Latvijas 46. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi

5.1. Doti trīs kvadrāti. Zilā kvadrāta malas garums ir 10 cm, sarkanā kvadrāta perimetrs ir par 80% lielāks nekā zilā kvadrāta perimetrs, bet zaļā kvadrāta laukums ir 4 reizes mazāks nekā zilā kvadrāta laukums.

a) Par cik sarkanā kvadrāta laukums ir lielāks nekā zilā kvadrāta laukums?

b) Par cik procentiem zaļā kvadrāta perimetrs ir mazāks nekā zilā kvadrāta perimetrs?

Atrisinājums. Zilā kvadrāta perimetrs ir $4 \cdot 10 = 40$ centimetri, bet laukums $10 \cdot 10 = 100$ cm^2.

a) Sarkanā kvadrāta perimetrs ir par 80% lielāks nekā zilā kvadrāta perimetrs, tas ir, 80% no $40 = \frac{80}{100} \cdot 40 = 32$ centimetri. Tātad sarkanā kvadrāta perimetrs ir $40 + 32 = 72$ centimetri un tā malas garums ir $72 : 4 = 18$ centimetri. Līdz ar to sarkanā kvadrāta laukums ir $18 \cdot 18 = 324$ cm^2. Tātad sarkanā kvadrāta laukums ir par $324 - 100 = 224$ cm^2 lielāks nekā zilā kvadrāta laukums.

b) Zaļā kvadrāta laukums ir $100 : 4 = 25$ cm^2. Tāpēc tā malas garums ir 5 cm un perimetrs ir $5 \cdot 4 = 20$ cm. Tātad zaļā kvadrāta perimetrs ir par $40 - 20 = 20$ cm mazāks jeb par 50% mazāks nekā zilā kvadrāta perimetrs.

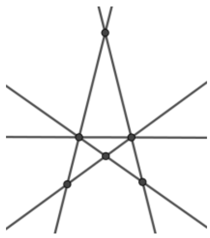
5.2. Uz galda ir divas vāzes ar tulpēm – vienā vāzē ir 46 tulpes, bet otrā – 43 tulpes. Divi spēlētāji pamīšus ņem no tām ārā tulpes. Vienā gājienā viens spēlētājs izvēlas kādu no šīm vāzēm un no tās izņem vai nu 1 tulpi, vai arī 3 tulpes. Zaudē tas spēlētājs, kuram vairs nav ko paņemt. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Savā pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam no tās vāzes, kurā ir 46 tulpes, jāizņem 3 tulpes. Tad pēc pirmā spēlētāja pirmā gājiena tulpju skaits abās vāzēs ir vienāds. Katrā savā nākamajā gājienā pirmajam spēlētājam jāizņem tikpat daudz tulpju, cik tikko savā gājienā ir paņēmis otrais spēlētājs, tikai no otras vāzes, tas ir, tā, lai pēc viņa gājiena tulpju skaits vāzēs atkal būtu vienāds. Ja otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

5.3. Vai var novietot plaknē 5 taisnes tā, lai katras divas no tām krustotos un kopā būtu tieši 6 krustpunkti?

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, 1. att.

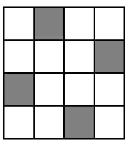


1. att.

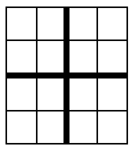
5.4. Kāds mazākais skaits rūtiņu jāiekrāso kvadrātā 4×4, lai katrai no neiekrāsotajām rūtiņām būtu vismaz viena kopēja mala ar iekrāsoto rūtiņu? *Pamato, ka tas ir mazākais iespējamais skaits!*

Atrisinājums. Mazākais iespējamais iekrāsoto rūtiņu skaits ir 4, skat, piemēram, 2. att.

Pamatosim, ka mazāk kā 4 rūtiņas nav iespējams iekrāsot, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Sadalām doto kvadrātu četros 2×2 rūtiņu kvadrātos, skat. 3. att. Ievērojam, ka vismaz vienai rūtiņai katrā no šiem četriem kvadrātiem noteikti ir jābūt iekrāsotai, pretējā gadījumā, ja nav iekrāsota neviena rūtiņa , tad stūra rūtiņai blakus visas rūtiņas ir neiekrāsotas. Tātad pavisam kopā jābūt iekrāsotām vismaz 4 rūtiņām. Ar 4 iekrāsotām rūtiņām pietiek, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi (skat. 2. att.)



2. att.



3. att.

5.5. Atrodi visus tādus sešciparu skaitļus, kuriem visi seši cipari ir vienādi un kurus var izteikt kā sešu dažādu pirmskaitļu reizinājumu! *Pamato, ka atrasti ir visi tādi skaitļi un citu vairs nav!*

Atrisinājums. Ir divi tādi skaitļi, kas atbilst uzdevuma prasībām: $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ un $555555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Pamatosim, ka šie ir vienīgie skaitļi, kas atbilst uzdevuma prasībām.

Skaitli, kas sastāv no sešiem vienādiem cipariem a, var izteikt kā $a \cdot 111111$. Sadalot šo skaitli reizinātājos, iegūstam $a \cdot 111111 = a \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Šim skaitlim jau ir 5 dažādi pirmreizinātāji, tātad reizinātājam a ir jābūt viencipara pirmskaitlim, kas atšķiras no pārējiem reizinātājiem. Vienīgie šādi skaitļi ir 2 un 5. Līdz ar to iegūstam divus derīgus sešciparu skaitļus: $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ un $555555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

6.1. Uzraksti daļas augošā secībā! *Pamato!*

$$\frac{16}{17}; \frac{441}{439}; \frac{11}{12}; \frac{391}{389}; \frac{21}{23}.$$

1. atrisinājums. Izsakām dotās daļas kā decimāldaļas ar precizitāti līdz tūkstošdaļām vai desmittūkstošdaļām: $\frac{16}{17} \approx 0{,}941; \frac{441}{439} \approx 1{,}0046; \frac{11}{12} \approx 0{,}917; \frac{391}{389} \approx 1{,}0051; \frac{21}{23} \approx 0{,}913$.

Tad $\frac{21}{23} < \frac{11}{12} < \frac{16}{17} < \frac{441}{439} < \frac{391}{389}$.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka daļas, sakārtotas augošā secībā, ir

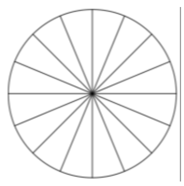
$$\frac{21}{23} < \frac{11}{12} < \frac{16}{17} < \frac{441}{439} < \frac{391}{389}$$

Ievērojam, ka daļas $\frac{21}{23}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{16}{17}$ ir mazākas nekā 1, bet daļas $\frac{391}{389}$; $\frac{442}{439}$ ir lielākas nekā 1.

Noteiksim, par cik daļas $\frac{391}{389}$; $\frac{442}{439}$ ir lielākas nekā 1, tas ir, $\frac{391}{389} - 1 = \frac{2}{389}$; $\frac{441}{439} - 1 = \frac{2}{439}$. Ievērojam, ka $\frac{2}{439} < \frac{2}{389}$ Jo lielāks skaitlis tiek pieskaitīts pie skaitļa 1, jo lielāka ir summa. Tātad $1 + \frac{2}{439} < 1 + \frac{2}{389}$ jeb $\frac{441}{439} < \frac{391}{389}$.

Noteiksim, par cik daļas $\frac{21}{23}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{16}{17}$ ir mazākas nekā 1, tas ir, $1 - \frac{21}{23} = \frac{2}{23}$; $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$; $1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}$. Ievērojam, ka $\frac{1}{17} < \frac{1}{12} = \frac{2}{24} < \frac{2}{23}$. Jo lielāks skaitlis tiek atņemts no skaitļa 1, jo mazāku skaitli iegūstam. Tātad $1 - \frac{2}{23} < 1 - \frac{1}{12} < 1 - \frac{1}{17}$ jeb $\frac{21}{23} < \frac{11}{12} < \frac{16}{17}$.

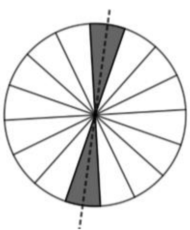
6.2. Riņķis sadalīts 16 vienādās daļās (skat. 4. att.). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



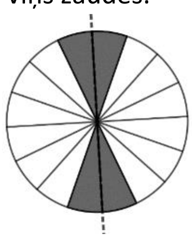
4. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrajam spēlētājam savā pirmajā gājienā jāaizkrāso lauciņi tā, lai abās pusēs starp aizkrāsotajiem lauciņiem paliktu vienāds skaits neaizkrāsoto lauciņu, tas ir, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso vienu lauciņu, tad otrais spēlētājs arī aizkrāso vienu lauciņu (skat. 5. att.), bet, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso divus lauciņus, tad otrais spēlētājs arī aizkrāso divus lauciņus (skat. 6. att.). Katrā savā nākamajā gājienā otrajam spēlētājam jākrāso simetriski pirmā spēlētāja tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret 5. att. vai 6. att. novilkto taisni (atkarībā no pirmā spēlētāja pirmā gājiena). Ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



5. att.

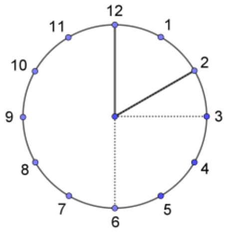


6. att.

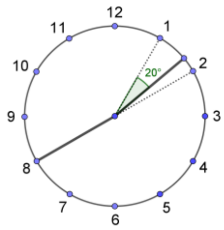
6.3. Cik lielu leņķi (šaurāko) veido pulksteņa stundu un minūšu rādītājs **a)** plkst. 14:00; **b)** plkst. 13:40?

Atrisinājums. a) Ievērojam, ka plkst. 15:00 pulksteņa rādītāji veidotu $90°$ lielu leņķi, tātad plkst. 14:00 pulksteņa rādītāji veido $\frac{2}{3}$ no $90°$ leņķa, tas ir, $\frac{2}{3} \cdot 90° = 60°$ (skat. 7. att.).

b) Plkst. 13:40 minūšu rādītājs būs uz 8, bet stundu rādītājs būs starp 1 un 2 (skat. 7. att.). Leņķis starp 1 un 2 (skat. 8. att.) ir $360°: 12 = 30°$ liels. Tātad 1 stundas laikā stundu rādītājs pavirzītos par $30°$. Tā kā 40 minūtes ir $\frac{2}{3}$ no 1 stundas, tad stundu rādītājs pavirzās par $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$. Šaurākais leņķis starp abiem pulksteņa rādītājiem ir $180° - 10° = 170°$

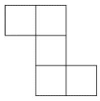


7. att.



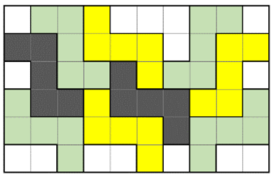
8. att.

6.4. Parādi, kā no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt **a)** 9, **b)** 10 figūras, kādas redzamas 9. att.! Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.

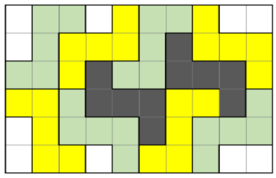


9. att.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 10. att. **b)** Skat., piemēram, 11. att.



10. att.



11. att.

Piezīme. b) daļas atrisinājums der arī a) daļai.

6.5. Vai skaitlis 1234…9899 (pēc kārtas bez atstarpēm uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 99) dalās ar 9?

Atrisinājums. Jā, dotais skaitlis dalās ar 9.

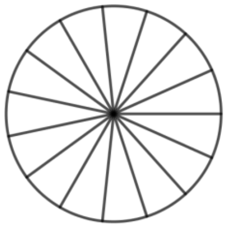
Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Aprēķinām dotā skaitļa ciparu summu. Lai to vieglāk izdarītu, deviņiem viencipara skaitļiem sākumā pierakstām ciparu 0 un dotā skaitļa sākumā pievienojam vēl divas nulles, kas nemaina dotā skaitļa ciparu summu. Ievērojam, ka skaitļu virknē 00, 01, ..., 98, 99 ir izmantoti 200 cipari. Katrs cipars 10 reizes parādās kā desmitu cipars ($\overline{x0}, \overline{x1}, \overline{x2}, \overline{x3}, \overline{x4}, \overline{x5}, \overline{x6}, \overline{x7}, \overline{x8}, \overline{x9}$) un 10 reizes – kā vienu cipars ($\overline{0x}, \overline{1x}, \overline{2x}, \overline{3x}, \overline{4x}, \overline{5x}, \overline{6x}, \overline{7x}, \overline{8x}, \overline{9x}$)

Tātad visu ciparu summa $20 \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 20 \cdot 45 = 900$ dalās ar 9. Tātad arī dotais skaitlis dalās ar 9.

7.1. Dotas divas funkcijas $f(x) = ax + b$ un $g(x) = cx + d$. Zināms, ka katrai x vērtībai pastāv nevienādība $f(x) > g(x)$. Noskaidrot, vai $(a - c)$ var būt pozitīvs, negatīvs skaitlis vai nulle!

Atrisinājums. No dotā izriet, ka šo funkciju grafiki ir taisnes bez kopīgiem punktiem, tas ir, tās ir paralēlas taisnes. Šo taišņu virzienu koeficienti a un c ir vienādi, tātad $a - c = 0$.

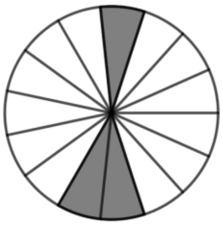
7.2. Riņķis sadalīts 15 vienādās daļās (skat. 12. att.). Divi spēlētāji pamīšus tās aizkrāso. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot vai nu vienu no šīm daļām, vai divas blakus esošas daļas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?



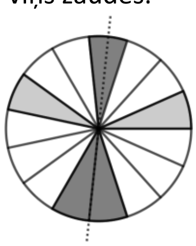
12. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrajam spēlētājam savā pirmajā gājienā jāaizkrāso lauciņi tā, lai abās pusēs starp aizkrāsotajiem lauciņiem paliktu vienāds skaits neaizkrāsoto lauciņu (skat. 13. att.), tas ir, ja pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā aizkrāso vienu lauciņu, tad otrais spēlētājs aizkrāso divus blakus esošus lauciņus un otrādi. Katrā savā nākamajā gājienā otrajam spēlētājam jākrāso simetriski pirmā spēlētāja tikko izdarītajam gājienam attiecībā pret 14. att. novilkto taisni (vai arī simetriski attiecībā pret riņķa līnijas centru). Ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



13. att.

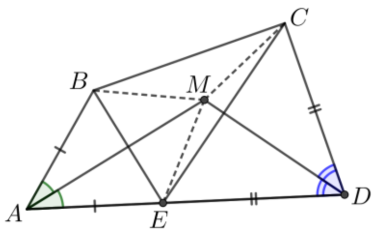


14. att.

7.3. Izliektā četrstūrī $ABCD$ leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas punktā M. Pierādīt, ka $BM = CM$, ja zināms, ka $AD = AB + CD$.

Piezīme. Četrstūri sauc par izliektu, ja visi tā iekšējie leņķi ir mazāki nekā 180°.

Atrisinājums. Uz malas AD atliekam punktu E tā, ka $AE = AB$ (skat. 15. att.). Tā kā pēc dotā $AD = AB + CD$, tad $ED = CD$. Tātad trijstūri BAE un CDE ir vienādsānu trijstūri un attiecīgi bisektrise AM un DM, kas vilktas no virsotnes leņķa, ir arī mediāna un augstums jeb attiecīgi nogriežņu BE un CE vidusperpendikuli. Ja punkts atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, tad tas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Tātad $MB = ME$ un $ME = MC$ (jo M atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula), no kā izriet, ka $MB = MC$.

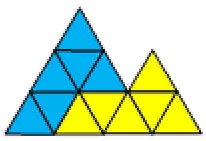


15. att.

7.4. Andris apgalvo, ka sapnī bijis kādā Ēģiptes piramīdā un kādā tās telpā redzējis tādu piecstūri, kas salikts no diviem vienādiem piecstūriem, kuri sastāvējuši no vienādiem regulāriem trijstūriem. Uzzīmē šādu piecstūri!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 16. att.

Piezīme. Mazākais tāds piecstūris sastāv no sešiem trijstūriem un ir pazīstams ar nosaukumu heksamonds *sfinksa*.



16. att.

7.5. Kādai mazākajai naturālai n vērtībai skaitli 10^n iespējams izteikt kā septiņu naturālu skaitļu reizinājumu tā, lai to visu pēdējie cipari ir dažādi (tas ir, nevienam no tiem pēdējais cipars nesakrīt ar kāda cita skaitļa pēdējo ciparu)?

Atrisinājums. Mazākā šāda n vērtība 11. Ja $n = 11$, tad $10^{11} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 5^{10}$. Pierādīsim, ja $n < 11$, tad 10^n šādā formā izteikt nevar.

Ievērojam, ka $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Tātad katru no septiņiem reizinātājiem var izteikt formā $2^x \cdot 5^y$, kur x, y ir nenegatīvi veseli skaitļi. Ievērojam, ka neviena šādā formā izteikta reizinātāja pēdējais cipars nevar būt ne 3, ne 7, ne 9 (ja skaitlis beidzas ar 3, 7 vai 9, tad tas nedalās ne ar 2, ne ar 5). Tātad kā reizinātāju pēdējie cipari jāizmanto visi atlikušie septiņi cipari: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8. Aplūkosim tos 5 reizinātājus, kas beidzas ar 0, 2, 4, 6, 8, apzīmēsim tos ar a_0, a_2, a_4, a_6, un a_8. Ievērojam, ka neviens no tiem, izņemot a_0, nedalās ar 5, tātad tie visi (izņemot a_0) ir divnieka pakāpes.

Tā kā a_0 beidzas ar 0, tad tas dalās ar 2.

Tā kā a_2 beidzas ar 2, tad tas dalās ar 2.

Reizinātājs a_4 noteikti dalās ar 4, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 4, ir $2^2 = 4$.

Reizinātājs a_6 noteikti dalās ar 16, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 6, ir $2^4 = 16$.

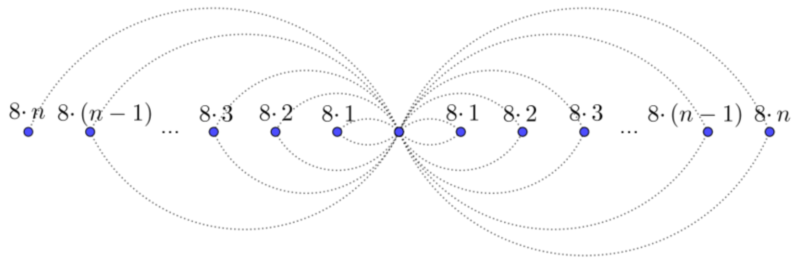
Reizinātājs a_8 noteikti dalās ar 8, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 8, ir $2^3 = 8$.

Tātad $a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$ noteikti dalās ar $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 8 = 2^{11}$.

Tā kā 10^n dalās ar $a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$, tad arī 10^n dalās ar 2^{11}. Tātad n nevar būt mazāks kā 11.

8.1. Atjaunojot taisnu žogu, Raimonds izraka vecos žoga stabus, kuri atradās 8 metru attālumā viens no otra un kuru skaits bija nepāra skaitlis. Raimonds sanesa visus stabus pie vidējā, nesdams tos pa vienam un sākdams ar vienu no malējiem stabiem. Cik bija stabu, ja viņš nostaigāja 840 m?

1. atrisinājums. Stabu skaitu apzīmējam ar $(2n + 1)$, kur n ir naturāls skaitlis. Tad Raimonda noieto ceļu (skat. 17. att.) varam aprakstīt kā $4 \cdot 8 \cdot 1 + 4 \cdot 8 \cdot 2 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + \cdots + 4 \cdot 8 \cdot (n-1) + 3 \cdot 8 \cdot n = 840$. Izdalot abas vienādojuma puses ar 8 un vienkāršojot, iegūstam $4\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\big) + 3n = 105$. Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, iegūstam $4 \cdot \frac{1+n-1}{2}(n-1) + 3n = 105$ jeb $2n(n-1) + 3n = 105$. Atverot iekavas, iegūstam kvadrātvienādojumu $2n^2 + n - 105 = 0$. Diskriminants $D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 105 = 841$. Līdz ar to $n_1 = \frac{-1+29}{4} = 7$ un $n_2 = \frac{-1-29}{4} = -\frac{30}{4}$ (neder, jo n ir naturāls skaitlis). Tātad stabu skaits ir $2n + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.

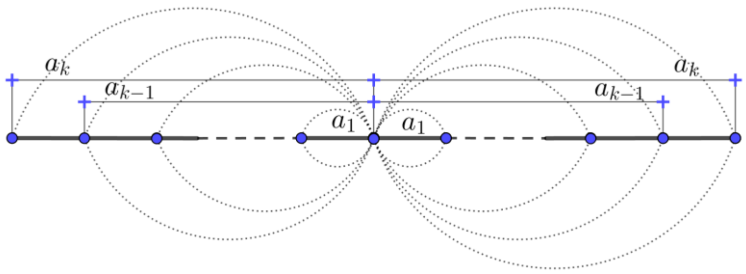


17. att.

2. atrisinājums. Stabu skaitu apzīmējam ar $(2k + 1)$, kur k ir naturāls skaitlis, bet stabu attālumu līdz vidējam stabam – ar $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (skat. 18. att.). Tad Raimonda noieto ceļu varam aprakstīt, izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summu, tas ir, $840 = 4(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + 3a_k$, turklāt no dotā izriet, ka $a_1 = 8$ (m) un $d = 8$ (m). Pēdējo vienādojumu varam pārrakstīt formā

$$840 = 4\frac{a_1 + a_{k-1}}{2}(k-1) + 3a_k$$
$$840 = 2\left(a_1 + \big(a_1 + d(k-2)\big)\right)(k-1) + 3\big(a_1 + d(k-1)\big)$$
$$840 = 2(16 + 8(k-2))(k-1) + 3\big(8 + 8(k-1)\big)$$
$$840 = 2 \cdot 8k(k-1) + 3 \cdot 8k$$
$$105 = 2k(k-1) + 3k$$
$$2k^2 + k - 105 = 0$$

Iegūstam, ka diskriminants $D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 105 = 841$. Līdz ar to $k_1 = \frac{-1+29}{4} = 7$ un $k_2 = \frac{-1-29}{4} = -\frac{30}{4}$ (neder, jo k ir naturāls skaitlis). Tātad stabu skaits ir $2k + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.



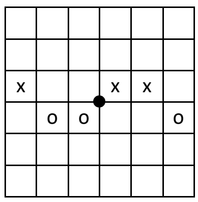
18. att.

Piezīme. Vienādojumu $k \cdot (2k + 1) = 105$ var risināt arī neizmantojot kvadrātvienādojuma atrisināšanas metodes, bet apskatot visas dažādās iespējas, kādu divu naturālu skaitļu reizinājums var būt 105.

8.2. Divi spēlētāji pamīšus izvieto kauliņus tabulas 6×6 rūtiņās. Vienā gājienā var aizpildīt vai nu vienu tukšu rūtiņu, vai vairākas tukšas rūtiņas, kuras atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Otrajam spēlētājam katrā savā gājienā jāizdara pirmā spēlētāja gājienam simetrisks gājiens attiecībā pret kvadrāta centru (skat. 19. att., kur parādīts viens iespējams gājienu "pāris"). Ja pirmais spēlētājs varēs aizpildīt tukšās rūtiņas, tad arī otrais spēlētājs to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.



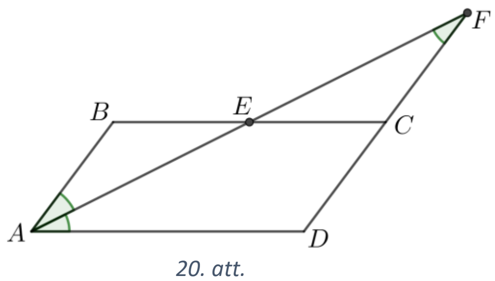
19. att.

8.3. Dots paralelograms $ABCD$. Leņķa BAD bisektrise krusto malu BC iekšējā punktā E un CD pagarinājumu punktā F. Pierādīt, ka $BC = DF$, ja zināms, ka DE ir perpendikulārs AF.

Atrisinājums. Ievērojam, ka

- $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD = \alpha$ pēc bisektrises definīcijas;
- $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AFD = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AB un CD, ko krusto taisne AF.

Tātad trijstūris ADF ir vienādsānu trijstūris (skat. 20. att.), kuram $AD = DF$. Tā kā $AD = BC$ kā paralelograma pretējās malas, tad esam ieguvuši, ka $BC = DF$.



20. att.

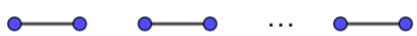
Piezīme. Tas, ka DE ir perpendikulārs AF, risinājumā nav obligāti jāizmanto.

8.4. Mežā dzīvo m rūķīši. Daži no tiem savā starpā draudzējas (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A), pie tam katra rūķīša draugu skaits ir kāda naturāla skaitļa kubs. Kādām m vērtībām tas ir iespējams?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais ir iespējams, ja m ir pāra skaitlis vai nepāra skaitlis, kas nav mazāks kā 9.

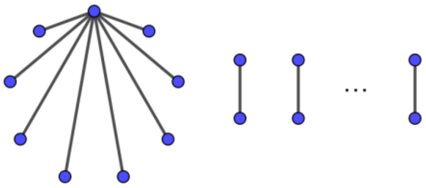
Ievērojam, ka pirmo divu naturālo skaitļu kubi ir $1^3 = 1$ un $2^3 = 8$. Rūķīšus apzīmēsim ar punktiem; ja divi rūķīši draudzējas, tad tos savienosim ar nogriezni.

Ja m ir pāra skaitlis, tad rūķīšus var sadalīt pāros tā, ka katrs rūķītis draudzējas tikai un vienīgi ar rūķīti no sava pāra (skat. 21. att.).



21. att.

Ja m ir nepāra skaitlis un $m \geq 9$, tad rūķīšus var sadalīt tā, kā parādīts 22. att., tas ir, vienam rūķītim ir 8 draugi, bet pārējiem pa vienam draugam.



22. att.

Pamatosim, ka neder tādi nepāra skaitļi m, ka $m \leq 7$.

Visiem rūķīšiem nevar būt pa vienam draugam, jo tad kopā būtu nepāra skaits nogriežņu galu, bet tas nav iespējams, jo katram nogrieznim ir 2 gali. Tātad kādam rūķītim būtu jābūt vismaz 8 draugiem, bet arī tas nav iespējams, jo lielākais nogriežņu galu skaits, kas var iziet no kāda punkta, ir 6 (gadījumā, ja $m = 7$).

8.5. Kādai mazākajai naturālai n vērtībai skaitli 10^n iespējams izteikt kā sešu naturālu skaitļu reizinājumu tā, ka neviens no tiem nav mazāks kā 10 un to visu pēdējie cipari ir dažādi (tas ir, nevienam no tiem pēdējais cipars nesakrīt ar kāda cita skaitļa pēdējo ciparu)?

Atrisinājums. Mazākā šāda n vērtība ir 23. Ja $n = 23$, tad $10^{23} = 10 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 5^{22}$. Pierādīsim, ja $n < 23$, tad 10^n šādā formā izteikt nevar.

Ievērojam, ka $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Tātad katru no sešiem reizinātājiem var izteikt formā $2^x \cdot 5^y$, kur x, y ir nenegatīvi veseli skaitļi. Ievērojam, ka neviena šādā formā izteikta reizinātāja pēdējais cipars nevar būt ne 1, ne 3, ne 7, ne 9 (ja skaitlis beidzas ar 1, 3, 7 vai 9, tad tas nedalās ne ar 2, ne ar 5). Tātad kā reizinātāju pēdējie cipari jāizmanto visi atlikušie seši cipari: 0, 2, 4, 5, 6, 8. Aplūkosim tos 5 reizinātājus, kas beidzas ar 0, 2, 4, 6, 8, apzīmēsim tos ar a_0, a_2, a_4, a_6, un a_8. Ievērojam, ka neviens no tiem, izņemot a_0, nedalās ar 5, tātad tie visi (izņemot a_0) ir divnieka pakāpes.

Tā kā a_0 beidzas ar 0, tad tas dalās ar 2.

Reizinātājs a_2 noteikti dalās ar 32, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 2 un nav mazāka kā 10, ir $2^5 = 32$.

Reizinātājs a_4 noteikti dalās ar 64, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 4 un nav mazāka kā 10, ir $2^6 = 64$.

Reizinātājs a_6 noteikti dalās ar 16, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 6 nav mazāka kā 10, ir $2^4 = 16$.

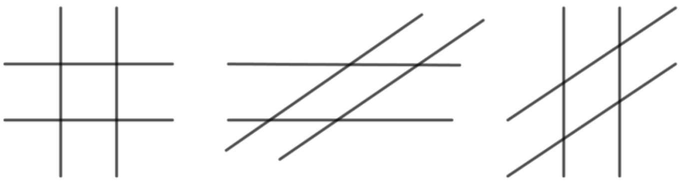
Reizinātājs a_8 noteikti dalās ar 128, jo mazākā divnieka pakāpe, kas beidzas ar 8 un nav mazāka kā 10, ir $2^7 = 128$.

Tātad $a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$ noteikti dalās ar $2 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 128 = 2^{23}$.

Tā kā 10^n dalās ar $a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$, tad arī 10^n dalās ar 2^{23}. Tātad n nevar būt mazāks kā 23.

9.1. Plaknē novilktas 5 vertikālas, 4 horizontālas un 3 savstarpēji paralēlas slīpas taisnes. Cik paralelogramu izveido šīs taisnes?

Atrisinājums. Tā kā paralelograma pretējās malas ir paralēlas, tad iespējami trīs gadījumi, kā var izvēlēties pretējās malas (skat. 23. att.).



23. att.

1. Par pretējām malām varam izvēlēties divas no horizontālajām taisnēm (to var izdarīt $4 \cdot 3 : 2 = 6$ veidos) un divas no vertikālajām taisnēm (to var izdarīt $5 \cdot 4 : 2 = 10$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $6 \cdot 10 = 60$.

2. Par pretējām malām varam izvēlēties divas no horizontālajām taisnēm (to var izdarīt $4 \cdot 3 : 2 = 6$ veidos) un divas no slīpajām taisnēm (to var izdarīt $3 \cdot 2 : 2 = 3$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $6 \cdot 3 = 18$.

3. Par pretējām malām varam izvēlēties divas no slīpajām taisnēm (to var izdarīt $3 \cdot 2 : 2 = 3$ veidos) un divas no vertikālajām taisnēm (to var izdarīt $5 \cdot 4 : 2 = 10$ veidos). Līdz ar to šādu paralelogramu skaits ir $3 \cdot 10 = 30$.

Tātad pavisam ir izveidoti $60 + 18 + 30 = 108$ paralelogrami.

9.2. Divi spēlētāji pamīšus aizkrāso tabulas 9×9 rūtiņas. Spēlētājs, kurš spēli sāk, krāso rūtiņas melnā krāsā, viņa pretinieks – zilā krāsā. Vienā gājienā drīkst aizkrāsot tieši vienu rūtiņu. Kad visas rūtiņas ir aizkrāsotas, tad saskaita, cik ir tādu rindu un kolonnu, kuros melno rūtiņu ir vairāk nekā zilo – tie ir punkti, kurus ieguvis pirmais spēlētājs. Rindu un kolonnu skaits, kuros zilo rūtiņu ir vairāk nekā melno, ir otrā spēlētāja iegūtie punkti. Uzvar tas spēlētājs, kurš ir ieguvis vairāk punktu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jānokrāso melnā krāsā tā rūtiņa, kas atrodas kvadrāta centrā. Lai arī kur otrais spēlētājs nokrāsotu rūtiņu pirmajam spēlētājam jānokrāso rūtiņa simetriski otrā spēlētāja tikko nokrāsotajai rūtiņai attiecībā pret kvadrāta centru. Tā pirmais spēlētājs turpina rīkoties arī visos savos nākamajos gājienos.

Melno rūtiņu noteikti būs vairāk nekā zilo rūtiņu centrālajā rindā un centrālajā kolonnā. Ja ir kāda rinda (vai kolonna), kurā ir vairāk zilo rūtiņu, tad tai centrāli simetriskajā rindā (vai kolonnā) būs vairāk melno rūtiņu. Tātad vairāk punktus iegūs pirmais spēlētājs.

9.3. Dots vienādsānu taisnleņķa trijstūris ABC ar taisno leņķi C. Uz tā hipotenūzas konstruēts taisnstūris $ABNM$ tā, ka punkti C un N atrodas dažādās pusēs no taisnes AB un $AC = AM$. Nogrieznis CM krusto AB punktā P. Punkts L ir malas MN viduspunkts. Nogrieznis CL krusto PN punktā Q. Pierādīt, ka **a)** trijstūris CBP ir vienādsānu; **b)** četrstūris $QNBC$ ir rombs!

Atrisinājums. a) Tā kā $AC = AM$, tad trijstūris MAC ir vienādsānu un $\sphericalangle ACM = \sphericalangle AMC = \alpha$ (skat. 24. att.). No taisnleņķa trijstūra MAP iegūstam, ka $\sphericalangle APM = 90° - \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle CPB = \sphericalangle APM = 90° - \alpha$ kā krustleņķi un $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = 90° - \alpha$. Tā kā $\sphericalangle CPB = \sphericalangle PCB$, tad trijstūris CBP ir vienādsānu.

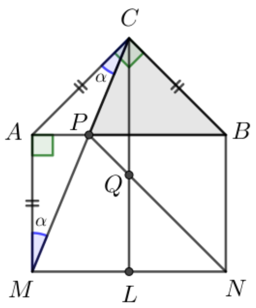
b) Pierādīsim, ka četrstūra $QNBC$ pretējās malas ir pa pāriem paralēlas (skat. 25. att.).

Vienādsānu trijstūrī ACB novelkam augstumu CR, kas ir arī mediāna un bisektrise. Tā kā $CR \perp AB$ un $AR = RB$, tad taisne CR iet arī caur taisnstūra pretējās malas MN viduspunktu L. Līdz ar to arī Q pieder taisnei CR un no tā, ka $CR \perp AB$ un $BN \perp AB$, izriet $CQ||BN$.

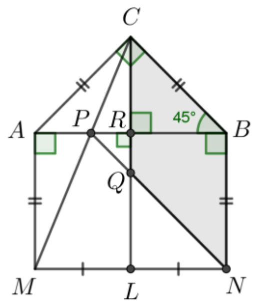
Trijstūris ACB ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $\sphericalangle CBA = 45°$.

No a) gadījumā pierādītā izriet, ka $PB = CB = BN$. Tātad trijstūris PBN ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $\sphericalangle BNP = 45°$. Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle CBN + \sphericalangle BNP = 45° + 90° + 45° = 180°$, tātad $CB||QN$, jo iekšējo vienpusleņķu summa ir $180°$.

Tā kā $QNBC$ ir paralelograms (jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas) un $CB = BN$, tad $QNBC$ ir rombs.



24. att.



25. att.

9.4. Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar 7, iegūtu skaitli, kas ir par 5998 lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar 7 aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par 500290 lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!

Atrisinājums. Apzīmējam doto skaitli ar x, skaitli, ko iegūst visus pāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar A un skaitli, ko iegūst visus nepāra ciparus aizstājot ar septītniekiem, apzīmējam ar B.

Pamatosim, ja diviem skaitļiem samaina vietām to vienas šķiras ciparus, tad šo skaitļu summa nemainās. Pieņemsim, ka vienam skaitlim n-tās šķiras cipars ir a, bet otram b, pieņemsim arī, ka $a > b$. Tad pirmajam skaitlim ciparu a aizstājot ar b, šis skaitlis samazinās par $(a-b) \cdot 10^n$. Otrajam skaitlim ciparu b aizstājot ar a tas palielinās par $(a-b) \cdot 10^n$. Tātad abu skaitļu summa nemainās.

Aplūkojam summu $A + B$. Katrā šķirā (vienos, desmitos, simtos utt.) šiem diviem skaitļiem viens cipars ir "oriģinālais" (kas bija skaitlī x), bet otrs ir septītnieks. Samainīsim katrā šķirā šos ciparus tā, lai septītnieks atrastos otrajā skaitlī, bet "oriģinālais" cipars – pirmajā.

Tad pirmais skaitlis pārvēršas par x, bet otrais – par skaitli, kas sastāv no sešiem septītniekiem. Tā kā šīs darbības rezultātā skaitļu summa nemainās, tad $A+B=x+777777$.

Pēc dotā $A=x+500290$, bet $B=x+5998$. Atrisinot vienādojumu

$$(x+500290)+(x+5998)=x+777777,$$

iegūstam, ka $x=271489$.

Pārbaudām, ka skaitlis 271489 apmierina uzdevuma nosacījumus:

- aizvietojot šī skaitļa nepāra ciparus ar 7, iegūstam $277487=271489+5998$,
- aizvietojot šī skaitļa pāra ciparus ar 7, iegūstam $771779=271489+500290$.

9.5. Vai eksistē tāds kvadrātvienādojums ar veseliem koeficientiem, kuram ir sakne

$$\left(\sqrt{2020}-2\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)\ ?$$

Atrisinājums. Dotās izteiksmes pirmajās iekavās esošo izteiksmi izsakām kā

$$\left(\sqrt{2020}-2\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)=\left(\sqrt{2020}-\sqrt{2019}\right)-\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)$$

Pakāpeniski aprēķinām dotās izteiksmes vērtību, iekavas sareizinot, izmantojot kvadrātu starpības formulu $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ un kopīgā reizinātāja iznešanu pirms iekavām:

$$\left(\sqrt{2020}-2\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt{2020}-\sqrt{2019}\right)-\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2020}-\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)-$$

$$-\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)-\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2020}+\sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2018}-\sqrt{2020}\right)=-2$$

Tātad jāatrod kvadrātvienādojums ar veseliem koeficientiem, kura sakne ir $x=2$. Der, piemēram, kvadrātvienādojums $x^2+3x+2=0$, kura saknes ir $x_1=-2$ un $x_2=-1$.

10.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām ir spēkā vienādība

$$6+24+60+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $1\cdot2\cdot3=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{4}$ jeb $6=6$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n=k$, tas ir,

$$6+24+60+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n=k+1$, tas ir,

$$6+24+60+\cdots+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Pārveidosim vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{6+24+60+\cdots+k(k+1)(k+2)}_{induktīvais\ pieņēmums}+(k+1)(k+2)(k+3)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=(k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4}+1\right)=$$

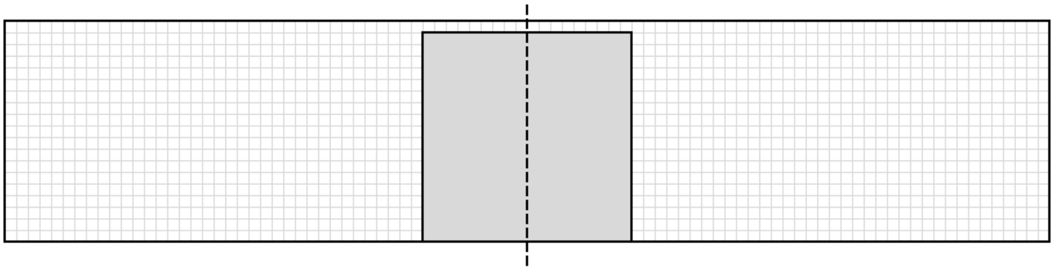
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n=1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n=k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n=k+1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

10.2. Dots taisnstūris 90×19 rūtiņas. Vienā gājienā spēlētājs var aizkrāsot $n \times n$ rūtiņu kvadrātu (piemēram, 1×1, 2×2 utt.), kura visas rūtiņas ir neaizkrāsotas. Zaudē tas, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

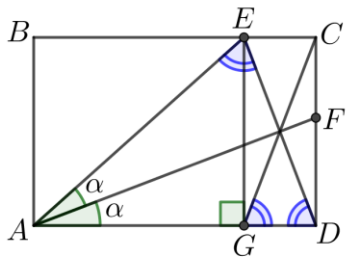
Savā pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jāaizkrāso kvadrātu 18×18, kuru šķērso taisnstūra simetrijas ass (skat. 26. att.). Otrais spēlētājs var aizkrāsot tikai tādu kvadrātu, kas pilnībā atrodas vienā pusē no taisnstūra vertikālās simetrijas ass. Lai kur arī otrais spēlētājs aizkrāsotu kvadrātu, pirmais spēlētājs varēs aizkrāsot tam simetrisku kvadrātu attiecībā pret taisnstūra vertikālo simetrijas asi un izdarīt pēdējo gājienu. Tā kā rūtiņu skaits ir galīgs, tad pirmais spēlētājs uzvarēs.



26. att.

10.3. Dots taisnstūris $ABCD$, kur $AB < BC$. Uz malas BC izvēlēts tāds punkts E, ka $AE = AD$. Leņķa DAE bisektrise krusto malu CD punktā F. Trijstūrī ADE novilkts augstums EG. Pierādīt, ka $\sphericalangle AGC = \sphericalangle AFC$.

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FAD = \alpha$ (skat. 27. att.). Tad $\sphericalangle AFC = \sphericalangle FAD + \sphericalangle ADF = \alpha + 90°$ kā trijstūra ADF ārējais leņķis. Trijstūris EAD ir vienādsānu trijstūris, tāpēc $\sphericalangle ADE = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$. Tā kā $ECDG$ ir taisnstūris, tad $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CGD = 90° - \alpha$. Līdz ar to $\sphericalangle AGC = 180° - \sphericalangle CGD = {}$ $= 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$. Tātad $\sphericalangle AGC = \sphericalangle AFC = 90° + \alpha$.



27. att.

10.4. Kādām naturālām n vērtībām izteiksme $n^2 + n + 19$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

Atrisinājums. Atradīsim, kādām n vērtībām izteiksmes $n^2 + n + 19$ vērtība atrodas starp divu blakusesošu naturālu skaitļu kvadrātiem, tas ir, starp n^2 un $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Ievērojam, ka $n^2 < n^2 + n + 19$ ir patiesa visiem naturāliem n un nevienādība $n^2 + n + 19 < n^2 + 2n + 1$ ir patiesa, ja $n > 18$. Tātad, ja $n > 18$, tad izteiksmes $n^2 + n + 19$ vērtība atrodas starp divu blakusesošu naturālu skaitļu kvadrātiem un tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Līdzīgi iegūstam, ja $5 < n < 18$, tad $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + n + 19 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Tātad izteiksmes vērtība atrodas starp divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu kvadrātiem, līdz ar to nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Apskatām atlikušās n vērtības, tas ir, vērtības 1, 2, 3, 4, 5, 18.

n	$n^2 + n + 19$
1	21
2	$25 = 5^2$
3	31
4	39
5	$49 = 7^2$
18	$361 = 19^2$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka izteiksme $n^2 + n + 19$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, ja n ir 2; 5 vai 18.

Piezīme. Otrā novērtējuma vietā var arī pārbaudīt n vērtības 1, 2, 3, …, 18.

10.5. No visiem karalienes dimantiem vissmagākais sver tieši 6 reizes mazāk nekā visi pārējie kopā, trešais smagākais sver tieši 9 reizes mazāk nekā visi pārējie kopā, bet visvieglākais sver tieši 11 reizes mazāk nekā visi pārējie dimanti kopā. Cik dimantu ir karalienei?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka karalienei ir n dimanti, sakārtosim tos neaugošā secībā pēc to masas un apzīmēsim to masas attiecīgi ar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet to kopējo masu ar S. Tad no šiem apzīmējumiem izriet, ka

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$,
- $a_1 = \frac{S-a_1}{6}$ jeb $a_1 = \frac{S}{7}$,
- $a_3 = \frac{S-a_3}{9}$ jeb $a_3 = \frac{S}{10}$,
- $a_n = \frac{S-a_n}{11}$ jeb $a_n = \frac{S}{12}$.

Novērtēsim kopējo dimantu masu S no augšas un no apakšas.

Izmantojot to, ka $a_2 \leq a_1 = \frac{S}{7}$ un $a_{n-1} \leq a_{n-2} \leq \ldots \leq a_3 = \frac{S}{10}$, iegūstam

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + (a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \\ &\leq a_1 + a_1 + (a_3 + a_3 + \cdots + a_3) + a_n = \\ &= 2 \cdot \frac{S}{7} + (n-3) \cdot \frac{S}{10} + \frac{S}{12} \end{aligned}$$

Izmantojot to, ka $a_2 \geq a_3 = \frac{S}{10}$ un $a_4 \geq a_5 \geq \ldots \geq a_n = \frac{S}{12}$ iegūstam, ka

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + (a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \geq \\ &\geq a_1 + a_3 + a_3 + (a_n + a_n + \cdots + a_n) = \\ &= \frac{S}{7} + 2 \cdot \frac{S}{10} + (n-3) \cdot \frac{S}{12} \end{aligned}$$

Dalot pirmo nevienādību ar S, iegūstam, ka

$$\frac{2}{7} + \frac{n-3}{10} + \frac{1}{12} \geq 1$$

$$n - 3 \geq 10\left(1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{12}\right) = 10 - \frac{20}{7} - \frac{5}{6} = 6\frac{13}{42}$$

Dalot otro nevienādību ar S, iegūstam, ka

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{10} + \frac{n-3}{12} \leq 1$$

$$n - 3 \leq 12\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) = 12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{5} = 7\frac{31}{35}$$

Apvienojot šīs nevienādības, iegūstam, ka

$$6\frac{13}{42} \leq n - 3 \leq 7\frac{31}{35}$$

Tā kā $(n-3)$ jābūt naturālam skaitlim, tad vienīgā iespējamā $(n-3)$ vērtība ir 7, tātad $n = 10$.

Tātad karalienei ir 10 dimanti.

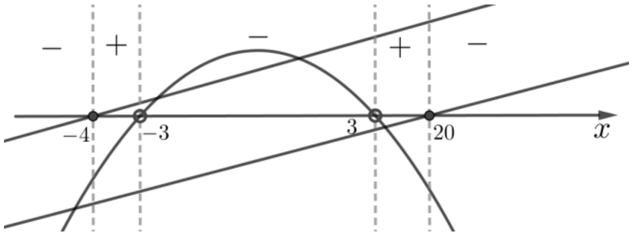
11.1. Atrisināt nevienādību

$$\frac{(x-20)^{19} \cdot (x+4)}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)(9-x^2)} \geq 0$$

Atrisinājums. Ievērojam, ka reizinātājs $\sqrt{x^2+4}$ ir pozitīvs visām reālām x vērtībām, tātad tas neietekmē kreisās puses izteiksmes zīmi. Izteiksmei $(x-20)^{19}$ ir tāda pati zīme kā izteiksmei $(x-20)$. Katru polinomu, kas ietilpst nevienādības kreisās puses izteiksmē, pielīdzinām 0 un atrisinām iegūtos vienādojumus:

- $(x-20)^{19} = 0$ jeb $x = 20$;
- $x + 4 = 0$ jeb $x = -4$;
- $9 - x^2 = 0$ jeb $x = \pm 3$.

Iegūtās vērtības atliekam uz skaitļu ass, uzskicējam atbilstošo funkciju grafikus (skat. 28. att.) un nosakām dotās izteiksmes zīmi katrā intervālā. Tātad dotās nevienādības atrisinājums ir $x \in [-4; -3) \cup (3; 20]$.



28. att.

11.2. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles skaitļa 216 naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs.

Ievērojam, ka $216 = 2^3 \cdot 3^3$ un uzrakstām visus skaitļa 216 dalītājus augošā secībā:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216.$$

Otrais spēlētājs visus dalītājus sadala pāros tā, ka katra pāra skaitļu reizinājums ir 216:

1 un 216	3 un 72	6 un 36	9 un 24
2 un 108	4 un 54	8 un 27	12 un 18

Ja pirmais spēlētājs uzraksta kādu dalītāju d, tad otrais spēlētājs uzraksta dalītāju $\frac{216}{d}$ (otru attiecīgā pāra skaitli). Ievērojam, ka katra pāra skaitļu attiecība nav ne 2, ne 3. Pamatosim, ka otrais spēlētājs var uzrakstīt skaitli $\frac{216}{d}$, kas atbilst nosacījumiem. Pirmkārt, tā kā pirmais spēlētājs varēja uzrakstīt d, tad ne $2d$, ne $3d$, ne $\frac{d}{2}$, ne $\frac{d}{3}$ (ja tie ir naturāli) līdz viņa gājienam nebija uzrakstīti. Tāpēc arī atbilstošie otri skaitļi katrā no šiem pāriem $\frac{216}{2d} = \frac{\frac{216}{d}}{2}$, $\frac{216}{3d} = \frac{\frac{216}{d}}{3}$, $\frac{216}{\frac{d}{2}} = 2 \cdot \frac{216}{d}$ un $\frac{216}{\frac{d}{3}} = 3 \cdot \frac{216}{d}$ līdz šim nebija uzrakstīti.

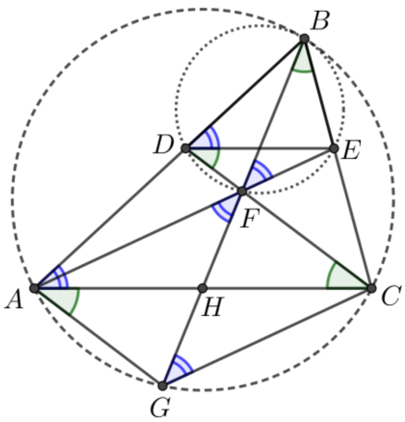
Tātad otrais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, ja vien to varēs izdarīt pirmais spēlētājs. Tā kā skaitlim 216 ir galīgs skaits dalītāju, tad gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.

11.3. Uz trijstūra ABC malām AB un BC izvēlēti attiecīgi tādi punkti D un E, ka $AC \parallel DE$. Nogriežņi AE un CD krustojas punktā F. Punkti B, D, E un F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Taisne BF krusto malu AC punktā H un trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju punktā G. Pierādīt, ka $FH = GH$.

Atrisinājums. Tā kā četrstūri $BAGC$ un $BDFE$ ir ievilkti, tad $\sphericalangle GAC = \sphericalangle GBC$ un $\sphericalangle GBC = \sphericalangle FBE = \sphericalangle FDE$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka attiecīgi GC un FE (skat. 29. att.). Pēc dotā $AC \parallel DE$, tad $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FCA$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Līdz ar to $\sphericalangle GAC = \sphericalangle FCA$, no kā izriet, ka $AG \parallel FC$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Arī $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BGC$ un $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BFE$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka attiecīgi BC un BE. Pēc dotā $AC \parallel DE$, tad $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Ievērojot, ka $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BFE$ kā krustleņķi, iegūstam $\sphericalangle GAC = \sphericalangle FCA$. Tātad $CG \parallel FA$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Tāpēc četrstūris $AFCG$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc $FH = GH$.



29. att.

11.4. Zināms, ka vairāku naturālu skaitļu summa ir **a)** 2019, **b)** 2020. Kāds ir lielākais iespējamais šo skaitļu reizinājums?

Atrisinājums. Skaitļu summu apzīmēsim ar N. Pieņemsim, ka esam atraduši lielāko iespējamo reizinājumu $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, kuram $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = N$. Aplūkosim, kādi skaitļi nevar ietilpt šajā reizinājumā.

- Reizinājumā nevar būt skaitlis 1, jo, pieskaitot to jebkuram citam reizinātājam, iegūsim lielāku reizinājumu pie tādas pašas summas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $a_1 = 1$, tad $1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k < (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot a_k$, iegūta pretruna, jo $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ ir lielākais iespējamais reizinājums.
- Reizinājumā nevar būt skaitļi, kas lielāki nekā 3. Ja ir kāds reizinātājs $a_i \geq 4$, tad, aizvietojot to ar reizinātājiem 2 un $(a_i - 2)$, summa nemainās, bet reizinājums vismaz nesamazinās, jo $2(a_i - 2) = a_i + (a_i - 4) \geq a_i$.
- Reizinājumā ir ne vairāk kā divi reizinātāji 2. Ja būtu vairāk nekā trīs reizinātāji 2, tad, $2 \cdot 2 \cdot 2$ aizvietojot ar $3 \cdot 3$ reizinājums palielinās, bet summa nemainās.

Tātad, ja reizinājums ir maksimālais, tad tajā visi reizinātāji ir trijnieki, izņemot varbūt 1 vai 2 divnieki.

Var ievērot, ka katru skaitli N šādā formā (kā summu no trijniekiem un varbūt viena vai diviem divniekiem) var izteikt vienā vienīgā veidā.

1. Ja $N = 3n$, tad to var izteikt kā n trijnieku summu.
2. Ja $N = 3n + 1$, tad to var izteikt kā $(n - 1)$ trijnieka un divu divnieku summu.
3. Ja $N = 3n + 2$, tad to var izteikt, kā n trijnieku un divnieka summu.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

a) ja skaitļu summa ir $2019 = 3 \cdot 673$, tad šo skaitļu lielākais iespējamais reizinājums ir 3^{673},

b) ja skaitļu summa ir $2020 = 3 \cdot 673 + 1$, tad šo skaitļu lielākais iespējamais reizinājums ir $4 \cdot 3^{672}$.

11.5. Dots reāls skaitlis x un naturāls skaitlis n. Zināms, ka gan $x^2 - nx$, gan $x^3 - nx$ ir racionāli skaitļi. Pierādīt, ka arī x ir racionāls skaitlis!

Atrisinājums. Apzīmējam $x^2 - nx = a$, tad

- $x^2 = a + nx$,
- $x^3 = x \cdot x^2 = x(a + nx) = ax + nx^2 = ax + n(a + nx) = ax + n^2x + an$,
- $x^3 - nx = ax + n^2x + an - nx = (a + n^2 - n)x + an$.

Ja $a + n^2 - n \neq 0$, tad $x = \frac{(x^3 - nx) - an}{a + n^2 - n}$ arī ir racionāls skaitlis.

Aplūkojam situāciju, kad $a + n^2 - n = 0$, un pierādīsim, ka arī šajā gadījumā x nevar būt iracionāls.

Ja $a + n^2 - n = 0$, tad ievietojot a vietā $x^2 - nx$ iegūstam

$$x^2 - nx + n^2 - n = 0. \qquad (1)$$

Ja $n \geq 2$, tad vienādojumam (1) nav atrisinājuma, jo $x^2 - nx + n^2 - n = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + n\left(\frac{3n}{4} - 1\right) > 0$, ja $n > \frac{4}{3}$.

Atliek aplūkot gadījumu, kad $n = 1$, tad vienādojums (1) ir formā $x^2 - x = 0$ un tam ir divi atrisinājumi $x = 0$ un $x = 1$, kas abi ir racionāli skaitļi.

Piezīme. To, ka vienādojumam (1) nav atrisinājuma, var pamatot, aprēķinot diskriminantu, attiecībā pret mainīgo x.

12.1. Atrisināt vienādojumu

$$\cos 3x \cos 2x + \sin 2x \sin 3x = \left(\cos\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\right)\left(\sin\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}\right)$$

Atrisinājums. Izmantojot formulu $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ un trigonometrijas formulas, pārveidojam doto vienādojumu :

$$\cos(3x - 2x) = \cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{10}$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{5}$$

Tātad dotā vienādojum atrisinājums ir $x = \pm\frac{\pi}{5} + 2\pi n$, kur $n \in \mathbb{Z}$.

12.2. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles skaitļa 144 naturālos dalītājus. Katrā gājienā jāievēro šādi noteikumi:

- nedrīkst atkārtoti rakstīt jau uzrakstītu dalītāju;
- nedrīkst rakstīt dalītāju, kurš ir tieši 2 vai 3 reizes lielāks vai mazāks nekā kāds jau uzrakstītais dalītājs.

Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs.

Ievērojam, ka $144 = 2^4 \cdot 3^2$ un uzrakstām visus skaitļa 144 dalītājus augošā secībā:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.$$

Pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā uz tāfeles uzraksta dalītāju 12 (kas ir vidējais loceklis dalītāju rindā), pēc tam pirmais spēlētājs visus atlikušos dalītājus sadala pāros tā, ka katra pāra skaitļu reizinājums ir 144:

1 un 144	3 un 48	6 un 24	9 un 16
2 un 72	4 un 36	8 un 18	

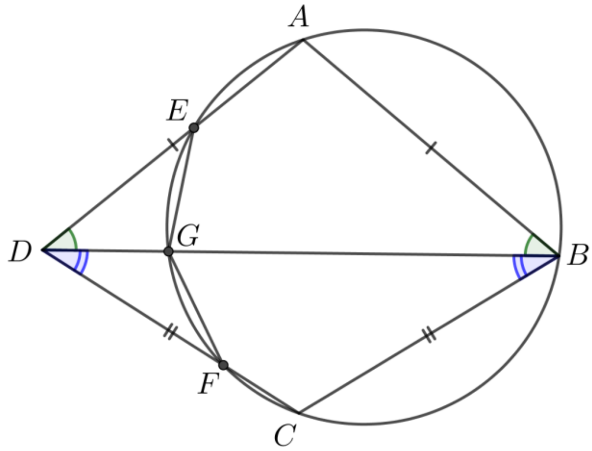
Ja otrais spēlētājs uzraksta kādu dalītāju d, tad pirmais spēlētājs uzraksta dalītāju $\frac{144}{d}$ (otru attiecīgā pāra skaitli). Ievērojam, ka katra pāra skaitļu attiecība nav ne 2, ne 3. Pamatosim, ka pirmais spēlētājs var uzrakstīt skaitli $\frac{144}{d}$, kas atbilst nosacījumiem. Pirmkārt, tā kā otrais spēlētājs varēja uzrakstīt d, tad ne $2d$, ne $3d$, ne $\frac{d}{2}$, ne $\frac{d}{3}$ (ja tie ir naturāli) līdz viņa gājienam nebija uzrakstīti. Tāpēc arī atbilstošie otri skaitļi katrā no šiem pāriem $\frac{144}{2d} = \frac{\frac{144}{d}}{2}$, $\frac{144}{3d} = \frac{\frac{144}{d}}{3}$, $\frac{144}{\frac{d}{2}} = 2 \cdot \frac{144}{d}$ un $\frac{144}{\frac{d}{3}} = 3 \cdot \frac{144}{d}$ līdz šim nebija uzrakstīti.

Tātad pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, ja vien to varēs izdarīt otrais spēlētājs. Tā kā skaitlim 144 ir galīgs skaits dalītāju, tad gājieni pietrūks otrajam spēlētājam un viņš zaudēs.

12.3. Dots četrstūris $ABCD$, kuram $AB = AD$ un $BC = CD$. Riņķa līnija, kas iet caur punktiem A, B un C, krusto nogriežņus AD un CD attiecīgi to iekšējos punktos E un F un nogriezni BD punktā G. Pierādīt, ka $EG = FG$.

Atrisinājums. Tā kā $AB = AD$ un $BC = CD$, tad trijstūri DAB un DCB ir vienādsānu trijstūri un $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = \alpha$ un $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC = \beta$ kā leņķi pie pamata (skat. 30. att.). Punkti G, E, A, B atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\sphericalangle ABG + \sphericalangle GEA = 180°$ jeb $\sphericalangle GEA = 180° - \alpha$. No blakusleņķu īpašības iegūstam, ka $\sphericalangle DEG = 180° - \sphericalangle GEA = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Tātad trijstūris DGE ir vienādsānu un $DG = EG$ kā malas pret vienādiem leņķiem.

Punkti G, F, C, B atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\sphericalangle CBG + \sphericalangle GFC = 180°$ jeb $\sphericalangle GFC = 180° - \beta$. No blakusleņķu īpašības iegūstam, ka $\sphericalangle DFG = 180° - \sphericalangle GFC = \beta$. Tātad trijstūris DGF ir vienādsānu un $DG = FG$ kā malas pret vienādiem leņķiem. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $EG = DG = FG$.



30. att.

12.4. Sporta nometnē ir 100 skolēni. Ar N apzīmējam, cik veidos šos 100 skolēnus var sadalīt 50 pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās N?

Atrisinājums. Iedomāsimies, ka visiem skolēniem ir atšķirīgs vecums (vai garums milimetros vai jebkāds cits sakārtojums). Ņemam visjaunāko skolēnu un piekārtojam viņam kādu citu skolēnu (tas ir, izveidojam pāri), to var izdarīt 99 veidos. Pēc tam ņemam visjaunāko no atlikušajiem skolēniem un atrodam tam pāri, to var izdarīt 97 veidos. Pašās beigās paliks divi skolēni – viens no viņiem būs visjaunākais un viņam būs tikai viens iespējamais pāris. No reizināšanas likuma izriet, ka pārus var izveidot $N = 99 \cdot 97 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 1$ veidos.

Uzrakstām visus reizinātājus, kas dalās ar 3: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99.

Ir 1 reizinātājs, kas dalās ar $3^4 = 81$, tas ir 81.
Ir 1 reizinātājs, kas dalās ar $3^3 = 27$, bet nedalās ar 3^4, tas ir 27.
Ir 4 reizinātāji, kas dalās ar $3^2 = 9$, bet nedalās ar 3^3, tie ir 9, 45, 63, 99.
Ir 11 reizinātāji, kas dalās ar $3^1 = 3$, bet nedalās ar 3^2, tie ir 3, 15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 75, 87, 93.
Tātad to reizinājums dalās ar $3^{4+3+4\cdot 2+11\cdot 1} = 3^{26}$.
Tātad lielākā trijnieka pakāpe, ar kuru dalās N, ir 26.

12.5. Miljonāru kluba visbagātākajam biedram ir tieši 8 reizes mazāk naudas nekā visiem pārējiem biedriem kopā, ceturtajam bagātākajam biedram ir tieši 11 reizes mazāk naudas nekā visiem pārējiem biedriem kopā, bet visnabagākajam biedram ir tieši 13 reizes mazāk naudas nekā visiem pārējiem biedriem kopā. Cik biedru ir šajā klubā?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka klubā ir n biedri, sakārtosim tos neaugošā secībā pēc to bagātības un apzīmēsim to naudas daudzumus attiecīgi ar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet to kopējo naudas daudzumu ar S. Tad no šiem apzīmējumiem izriet, ka

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$,
- $a_1 = \frac{S-a_1}{8}$ jeb $a_1 = \frac{S}{9}$,
- $a_4 = \frac{S-a_4}{11}$ jeb $a_4 = \frac{S}{12}$,
- $a_n = \frac{S-a_n}{13}$ jeb $a_n = \frac{S}{14}$.

Novērtēsim kopējo naudas daudzumu S no augšas un no apakšas.

Izmantojot to, ka $a_3 \leq a_2 \leq a_1 = \frac{S}{9}$ un $a_{n-1} \leq a_{n-2} \leq \ldots \leq a_4 = \frac{S}{12}$, iegūstam

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{n-1} + a_n \leq \\ &\leq a_1 + a_1 + a_1 + a_4 + a_4 + a_4 + \cdots + a_4 + a_n = \\ &= 3 \cdot \frac{S}{9} + (n-4) \cdot \frac{S}{12} + \frac{S}{14} \end{aligned}$$

Izmantojot to, ka $a_2 \geq a_3 \geq a_4 = \frac{S}{12}$ un $a_5 \geq a_6 \geq \ldots \geq a_n = \frac{S}{14}$ iegūstam, ka

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{n-1} + a_n \geq \\ &\geq a_1 + a_4 + a_4 + a_4 + a_n + a_n + \cdots + a_n + a_n = \\ &= \frac{S}{9} + 3 \cdot \frac{S}{12} + (n-4) \cdot \frac{S}{14} \end{aligned}$$

Dalot pirmo nevienādību ar S, iegūstam, ka

$$\frac{3}{9} + \frac{n-4}{12} + \frac{1}{14} \geq 1$$

$$n - 4 \geq 12\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{14}\right) = 12 - 4 - \frac{12}{14} = 7 + \frac{1}{7}$$

Dalot otro nevienādību ar S, iegūstam, ka

$$\frac{1}{9} + \frac{3}{12} + \frac{n-4}{14} \leq 1$$

$$n - 4 \leq 14\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{3}{12}\right) = 14 - \frac{14}{9} - \frac{7}{2} = 9 - \frac{1}{18}$$

Apvienojot šīs nevienādības, iegūstam, ka

$$7 + \frac{1}{7} \leq n - 4 \leq 9 - \frac{1}{18}$$

Tā kā $(n-4)$ jābūt naturālam skaitlim, tad vienīgā iespējamā $(n-4)$ vērtība ir 8, tātad $n = 12$.
Tātad klubā ir 12 biedri.