

Atklātā matemātikas olimpiāde

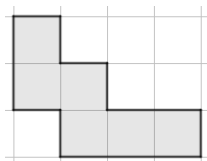
5. klase

- 5.1. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas (skat. 1. att.) katrā rūtiņā ieraksti pa vienam naturālam skaitlim no 3 līdz 11 (katrā rūtiņā citu skaiti) tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas! Daži skaitļi jau ir ierakstīti.

4		
	7	
6		

1. att.

- 5.2. Karlsonam ir 29 milzīgi tortes gabali. Viņš izvēlas kādu no gabaliem un sagriež to vai nu 3, vai 5 mazākos gabalos. Tad viņš atkal izvēlas kādu no gabaliem un sagriež to vai nu 3, vai 5 mazākos gabalos. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Karlsons var iegūt tieši 2022 tortes gabalus?
- 5.3. No taisnstūra ar izmēriem 6×7 rūtiņas izgriez sešas 2. att. redzamās figūras! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



2. att.

- 5.4. Laine uz lapas uzrakstīja lielāko divciparu pirmskaitli, kuram abi cipari arī ir pirmskaitļi. Raimonds uzrakstīja mazāko divciparu pirmskaitli, kuram abi cipari arī ir pirmskaitļi. Kāda ir abu uzrakstīto skaitļu starpība?
- 5.5. Rindā pēc kārtas bez tukšumiem uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 999:
123456789101112...998999.
Cik vietās šajā rindā pēc kārtas uzrakstīti cipari 2, 0, 2, 2 tieši šādā secībā?

Atklātā matemātikas olimpiāde

6. klase

- 6.1.** Piektdienas rītā Laine no savām mājām devās uz skolu. Kad viņa bija nogājusi 20% no visa ceļa, viņai vēl bija jānoiet 1200 metri, lai nokļūtu līdz vietai, kur viņai būtu atlikuši vēl 20% no visa ceļa. Cik kilometru ir no Laines mājām līdz skolai?
- 6.2.** Konditorejā ir 4 plaukti, kuros pārdevēja liek eklērus. No rīta šajos plauktos bija palikuši attiecīgi 2, 9, 0, 4 eklēri. Ik pēc 20 minūtēm pārdevēja izvēlas divus no šiem plauktiem un katrā no tiem ieliek 1 svaigi ceptu eklēru. Šodien eklēri nevienam negaršo, tāpēc neviens tos nepērķ. Vai iespējams, ka kādā brīdī visos četros plauktos būs vienāds skaits eklēru?
- 6.3.** No kvadrāta ar izmēriem 10×10 rūtiņas izgriez sešpadsmit 3. att. redzamās figūras! Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



3. att.

- 6.4.** Laine uz lapas uzrakstīja lielāko divciparu pirmskaitli, kuram abi cipari arī ir pirmskaitļi. Raimonds uz lapas uzrakstīja mazāko trīsciparu pirmskaitli. Kāda ir abu uzrakstīto skaitļu summa?
- 6.5.** Rindā pēc kārtas bez tukšumiem uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 9999:

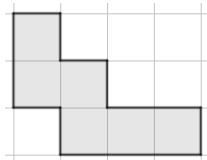
123456789101112...99989999.

Cik vietās šajā rindā pēc kārtas uzrakstīti cipari 2, 0, 2, 2 (tieši šādā secībā)?

Atklātā matemātikas olimpiāde

7. klase

- 7.1.** Attālināto mācību laikā skolēni iemācījās ļoti ātri atbildēt uz testa jautājumiem. Vilnis uz 4 jautājumiem var atbildēt 30 sekundēs, bet Raimonds uz pieciem jautājumiem var atbildēt 40 sekundēs. Skolotāja bija sagatavojusi testu ar ļoti daudz jautājumiem. Vilnim bija nepieciešama 1 stunda, lai atbildētu uz visiem šī testa jautājumiem. Cik ilgā laikā šo pašu testu izpildīja Raimonds?
- 7.2.** Karlsonam ir 30 milzīgi tortes gabali. Viņš izvēlas trīs gabalus un sagriež katru no tiem vai nu 3, vai 5 mazākos gabalos (visus izvēlētos gabalus sagriež vienādā skaitā mazāku gabalu). Tad viņš atkal izvēlas kādus 3 gabalus un sagriež katru no tiem vai nu 3, vai 5 mazākos gabalos (visus izvēlētos gabalus sagriež vienādā skaitā gabalu). Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Karlsons var iegūt tieši 2000 tortes gabalus?
- 7.3.** Vai taisnstūri ar izmēriem 3×3370 rūtiņas var noklāt ar 4. att. redzamām figūrām tā, lai paliktu tieši 2022 nenoklātas rūtiņas? Dotās figūras malām jāiet pa rūtiņu līnijām, tā var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā, figūras nedrīkst pārklāties vai iziet ārpus taisnstūra.



4. att.

- 7.4.** Elektroniskais pulkstenis rāda stundu skaitu (vesels skaitlis robežās no 0 līdz 23) un minūšu skaitu (vesels skaitlis robežās no 0 līdz 59). Noteikt, cik reižu diennaktī stundu skaita un minūšu skaita starpība dalās ar 7.
- 7.5.** Trijzemē apgrozībā ir trīs veidu monētas: 2 centi, 5 centi un vēl viena. Zināms, ka gan trijkāji, kas maksā 13 centus, gan trīsriteni, kas maksā 19 centus, var nopirkt, maksājot tieši ar trīs monētām. Kāda ir Trijzemes trešās monētas vērtība? *Atrodi visus iespējamus variantus un pamato, ka citu nav!*

Atklātā matemātikas olimpiāde

8. klase

- 8.1.** Taisnes $y = x$ un $y = -2x + 2022$ krustojas punktā A . Punkti B un C ir attiecīgi šo taisņu krustpunkti ar y asi. Aprēķināt trijstūra ABC laukumu!
- 8.2.** Kādā dienā Karlsons uzlika uz galda 44 kūciņas. Lai būtu jautrāk, Karlsons izdomāja, ka vienā piegājienā viņš apēdīs vai nu 5 kūciņas, vai arī 10 kūciņas. Ja Karlsons apēda 5 kūciņas, tad Brālītis uzreiz uz galda uzlika 9 kūciņas. Ja Karlsons apēda 10 kūciņas, tad Brālītis uzreiz uz galda uzlika 2 kūciņas. Vai iespējams, ka kādā brīdī uz galda bija tieši 2022 kūciņas?
- 8.3.** Kvadrātā $ABCD$ novilkta diagonāle AC un uz tās atzīmēts punkts E tā, ka $\sphericalangle DEC = 75^\circ$. Nogriežņa DE pagarinājums krusto malu AB punktā F . Pierādīt, ka $EF = FB$!
- 8.4.** Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kāda varēja būt n vērtība? *Atrodi visus variantus un pamato, ka citu nav!*
- 8.5.** Mārtiņš augošā secībā pēc kārtas sāka rakstīt skaitļus, kuru pirmie četri cipari ir „3321”:
- 3321; 33210; 33211; 33212; 33213; 33214; ...
- Kāds ir 3321. skaitlis šajā virknē?

Atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

- 9.1.** Sporta preču veikalā ir daži vienriteņi, daži divriteņi un daži trīsriteņi, turklāt zināms, ka divriteņu ir vairāk nekā trīsriteņu. Emīls iegāja veikalā un redzēja septiņus riteņu sēdekļus un trīspadsmit riepas. Cik vienriteņu ir sporta preču veikalā?
- 9.2.** Sākumā uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2112. Ar to atļauts veikt šādas darbības:
- patvaļīgi mainīt uzrakstīto ciparu secību;
 - ja skaitļa pēdējie divi cipari ir 12, tos drīkst nodzēst;
 - ciparu grupu "21" var aizstāt ar "22233";
 - ciparu grupu "223" var aizstāt ar "1".
- Vai, atkārtojot vairākus šādus gājienus, ir iespējams iegūt skaitli 212?
- 9.3.** Izliktā sešstūrī $ABCDEF$ pretējās malas ir pa pāriem paralēlas, tas ir, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ un $CD \parallel AF$. Zināms, ka $AB = DE$. Pierādīt, ka $BC = EF$ un $CD = AF$.
- 9.4.** Skaitļi a ; b ; c (tieši šādā secībā) veido aritmētisko progresiju. Pierādīt, ka skaitļi $a^2 - bc$; $b^2 - ac$; $c^2 - ab$ (tieši šādā secībā) arī veido aritmētisko progresiju!
- 9.5.** Kāds mazākais skaits rūtiņu jāaizkrāso taisnstūrī ar izmēriem 8×8 rūtiņas, lai nevarētu atrast nevienu taisnstūrī ar izmēriem 1×5 rūtiņas (kurš var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), kuram visas rūtiņas ir neaizkrāsotas?

Atklātā matemātikas olimpiāde

10. klase

10.1. Uz tāfeles uzrakstīti k secīgi naturāli skaitļi:

$$a + 1; a + 2; \dots; a + k.$$

Atrast k vērtību, ja zināms, ka tieši 52% no uzrakstītajiem skaitļiem ir pāra skaitļi!

10.2. Sākumā uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 1221. Ar to atļauts veikt šādas darbības:

- patvaļīgi mainīt uzrakstīto ciparu secību;
- ja skaitļa pēdējie divi cipari ir 12, tos drīkst nodzēst;
- ciparu grupu "21" var aizstāt ar "112233";
- ciparu grupu "223" var aizstāt ar "1".
- drīkst izsvītrot trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus ciparus.

Vai, atkārtojot vairākus šādus gājienu, ir iespējams iegūt skaitli 121?

10.3. Uz trijstūra ABC malām AC un BC atlikti attiecīgi punkti M un K . Nogriežņi AK un BM krustojas punktā O . Aprēķināt trijstūra ABC laukumu, ja $S_{AMO} = S_{BKO} = 8$ un $S_{KMO} = 4$.

10.4. Kāds ir lielākais skaits dažādu naturālu skaitļu, ko var izvēlēties, lai jebkuru trīs izvēlēto skaitļu summa būtu pirmskaitlis?

10.5. Pirmo n skaitļu reizrēķina tabula ir tabula ar n rindām un n kolonnām, kurā r -tajā rindā un k -tajā kolonnā ierakstīts skaitlis $r \cdot k$ (visiem $1 \leq r \leq n$ un $1 \leq k \leq n$). Šī tabula ir izkrāsota šaha galdiņa veidā tā, ka rūtiņa, kas atrodas pirmās rindas pirmajā kolonnā ir nokrāsota melna (5. att. redzams piemērs, kur $n = 5$). Iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu apzīmēsim ar A , bet neiekrāsotajās ar B . Aprēķiniet $(A - B)$ vērtību (tā var būt atkarīga no n vērtības).

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

5. att.

Atklātā matemātikas olimpiāde

11. klase

- 11.1.** Punkts A ir parabolas $y = x^2 + 50$ virsotne, bet punkts B ir parabolas $y = x^2 - 2022x + 47$ virsotne. Aprēķināt trijstūra AOB laukumu, ja punkts O ir koordinātu asu krustpunkts!
- 11.2.** Doti divi lieli trauki A un B . Sākumā traukā A atrodas 2021 melna un 2023 baltas bumbiņas, bet traukā B – tikai melnas bumbiņas. Bumbiņu kopskaits abos traukos sākumā ir vienāds. Pēc kārtas tiek atkārtota šāda darbība:
uz labu laimi tiek paņemtas divas bumbiņas no trauka A ,
- ja tās ir vienādā krāsā, tad tās abas tiek ieliktas traukā B un viena melna bumbiņa no trauka B tiek ielikta traukā A ;
 - ja tās ir dažādās krāsās, tad baltā bumbiņa tiek ielikta atpakaļ traukā A , bet melnā – traukā B .
- Šī darbība tiek atkārtota, līdz traukā A ir atlikusi tikai viena bumbiņa. Vai iespējams, ka tā būs melna?
- 11.3.** Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāle AC ir leņķa A bisektrise, $AC = AD$ un $\sphericalangle B = 90^\circ$. Trijstūrī ADC novilkts augstums DH . Pierādīt, ka taisne BH krusto nogriezni CD tā viduspunktā!
- 11.4.** Četr ciparu skaitli \overline{abcd} saucim par *ekscentrisku*, ja neviens tā cipars nav 0 un tam ir spēkā vienādība $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Piemēram, skaitlis 1978 ir ekscentrisks, jo $19 + 78 = 97$. Cik pavisam ir ekscentrisku skaitļu?
- 11.5.** Zināms, ka trijstūra ABC leņķus α, β un γ saista sakarība $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris!

Atklātā matemātikas olimpiāde

12. klase

- 12.1.** Regulāras piecstūra plāksnītes virsotnēs pa vienai reizei uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5. Divas šādas plāksnītes saucim par dažādām, ja, pagriežot vai apmetot vienu plāksnīti otrādi, nevar panākt, ka visi vienas plāksnītes virsotnēs uzrakstītie skaitļi sakrīt ar otras plāksnītes virsotnēs uzrakstītajiem skaitļiem. Cik dažādas plāksnītes var izveidot?
- 12.2.** Doti divi lieli trauki A un B. Sākumā traukā A atrodas 2022 melnas un 2022 baltas bumbiņas, bet traukā B – tikai melnas bumbiņas. Bumbiņu kopskaits abos traukos sākumā ir vienāds. Pēc kārtas tiek atkārtota šāda darbība:
uz labu laimi tiek paņemtas divas bumbiņas no trauka A,
○ ja tās ir vienādā krāsā, tad tās abas tiek ieliktas traukā B un viena melna bumbiņa no trauka B tiek ielikta traukā A;
○ ja tās ir dažādās krāsās, tad baltā bumbiņa tiek ielikta atpakaļ traukā A, bet melnā – traukā B.
Šī darbība tiek atkārtota, līdz traukā A ir atlikusi tikai viena bumbiņa. Vai iespējams, ka tā būs balta?
- 12.3.** Izliektā sešstūrī $ABCDEF$ pretējās malas ir pa pāriem paralēlas, bet dažāda garuma. Pierādīt, ka $S_{ACE} = S_{BDF}$!
- 12.4.** Doti pieci naturāli skaitļi. Šo skaitļu reizinājums apzīmēts ar R , bet to piekto pakāpju summa ar S . Zināms, ka S dalās ar 1001. Vai ir iespējams, ka R un S ir savstarpēji pirmskaitļi?
- 12.5.** Pierādīt, ka katram $n > 2$ var atrast tādus n atšķirīgus naturālus skaitļus $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 3 \cdot 2^{n-2}$, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$