2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a + 18b = 2021$. Pierādīt, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

Atrisinājums. Pamatosim, ka visu aplūkoto funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti:

- ja $x = \frac{1}{3}$, tad $y = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 2b = \left(\frac{1}{9}a + 2b\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(a + 18b) + \frac{2}{3} = \frac{2021}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2027}{9}$;
- ja $x = -\frac{1}{3}$, tad $y = a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 2b = \left(\frac{1}{9}a + 2b\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(a + 18b) - \frac{2}{3} = \frac{2021}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2015}{9}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2027}{9}\right)$ un $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2015}{9}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

Pamatots, ka punkts $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2027}{9}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem	5
Pamatots, ka punkts $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2015}{9}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem	5
Ja ir aritmētiska kļūda, kas nemaina risinājumu pēc būtības	Ne vairāk kā 9
Ja x vietā liek vērtības, kas atšķiras no $\frac{1}{3}$ vai $-\frac{1}{3}$	0
Ja risinājums ir **iesākts, bet nav prasts novest līdz galam**	
Par konkrētu a un b vērtību ievietošanu un divu funkciju uzrakstīšanu sistēmā	4
Sākta risināt iegūtā sistēma, bet nav pareizi atrisināta	1

10.3. Kvadrāta $ABCD$, kura malas garums ir 1, malas AB viduspunkts ir E un malas BC viduspunkts ir F. Nogrieznis AF krusto ED un EC attiecīgi punktos G un H, bet FD un EC krustojas punktā I. Aprēķināt četrstūra $DGHI$ laukumu.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $S_{EHD} = S_{BDE} - S_{BHE}$ (skat. 3. att.). Aprēķinām atbilstošo trijstūru laukumus:

- $S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$;
- $\Delta BHE \sim \Delta DHC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle BHE = \sphericalangle DHC$ kā krustleņķi un $\sphericalangle EBH = \sphericalangle HDC = 45°$. Līdzīgu trijstūru atbilstošie elementi ir proporcionāli, tāpēc $\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{BE}{CD} = \frac{1}{2}$. Tātad $HH_1 = \frac{1}{3}$ un $S_{BHE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot HH_1 = \frac{1}{12}$.

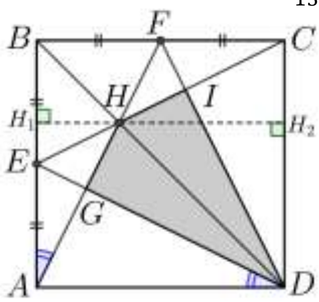
Līdz ar to $S_{EHD} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Tā kā $AB = AD = 1$, $BF = EA = \frac{1}{2}$ un $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EAD = 90°$, tad $\Delta ABF = \Delta DAE$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\Delta EGA \sim \Delta EAD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle EAG = \sphericalangle EDA$ kā vienādu trijstūru atbilstošie leņķi un $\sphericalangle AED$ ir kopīgs. Tāpēc $\frac{EA}{AD} = \frac{EG}{AG} = \frac{1}{2}$, no kurienes izriet, ka $AG = 2EG$.

Līdzīgi iegūstam, ka $\Delta AGD \sim \Delta EAD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle AGD = \sphericalangle EAD = 90°$, jo $\Delta EGA \sim \Delta EAD$, un $\sphericalangle EDA$ ir kopīgs. Tāpēc $\frac{EA}{AD} = \frac{AG}{GD} = \frac{1}{2}$, no kurienes izriet, ka $GD = 2AG$. Tātad $GD = 2AG = 2 \cdot 2EG = 4EG$.

Trijstūriem EHG un GHD ir kopīgs augstums, tāpēc to laukumu attiecība ir $\frac{S_{EHG}}{S_{GHD}} = \frac{EG}{GD} = \frac{1}{4}$.

Līdz ar to $S_{GHD} = \frac{4}{5} S_{EHD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ un simetrijas dēļ $S_{DGHI} = 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$.



3. att.

1. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Iegūst, ka $S_{EHD} = \frac{1}{6}$	3
Iegūst, ka $S_{GHD} = \frac{2}{15}$	5
Aprēķina prasīto laukumu	2

2. atrisinājums. Izmantosim koordinātu metodi. Novietojam kvadrātu koordinātu sistēmas 1. kvadrantā tā, lai kvadrāta virsotne A sakrīt ar koordinātu sākumpunktu un malas AB un AD atrodas uz koordinātu asīm (skat. 4. att.). Nosakām punktu koordinātas $A(0;0)$, $C(1;1)$, $F\left(\frac{1}{2};1\right)$, $D(1;0)$, $E\left(0;\frac{1}{2}\right)$ un sastādām taišņu vienādojumus $(AF)\ \ y=2x$, $(ED)\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ un $(EC)\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Lai noteiktu punktu G un H koordinātas, pielīdzinām atbilstošo taišņu formulu labās puses:

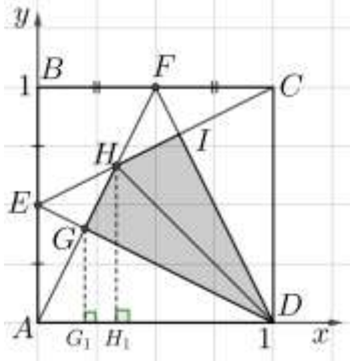
- $G=AF\cap ED$, tad $2x=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, tātad $x=\frac{1}{5}$ un $G\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$;
- $H=AF\cap EC$, tad $2x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, tātad $x=\frac{1}{3}$ un $H\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Aprēķinām trijstūra HGD laukumu:

$$S_{HGD}=S_{AHD}-S_{AGD}=\frac{1}{2}AD\cdot HH_1-\frac{1}{2}AD\cdot GG_1=\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15}=\frac{2}{15}.$$

Simetrijas dēļ $S_{DGHI}=2\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$.

Piezīme. Var pamatot un izmantot, ka $ED\perp AF$.



4. att.

2. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Ievieš koordinātu plakni un nosaka vajadzīgo punktu koordinātas	1
Uzraksta taišņu vienādojumus	1+1+1
Nosaka punkta G koordinātas	2
Nosaka punkta H koordinātas	2
Aprēķina prasīto laukumu	2

10.4. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $n^2 - n + 36$ vērtība nedalās ar **a)** 165; **b)** 169.

a) 1. atrisinājums. Ievērojam, ka $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Pamatosim, ka dotā izteiksme nedalās ar 5.

$\boldsymbol{n}$ **(mod 5)**	$\boldsymbol{n^2}$ **(mod 5)**	$\boldsymbol{n^2 - n + 36}$ **(mod 5)**
0	0	$0 - 0 + 36 \equiv 1$
1	1	$1 - 1 + 36 \equiv 1$
2	4	$4 - 2 + 36 = 38 \equiv 3$
3	$9 \equiv 4$	$4 - 3 + 36 = 37 \equiv 2$
4	$16 \equiv 1$	$1 - 4 + 36 = 33 \equiv 3$

Esam ieguvuši, ka izteiksme $n^2 - n + 36$ nedalās ar 5 (jo tā ir kongruenta ar 1, 2 vai 3 pēc moduļa 5), tātad tā nedalās arī ar 165.

Piezīme. Kongruenču vietā var apskatīt skaitļus n formā $5k; 5k+1; 5k+2; 5k+3; 5k+4$, kur $k = 0; 1; 2; \ldots$, un pierādīt, ka dotā izteiksme nedalās ar 5.

Piemēram, ja $n = 5k + 1$, tad

$$n^2 - n + 36 = (5k+1)^2 - (5k+1) + 36 = 25k^2 + 10k + 1 - 5k - 1 + 36 = 5(5k^2 + k + 7) + 1.$$

Līdzīgi apskata citus gadījumus.

a) 2. atrisinājums. Ievērojam, ka $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ un ka visām n vērtībām izteiksme $n^2 - n = n(n-1)$ ir pāra skaitlis kā divu secīgu skaitļu reizinājums. Tā kā reizinājuma pēdējo ciparu nosaka katra reizinātāj pēdējais cipars, tad apskatām visas iespējas.

$\boldsymbol{n-1}$ **pēdējais cipars**	$\boldsymbol{n}$ **pēdējais cipars**	$\boldsymbol{n(n-1)}$ **pēdējais cipars**	$\boldsymbol{n^2 - n + 36}$ **pēdējais cipars**
0	1	0	6
1	2	2	8
2	3	6	2
3	4	2	8
4	5	0	6
5	6	0	6
6	7	2	8
7	8	6	2
8	9	2	8
9	0	0	6

Nevienā no gadījumiem izteiksmes $n^2 - n + 36$ pēdējais cipars nav ne 0, ne 5, tātad dotā izteiksme nedalās ar 5, līdz ar to tā nedalās arī ar 165.

b) Pārveidojam izteiksmi formā $n^2 - n + 36 = (n-7)^2 + 13(n-1)$. Ja izteiksme dalītos ar 169, tad tā dalītos arī ar 13, jo $169 = 13^2$. Tā kā pārveidotās izteiksmes otrais saskaitāmais jau dalās ar 13, tad arī pirmajam saskaitāmajam $(n-7)^2$ jādalās ar 13. Tā kā 13 ir pirmskaitlis, tad $n - 7$ ir jādalās ar 13. Bet tad $(n-7)^2$ dalās ar 169. Lai ar 169 dalītos visa sākotnējā izteiksme, tad arī $n - 1$ ir jādalās ar 13.

Esam ieguvuši, ka vienlaikus gan $n - 7$, gan $n - 1$ jādalās ar 13. Bet tad arī šo skaitļu starpībai $(n-1) - (n-7) = 6$ būtu jādalās ar 13, kas nav iespējams. Esam ieguvuši pretrunu, tātad dotā izteiksme nevienai n vērtībai ar 169 nedalās.

Par **a)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Ideja, ka jāizmanto dalāmība ar 5 vai pēdējais cipars	2
Pamato, ka dotā izteiksme nedalās ar 165	3
Par **b)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Atdala pilno kvadrātu vai citādi iegūst, ka $(n-7)^2$ jādalās ar 13	2
Iegūst pretrunu un secina, ka dotā izteiksme nedalās ar 169	3
Ja vispārīgā pierādījuma nav, bet sistemātiski analizēti vairāki konkrēti piemēri	Ne vairāk kā 2

10.5. Doti 500 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 2000. Pierādīt, ka, ja šos 500 dotos skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 146. un 376. skaitļu summa būtu lielāka nekā 2021.

Atrisinājums. Apzīmējam visus skaitļus augošā secībā ar $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{500}$. Vispirms pierādīsim, ka $a_{125}+a_{376}>2000$. Pieņemsim pretējo, ka $a_{125}+a_{376}\le 2000$. Tas nozīmē, ka katrs no 125 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{125}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{376}. Bet tādu skaitļu ir tikai 124 ($a_{377};\ a_{378};\ \ldots;\ a_{500}$) – pretruna.

Tā kā visi dotie skaitļi ir dažādi un naturāli, tad

$$a_{146}\ge a_{145}+1\ge a_{144}+2\ge a_{143}+3\ge\ldots\ge a_{125}+21.$$

Tātad $a_{146}+a_{376}\ge a_{125}+a_{376}+21>2000+21=2021$.

Pamato, ka $a_{125}+a_{376}>2000$	6
Pamato, ka $a_{146}\ge a_{125}+21$	2
Pamato, ka $a_{146}+a_{376}>2021$	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.1. Dota aritmētiskā progresija un ģeometriskā progresija, kurām abām pirmais loceklis ir 2. Aritmētiskās progresijas otrais loceklis ir par 0,25 lielāks nekā ģeometriskās progresijas otrais loceklis, bet trešais loceklis abām progresijām ir vienāds. Aprēķināt aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu summu.

1. atrisinājums. Ņemot vērā pieņemtos apzīmējumus progresijām, uzdevumā dotos nosacījumus varam pierakstīt kā $a_1 = b_1 = 2$, $a_2 = b_2 + 0{,}25$ un $a_3 = b_3$.

Pēc aritmētiskās progresijas un ģeometriskās progresijas definīcijas iegūstam, ka

- $a_2 = a_1 + d = 2 + d$ un $a_3 = a_2 + d = 2 + 2d$;
- $b_2 = b_1 q = 2q$ un $b_3 = b_2 q = 2q^2$.

Līdz ar to iegūstam vienādojumu sistēmu (no vienādībām $a_2 = b_2 + 0{,}25$ un $a_3 = b_3$):

$$\begin{cases} 2 + d = 2q + 0{,}25 \\ 2 + 2d = 2q^2 \end{cases}$$

No pirmā vienādojuma izsakot $d = 2q - 1{,}75$ un ievietojot to otrajā vienādojumā, iegūstam

$$2 + 2(2q - 1{,}75) = 2q^2;$$

$$2q^2 - 4q + 1{,}5 = 0;$$

$$4q^2 - 8q + 3 = 0.$$

Vienādojuma saknes ir $q_1 = \frac{8+\sqrt{16}}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$ un $q_1 = \frac{8-4}{8} = 0{,}5$.

Attiecīgi $d_1 = 3 - 1{,}75 = 1{,}25$ un $d_2 = 1 - 1{,}75 = -0{,}75$.

Apskatām abus gadījumus:

- ja $d = 1{,}25$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 3{,}25;\ 4{,}5;\ 5{,}75;\ 7)$ summa ir
$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1{,}25}{2} \cdot 5 = \frac{4 + 5}{2} \cdot 5 = 22{,}5;$$
- ja $d = -0{,}75$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 1{,}25;\ 0{,}5;\ -0{,}25;\ -1)$ summa ir
$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot (-0{,}75)}{2} \cdot 5 = \frac{4 - 3}{2} \cdot 5 = 2{,}5.$$

2. atrisinājums. Tā kā dota aritmētiskā progresija $2;\ a_2;\ a_3$, tad $a_2 - 2 = a_3 - a_2$ un $a_3 = 2a_2 - 2$.

No ģeometriskās progresijas $2;\ b_2;\ b_3$, iegūstam sakarības $\frac{b_2}{2} = \frac{b_3}{b_2}$ un $b_3 = \frac{b_2^2}{2}$.

Sastādām vienādojumu $2a_2 - 2 = \frac{b_2^2}{2}$.

Ja $b_2 = x$, tad $a_2 = x + 0{,}25$, līdz ar to esam ieguvuši vienādojumu

$$2(x + 0{,}25) - 2 = \frac{x^2}{2};$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

kura saknes ir $x_1 = 1$ un $x_2 = 3$. Tad $a_2 = 1{,}25$ un $a_2 = 3{,}5$. Līdz ar to diferences ir $d_1 = -0{,}75$ un $d_2 = 1{,}5$.

Apskatām abus gadījumus:

- ja $d = 1{,}25$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu (2; 3,25; 4,5; 5,75; 7) summa ir $S_5 = 2 + 3{,}25 + 4{,}5 + 5{,}75 + 7 = 22{,}5$;
- ja $d = -0{,}75$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 1{,}25;\ 0{,}5;\ -0{,}25;\ -1)$ summa ir $S_5 = 2 + 1{,}25 + 0{,}5 - 0{,}25 - 1 = 2{,}5$.

Iegūst vienādojumu $2 + d = 2q + 0{,}25$ vai izsaka $a_3 = 2a_2 - 2$	2
Iegūst vienādojumu $2 + 2d = 2q^2$ vai izsaka $b_3 = \frac{b_2^2}{2}$	2
Atrisina vienādojumu sistēmu vai vienādojumu un iegūst diferences d vērtības	4
Aprēķina S_5, ja $d = 1{,}25$ (ar formulu vai saskaitot)	1
Aprēķina S_5, ja $d = -0{,}75$ (ar formulu vai saskaitot)	1
Risinājumā ir aritmētiska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9

11.2. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a+c=\frac{b}{2021}$, turklāt neviens no skaitļiem $a,\ b,\ c$ nav 0. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1;1]$.

Atrisinājums. Apskatām funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$. Ievērojam, ka funkcijas vērtībām $f(-1)$ un $f(1)$ ir pretējas zīmes:

- $f(-1)=a-b+c=\frac{b}{2021}-b=-\frac{2020}{2021}\cdot b$;
- $f(1)=a+b+c=\frac{b}{2021}+b=\frac{2022}{2021}\cdot b$.

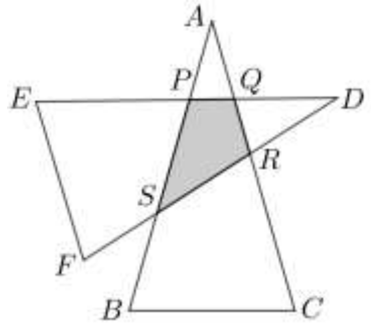
Tātad intervālā $[-1;\ 1]$ funkcijas grafiks krusto x asi, līdz ar to dotajam vienādojumam ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1;1]$.

Piezīme. Var uzreiz apskatīt reizinājumu:

$$f(-1)f(1)=(a+c-b)(a+c+b)=(a+c)^2-b^2=\frac{b^2}{2021^2}-b^2<0.$$

Aprēķina $f(-1)$	1
Izmantojot doto vienādību, iegūst, ka $f(-1)=-\frac{2020}{2021}\cdot b$	2
Aprēķina $f(1)$	1
Izmantojot doto vienādību, iegūst, ka $f(1)=\frac{2022}{2021}\cdot b$	2
Secina, ka $f(-1)$ un $f(1)$ ir pretējas zīmes	2
Secina, ka vienādojumam ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1;1]$	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.3. Divi vienādi vienādsānu trijstūri ABC un DEF ($AB = AC = DE = DF$ un $BC = EF$) krustojoties veido četrstūri $PQRS$ (skat. 5. att.), kuram var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka divi no četrstūra $PQRS$ leņķiem ir taisni.



5. att.

Atrisinājums. No trijstūriem ASR un DPS attiecīgi iegūstam, ka

- $\sphericalangle ARS = 180° - \sphericalangle PSR - \sphericalangle SAR$;
- $\sphericalangle DPS = 180° - \sphericalangle PSR - \sphericalangle PDS$.

Pēc dotā $\sphericalangle SAR = \sphericalangle PDS$ (jo trijstūri ir vienādi), tad arī $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS$. Tā kā četrstūrim $PQRS$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\sphericalangle ARS + \sphericalangle DPS = 180°$, tātad $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS = 90°$.

Pamato, ka $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS$ (var arī apzīmējot leņķus)	7
Izmanto, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$	1
Iegūst, ka $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS = 90°$	2

11.4. Naturālu skaitli sauksim par *tīri jauku*, ja to iespējams izteikt formā $a \cdot b + c \cdot d$, kur a, b, c, d – dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1. Piemēram, skaitlis 100 ir *tīri jauks*, jo $100 = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 6$. Pierādīt, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis.

Atrisinājums. Aplūkosim, kāds ir mazākais *tīri jaukais* skaitlis. Tā kā *tīri jaukos* skaitļus raksturo īpašība "jo lielāka sastāvdaļa, jo lielāks rezultāts", tad mazāko no šādiem skaitļiem var veidot tikai mazākais iespējamais dažādo skaitļu komplekts, tie ir skaitļi 2, 3, 4, 5.

No šiem skaitļiem var izveidot tikai šādus skaitļus:

- $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$,
- $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$,
- $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$.

Tātad mazākais tīri jaukais skaitlis ir 22, un divu *tīri jauko* skaitļu summa ir vismaz 44.

Pierādīsim, ka visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 44, ir *tīri jauki*.

- Visus pāra skaitļus, kas ir lielāki vai vienādi ar 22, var uzrakstīt formā $2 \cdot p + 3 \cdot 4$, kur $p \geq 5$. Tā kā visi četri skaitļi 2, 3, 4 un p ir dažādi, tad visi pāra skaitļi, kas ir vismaz 22, ir *tīri jauki*.
- Visus nepāra skaitļus, kas ir lielāki vai vienādi ar 27, var uzrakstīt formā $2 \cdot p + 3 \cdot 5$, kur $p \geq 6$. Tā kā visi četri skaitļi 2, 3, 5 un p ir dažādi, tad visi nepāra skaitļi, kas ir vismaz 27, ir *tīri jauki*.

Tātad visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 27, ir *tīri jauki*. Līdz ar to arī visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 44, ir *tīri jauki* un esam pierādījuši, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis.

Pamato, ka 22 ir mazākais *tīri jaukais* skaitlis	2
Secina, ka divu *tīri jauko* skaitļu summa ir vismaz 44	1
Pamato, ka visi pāra skaitļi, kas ir vismaz 22, ir *tīri jauki*	3
Pamato, ka visi nepāra skaitļi, kas ir vismaz 27, ir *tīri jauki*	3
Secina, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis	1
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.5. Šaha turnīrā katrs dalībnieks ar katru izspēlēja tieši vienu partiju. Katrā partijā par uzvaru tiek piešķirts 1 punkts, par neizšķirtu tiek piešķirti 0,5 punkti, par zaudējumu – 0 punkti. Turnīra beigās izrādījās, ka katra dalībnieka uzvaru skaits nepārsniedz tā neizšķirtu skaitu un nav divu dalībnieku, kuri kopsummā būtu ieguvuši vienādu punktu skaitu. Vai iespējams, ka turnīrā piedalījās **a)** 15 dalībnieki, **b)** 16 dalībnieki?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams. Apzīmējam dalībniekus ar $d_1, d_2, \ldots, d_{15}$, tad iespējams, ka dalībnieks d_1 ir ieguvis 3,5 punktus, d_2 – 4 punktus, ..., d_{15} ir ieguvis 10,5 punktus. Tas iespējams, ja viņi ir spēlējuši, piemēram, šādi (skat. tabulu). Partijas, kurās spēlē dalībnieki ar dažādas paritātes numuriem, ir beigušās neizšķirti, bet partijās, kurās spēlē dalībnieki ar vienādas paritātes numuriem, ir uzvarējis dalībnieks ar lielāko numuru. Redzams, ka katrs dalībnieks vismaz pusi partiju ir spēlējis neizšķirti, tātad tā uzvaru skaits nepārsniedz neizšķirtu skaitu.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	Uzvaras	Neizšķirts	Punkti
d_1		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0	7	3,5
d_2	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	8	4
d_3	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	1	7	4,5
d_4	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	1	8	5
d_5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	2	7	5,5
d_6	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	2	8	6
d_7	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	7	6,5
d_8	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	3	8	7
d_9	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	4	7	7,5
d_{10}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	4	8	8
d_{11}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	5	7	8,5
d_{12}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	5	8	9
d_{13}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	6	7	9,5
d_{14}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	6	8	10
d_{15}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		7	7	10,5

b) Nē, nav iespējams. Apzīmēsim dalībnieku iegūto punktu skaitu augošā secībā ar $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$. Ievērojam, ka $a_{16} \leq 11$ (7 uzvaras un 8 neizšķirti), jo pretējā gadījumā šī dalībnieka uzvaru skaits pārsniegtu neizšķirtu skaitu. Attiecīgi $a_{15} \leq 10{,}5$; $a_{14} \leq 10$; ... ; $a_1 \leq 3{,}5$. Tātad visu dalībnieku kopējais iegūtais punktu skaits nepārsniedz

$$11 + 10{,}5 + 10 + 9{,}5 + \ldots + 3{,}5 = 116.$$

Bet kopā turnīrā tika izspēlētas $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ partijas un katrā partijā izcīnīts viens punkts , tātad kopējam punktu skaitam jābūt tieši 120, iegūta pretruna.

Par atbildi a) jā un b) nē	1
Par **a)** gadījumu (kopā 4 punkti)	
Par derīgu piemēru	4
Par **b)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Aprēķināts kopējais punktu skaits ir 120	1
Pamatots, ka turnīrā nevarēja piedalīties 16 dalībnieki	4

12.1. Pa 4,5 km garu trasi, kurai ir riņķa līnijas forma, ar sniega motocikliem brauc Māris un Mārtiņš. Māris sekundē nobrauc par 1 metru vairāk nekā Mārtiņš, tāpēc visu trasi veic par 50 sekundēm ātrāk nekā Mārtiņš. Ar kādu ātrumu brauc Māris un Mārtiņš?

Atrisinājums. Ar x apzīmējam ātrumu, ar kādu brauc Māris, tad Mārtiņa braukšanas ātrums ir $x-1$. Māris trasi veica $\frac{4500}{x}$ sekundēs, bet Mārtiņš trasi veica $\frac{4500}{x-1}$ sekundēs. Tā kā Māris nobrauca trasi par 50 sekundēm ātrāk nekā Mārtiņš, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{4500}{x-1}-\frac{4500}{x}=50.$$

Reizinot abas vienādojuma puses ar $\frac{1}{50}x(x-1)\neq 0$, iegūstam vienādojumu

$$90x-90(x-1)=x(x-1),$$
$$x^2-x-90=0,$$

kura saknes ir $x_1=10$ un $x_2=-9$ (neder). Esam ieguvuši, ka Māris brauca ar ātrumu 10 m/s un Mārtiņš brauca ar ātrumu 9 m/s.

Piezīmes

1. Var apzīmēt arī laiku (cik ilgā katrs veic visu trasi) y un $y-50$, tad iegūst vienādojumu

$$\frac{4500}{y-50}-\frac{4500}{y}=1,$$

kura saknes ir $y_1=-450$ (neder) un $y_2=500$ sekundes. Pēc tam aprēķina braucēju ātrumus.

2. Ja ātrumu rēķina km/h, tad braucēju ātrumi attiecīgi ir 36 km/h un 32,4 km/h.

Apzīmē abu braucēju ātrumus	1
Izsaka, cik sekundēs katrs braucējs veica trasi	1+1
Iegūst daļveida vienādojumu	1
Risinot vienādojumu, ņem vērā definīcijas kopu $x(x-1)\neq 0$	1
Atrisina vienādojumu	3
Secina, ka negatīvā sakne neder	1
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir aritmētiska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Nepareizi sastādīts vienādojums (arī tad, ja nav saskaņotas mērvienības)	Ne vairāk kā 3
Ja uzminētas vērtības un veikta pārbaude	2
Veikta pilna pārlase (kaut ar naturāliem skaitļiem) un atrastas derīgās vērtības	4

12.2. Dots, ka $8ac + 2bc + c^2 < 0$. Pierādīt, ka $b^2 - 8ac > 0$.

1. atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = 2ax^2 + bx + c$. Ievērojam, ka

$$8ac + 2bc + c^2 = c(8a + 2b + c) = f(0) \cdot f(2).$$

No dotā izriet, ka $f(0) \cdot f(2) < 0$, tātad kvadrātfunkcija krusto x asi. Līdz ar to kvadrātfunkcijai ir divas saknes un tās diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D = b^2 - 8ac > 0$.

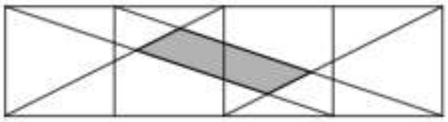
2. atrisinājums. Pārveidojam doto nevienādību:

$$8ac - b^2 + b^2 + 2bc + c^2 < 0;$$
$$(b + c)^2 < b^2 - 8ac.$$

Tā kā $(b + c)^2 \geq 0$, tad $b^2 - 8ac > 0$.

1. atrisinājums	
Apskata kvadrātfunkciju $f(x) = 2ax^2 + bx + c$	1
Pamato, ka $f(0) \cdot f(2) < 0$	5
Secina, ka kvadrātfunkcijas diskriminants ir pozitīvs	2
Iegūst, ka $b^2 - 8ac > 0$	2
2. atrisinājums	
Pārveido doto nevienādību formā $(b + c)^2 < b^2 - 8ac$	7
Izmanto, ka $(b + c)^2 \geq 0$	1
Secina, ka $b^2 - 8ac > 0$	2
Apskatītas konkrētas a, b, c vērtības	Ne vairāk kā 2

12.3. Taisnstūris salikts no četriem vienības kvadrātiem. Aprēķināt iekrāsotā četrstūra (skat. 6. att.) laukumu un leņķus.

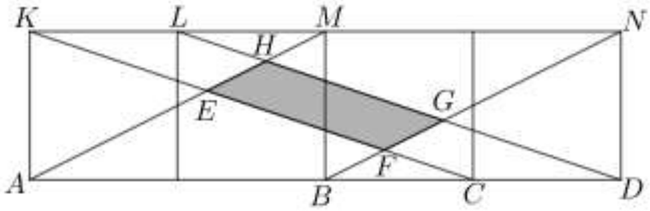


6. att.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka iekrāsotais četrstūris ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tā kā krustleņķi ir vienādi un iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi, tad pēc pazīmes $\ell\ell$ iegūstam līdzīgus trijstūrus:

- $\Delta AEC \sim \Delta MEK$, to līdzības koeficients ir $\frac{KM}{AC} = \frac{2}{3}$ (skat. 7. att.), tātad ΔAEC augstums ir $\frac{3}{5}AK = \frac{3}{5}$, un simetrijas dēļ ΔBGD augstums ir $\frac{2}{5}$;
- $\Delta BFC \sim \Delta NFK$, to līdzības koeficients ir $\frac{BC}{KN} = \frac{1}{4}$, tātad ΔBFC augstums ir $\frac{1}{5}$, un simetrijas dēļ ΔAHD augstums ir $\frac{4}{5}$.

Līdz ar to $S_{EFGH} = S_{AHD} - S_{AEC} - S_{BGD} + S_{BFC} = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}(16 - 9 - 4 + 1) = \frac{2}{5}$.



7. att.

Pēc Pitagora teorēmas trijstūros ABM un LND ieugūstam, ka $AM = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{5}$ un $LD = \sqrt{LN^2 + ND^2} = \sqrt{10}$.

Ņemot vērā trijstūru līdzību, iegūstam, ka $AH = \frac{4}{5}AM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ un $HD = \frac{4}{5}LD = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī AHD, iegūstam

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 - 2 \cdot AH \cdot HD \cdot \cos\sphericalangle AHD\,;$$

$$16 = \frac{16}{5} + \frac{32}{5} - \frac{32\sqrt{2}}{5}\cos\sphericalangle AHD\,;$$

$$32\sqrt{2}\cos\sphericalangle AHD = 48 - 80;$$

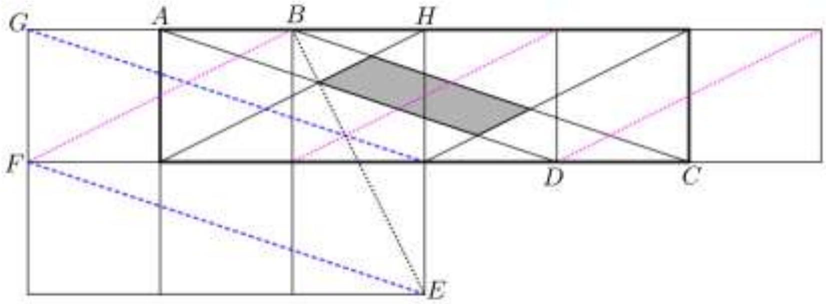
$$\cos\sphericalangle AHD = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle AHD = 135°$ un $\sphericalangle HEF = 45°$.

1. atrisinājums	
Izsaka $S_{EFGH} = S_{AHD} - S_{AEC} - S_{BGD} + S_{BFC}$	1
Aprēķina katra trijstūra laukumu	2
Iegūst, ka $S_{EFGH} = \frac{2}{5}$	2
Aprēķina ΔAHD malas	2
Iegūst, ka $\cos\sphericalangle AHD = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
Aprēķina pelēkā paralelograma leņķus	1

2. atrisinājums. Papildinām doto zīmējum ar vēl 4 kvadrātiem un novelkam dotajām taisnēm paralēlas taisnes (skat. 8. att., kur paralēlās taisnes iekrāsotas zila un violetā krāsā). Aprēķinām paralelograma $ABCD$ (jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas) laukumu $S_{ABCD} = 1 \cdot 1 = 1$. Ievērojam, ka nogriezni BC krusto paralēlas taisnes, kas atrodas vienādā attālumā viena no otras. Tātad tās sadala nogriezni BC piecās vienādās daļās (Talesa teorēma). Līdz ar to iekrāsotā četrstūra laukums ir $\frac{2}{5} S_{ABCD} = \frac{2}{5}$.

Trijstūris FBE ir vienādsānu taisnleņķa, jo $\Delta FGB = \Delta BHE$ un tie ir taisnleņķa trijstūri. Tātad $\sphericalangle BFE = 45°$. Līdz ar to iekrāsotā četrstūra (paralelograma) leņķu lielumi ir $45°$ (jo leņķi, kuru malas ir paralēlas, ir vienādi) un $135°$.



8. att.

2. atrisinājums	
Pamato, ka $S_{EFGH} = \frac{2}{5}$	5
Pamato, ka $\sphericalangle BFE = 45°$.	4
Aprēķina pelēkā paralelograma leņķus	1

12.4. Doti naturāli skaitļi a un b, kas lielāki nekā 1. Zināms, ka gan a^2+b, gan b^2+a ir pirmskaitļi. Pierādīt, ka $a+b$ un $ab+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p. Tādā gadījumā reizinājums $(a^2+b)(a+b^2)=a^3+b^3+a^2b^2+ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(ab+1)$ arī dalās ar p. Tā kā tas ir divu pirmskaitļu reizinājums, tad vai nu $a^2+b=p$, vai arī $a+b^2=p$. Taču gan $a^2+b>a+b$, gan
$a+b^2>a+b$, bet tā kā $a+b$ dalās ar p, tad $a+b\geq p$ – pretruna.

2. atrisinājums. Tā kā a^2+b ir pirmskaitlis, tad tas ir nepāra skaitlis (jo $a,b>1$), līdz ar to skaitļiem a un b ir pretēja paritāte. Pieņemsim pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p. Tā kā $a+b$ (un arī $ab+1$) ir nepāra skaitlis, tad p ir nepāra pirmskaitlis ($p\geq 3$). Tā kā abi skaitļi dalās ar p, tad arī to summa un starpība dalās ar p:

- $ab+1+a+b=(a+1)(b+1)$ dalās ar p;
- $ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)$ dalās ar p.

Pieņemsim, ka $a+1$ dalās ar p (otrs gadījums, kad $b+1$ dalās ar p, ir analoģisks). Tad $a-1$ nedalās ar p, jo, ja dalītos, tad $(a+1)-(a-1)=2$ arī dalītos ar p. Tātad $b-1$ dalās ar p. Bet tādā gadījumā

$$b^2+a=(b-1)(b+1)+(a+1)=p\cdot\left((b+1)\frac{b-1}{p}+\frac{a+1}{p}\right)$$

nav pirmskaitlis – pretruna.

1. atrisinājums	
Pieņem pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p	1
Pārveido reizinājumu $(a^2+b)(a+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(ab+1)$	3
Secina, ka šis reizinājums dalās ar pirmskaitli p	1
Secina, ka tādā gadījumā vai nu $a^2+b=p$, vai arī $a+b^2=p$	2
Iegūst pretrunu	4
2. atrisinājums	
Secina, ka skaitļiem a un b ir pretēja paritāte	1
Pieņem pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p	1
Secina, ka $p\geq 3$	1
Apskata skaitļu $a+b$ un $ab+1$ summu un starpību	1
Iegūst pretrunu	6
Par konkrētiem piemēriem	0

12.5. Taisnstūrveida rūtiņu tabulā ar n rindām un m kolonnām ($n > 1, m > 1$) katrā rūtiņā ierakstīts atšķirīgs naturāls skaitlis. Sākumā rūtiņās ierakstītie skaitļi pa rindām bija sakārtoti augošā secībā (katrā rindā visi skaitļi no katras rūtiņas pa labi ir lielāki, bet pa kreisi – mazāki nekā tajā esošais skaitlis). Pēc tam visas kolonnas sakārtoja augošā secībā (katrā kolonnā visi skaitļi virs katras rūtiņas ir mazāki, bet zem – lielāki nekā tajā esošais skaitlis). Pierādīt, ka pēc pārkārtošanas tabulā ierakstītie skaitļi pa rindām joprojām ir sakārtoti augošā secībā.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kāda rinda vairs nav sakārtota augošā secībā. Aplūkosim pirmo nesakārtoto rindu, tās kārtas numuru apzīmēsim ar i. Tas nozīmē, ka visas rindas no pirmās līdz $(i-1)$-ajai ir sakārtotas, bet i-ā rinda nav sakārtota.

Tātad šajā rindā ir divi tādi elementi x_i un y_i, ka x_i atrodas pa kreisi no y_i, bet $x_i > y_i$. Aplūkosim kolonnas X un Y, kurās atrodas attiecīgi x_i un y_i, apzīmēsim to elementus attiecīgi ar x_k un y_k ($1 \leq k \leq n$).

Tā kā visas iepriekšējās rindas ir sakārtotas, tad $x_1 < y_1,\ x_2 < y_2,\ \ldots,\ x_{i-1} < y_{i-1}$ (bet $x_i > y_i$). Tā kā kolonnas ir sakārtotas, tad tas nozīmē, ka kolonnā X ir tieši $(i-1)$ skaitlis $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$, kas ir mazāks nekā y_i. Bet katrs no i skaitļiem $y_1, y_2, \ldots, y_i$ sākumā atradās vienā rindā ar kādu skaitli no kolonnas X, kas par to ir mazāks, tātad tādiem skaitļiem jābūt vismaz skaitā i – pretruna.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka arī pēc pārkārtošanas skaitļi pa rindām ir sakārtoti augošā secībā.

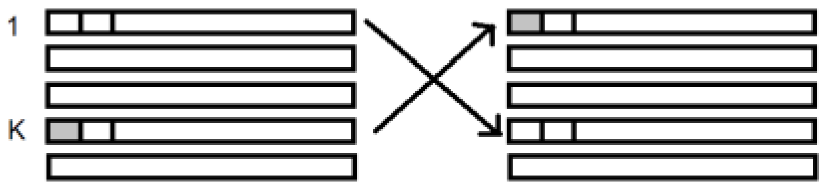
1. atrisinājums	
Pieņem pretējo	1
Apskata pirmo nesakārtoto rindu	2
Secina, ka kolonnā X ir tieši $i-1$ skaitlis, kas ir mazāks nekā y_i	3
Ievēro, ka sākumā katram no i skaitļiem $y_1, \ldots, y_i$ atbilstošais skaitlis kolonnā X bija mazāks nekā y_i	2
Iegūst pretrunu	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

2. atrisinājums. Aplūkosim, kā iespējams veikt prasīto skaitļu sakārtošanu pa kolonnām, kārtošanas procesā nepazaudējot sakārtojumu pa rindām. Skaidrs, ka pēc visu kolonnu sakārtošanas pirmajā rindā katrā kolonnā jābūt šīs kolonnas vismazākajam skaitlim.

Aplūkojam sākotnējās tabulas pirmo kolonnu un atrodam tajā vismazāko skaitli.

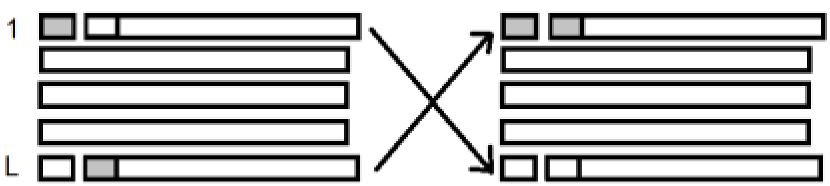
Pieņemsim, ka mazākais skaitlis atrodas K-tajā rindā.

Samainīsim vietām pirmo un K-to rindu (skat. 9. att.). Ja kolonnas mazākais skaitlis jau bija pirmajā rindā, tad šis solis ir jāizlaiž. Esam ieguvuši, ka pirmajā kolonnā mazākais skaitlis atrodas pirmajā rindā un visas rindas joprojām ir sakārtotas augoši (jo katras rindas saturs ir iepriekšējais – mainīta ir tikai to secība).



9. att.

Tagad aplūkojam otro kolonnu. Pieņemsim, ka mazākais skaitlis atrodas L-tajā rindā. Paņemsim 1. un L-tās rindas fragmentus no otrās kolonnas līdz beigām (M-tajai kolonnai) un samainīsim vietām (skat. 10. att.).



10. att.

Pārliecināsimies, ka arī pēc šādas maiņas gan pirmā, gan L-tā rinda joprojām ir sakārtotas augoši.
Neatbilstība var rasties tikai starp rindas pirmo un otro skaitli – tālāk nekas netika mainīts. Pieņemsim, ka pirms maiņas pirmās rindas pirmajā un otrajā kolonnā bija skaitļi p_1 un p_2, bet L-tajā – skaitļi l_1 un l_2. Šiem skaitļiem ir spēkā sakarības: $p_1 < p_2$ un $l_1 < l_2$ (sakārtojums pa rindām) un $p_1 < l_1$ un $l_2 < p_2$ (pirmo divu kolonnu mazākie skaitļi). Tātad ir spēkā arī $p_1 < l_2$ un $l_1 < p_2$, kas nozīmē, ka šo divu fragmentu samainīšana vietām saglabā sakārtojumu pa rindām.
Analoģiski panākam, ka pirmās rindas trešais, ceturtais, ..., M-tais skaitlis ir mazākie savā kolonnā, katru reizi samainot vietām rindu fragmentus no vajadzīgās kolonnas līdz rindas beigām, bet skaitļus kolonnās pa kreisi neaiztiekot.
Kad šādi pirmajā rindā augošā secībā esam izvietojuši kolonnu mazākos skaitļus, varam par šo rindu aizmirst un atkārtot tādu pašu sakārtošanas procesu par vienu rindu mazākai tabulai – tai, ko iegūstam paņemot tabulas rindas no otrās līdz N-tajai.
Kad šādi būsim tikuši līdz beigām (pēdējā posmā sakārtojot divas rindas), gan kolonnas, gan rindas būs sakārtotas augošā secībā. Tas nozīmē, ka arī pēc kolonnu sakārtošanas skaitļi tabulas rindās ir sakārtoti.

2. atrisinājums	
Idejas būtības izklāsts (pārkārtošanas procesa ideja)	2
Pierāda īpašību vienai rindai (piemēram, pamato, kā var panākt, ka 1. rindā atrodas katras kolonnas mazākais skaitlis, turklāt sakārtojums pa rindām saglabājas	5
Korekti pamato, ka īpašība saglabājas arī citām rindām	3
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2