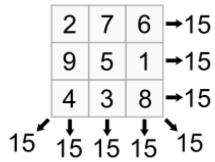
Maģiskās konfigurācijas

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2016./2017. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Atklātajā matemātikas olimpiādē viens uzdevums 5.-8. klasei būs par tēmu "Maģiskās konfigurācijas".

Kvadrātu, kuram katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati (skat., piemēram, 1. att.) sauc par maģisko kvadrātu. Arī citas figūras, kurām uz noteiktām taisnēm uzrakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati, mēdz dēvēt par maģiskām. Visas šādas figūras kopā sauc par maģiskām konfigurācijām.



1. att.

5.-6. klase

Atceries! Cipari ir simboli, kurus izmantojam skaitļu pierakstīšanai. Ir desmit cipari: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Līdzīgi kā no burtiem mēs veidojam vārdus, tā no cipariem mēs veidojam skaitļus. Piemēram, divciparu skaitlis 14, viencipara skaitlis 7.

Atceries! Naturāli skaitļi ir skaitļi, kas rodas skaitīšanas rezultātā: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; … Iegaumē, ka mazākais naturālais skaitlis ir 1, skaitlis 0 nav naturāls skaitlis.

Piemēri

1. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?
   Atrisinājums. Saskaitot visās kolonās ierakstīto skaitļu summas, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Arī saskaitot visās rindās ierakstīto skaitļu summas, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Tāpēc trešajā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir $(32+34+35)-(42+27)=32$.
2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs tieši vienu reizi.
   a) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?
   b) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis?
   Atrisinājums. a) Jā, skat., piemēram, 2. att.

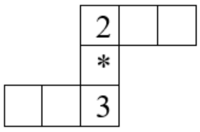
5	7	9
3	4	6
1	2	8

2. att.

b) Nē, to nevar izdarīt. Lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, visu trīs rindiņu summai jābūt pāra skaitlim, bet $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ ir nepāra skaitlis, tāpēc prasītais nav iespējams.

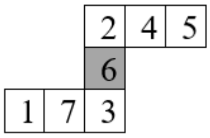
Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?", „Vai iespējams…?" un atbilde ir
- „JĀ", tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ", tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

3. Katrā rūtiņā (skat. 3. att.) jāieraksta tieši viens naturāls skaitlis no 1 līdz 7 tā, lai abās rindās un kolonnā ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Visiem rūtiņās ierakstītiem skaitļiem jābūt dažādiem. Kāds skaitlis var būt ierakstīts * vietā?



3. att.

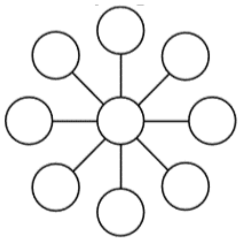
Atrisinājums. Aprēķināsim kopējo summu abām rindām un kolonnai. Ievērojam, ka skaitļi 2 un 3 tiek pieskaitīti divas reizes, jo atrodas gan rindā, gan kolonnā, tātad $1+2+3+4+5+6+7+2+3=33$. Tā kā pavisam ir trīs vienādas summas, tad katra no šīm summām ir $33 : 3 = 11$. Līdz ar to vienīgā iespēja, ka * vietā ir ierakstīts skaitlis $11-2-3=6$ (skat. 4. att.)



4. att.

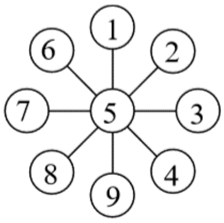
Iegaumē! Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
- jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
- jāpamato, ka citu vērtību nav.

4. Vai aplīšos (skat. 5. att.) var ierakstīt visus ciparus no 1 līdz 9 (katru ciparu tieši vienu reizi) tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto ciparu summa būtu 15? Kāds cipars ir jāieraksta vidējā aplītī?



5. att.

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, 6. att. Pavisam ir četras taisnes, uz kurām atrodas trīs aplīši. Uz visām šīm taisnēm ierakstīto skaitļu summa ir $15 \cdot 4 = 60$. Šajā summā četras reizes tiek ieskaitīts skaitlis x, kas ierakstīts vidējā aplītī, un vienreiz ieskaitīti pārējie astoņi skaitļi. Tāpēc $1+2+3+4+5+6+7+8+9+3x=60$ jeb $3x=15$, no kā iegūstam, ka $x=5$. Tātad vidējā aplītī jāieraksta cipars 5.



6. att.

5. Dotās 3×3 rūtiņu tabulas katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto trīs skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi trīs rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 7. att.). Aizpildi pārējās tabulas rūtiņas!

	15	
	11	
		18

7. att.

Atrisinājums. Papildinām doto kvadrātu, tukšajās rūtiņās ierakstītos skaitļus apzīmējot ar a, b, c, d, e un f (skat. 8. att.).

a	15	b
c	11	d
e	f	18

8. att.

No tā, ka katrā rindā un kolonnā ierakstīto skaitļu summām ir jābūt vienādām, iegūstam, ka $15 + 11 + f = e + f + 18$, tātad $e = 15 + 11 - 18 = 8$. Līdzīgi no pirmās rindas un vienas diagonāles iegūstam, ka $a + 15 + b = 8 + 11 + b$, tātad $a = 8 + 11 - 15 = 4$. Tā kā tagad ir zināmi visi trīs diagonālē ierakstītie skaitļi, tātad katrā rindiņā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir $4 + 11 + 18 = 33$. No tā aprēķinām $b = 33 - 4 - 15 = 14$; $c = 33 - 4 - 8 = 21$; $d = 33 - 11 - 21 = 1$; $f = 33 - 8 - 18 = 7$. Aizpildītu tabulu skat. 9. att.

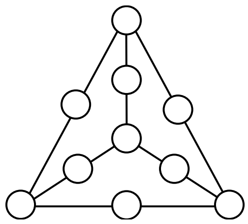
4	15	14
21	11	1
8	7	18

9. att.

7.-8. klase

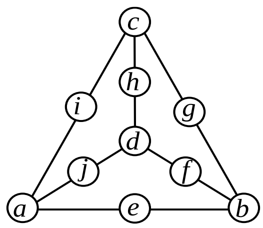
Piemēri

7. Vai katrā aplītī (skat. 10. att.) var ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 10 (katru tieši vienu reizi) tā, lai visas summas katriem trijiem skaitļiem, kas ierakstīti uz vienas taisnes esošos aplīšos, būtu savā starpā vienādas?



10. att.

Atrisinājums. Uz katras taisnes esošo trīs skaitļu summu apzīmēsim ar S, un aplīšos ierakstītos skaitļus apzīmēsim tā, kā parādīts 11. att.



11. att.

Ievērojam, ka skaitļi a, b, c, d sastopami pavisam uz trīs taisnēm, bet visi pārējie skaitļi – katrs tieši uz vienas taisnes. Tāpēc, saskaitot uz visām sešām taisnēm uzrakstīto skaitļu summas, iegūstam

$$3a + 3b + 3c + 3d + e + f + g + h + i + j = 6S.$$

Tā kā visu desmit skaitļu no 1 līdz 10 summa ir 55, tad iegūstam

$$2a + 2b + 2c + 2d + a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 6S;$$
$$2a + 2b + 2c + 2d + 55 = 6S;$$
$$2(a + b + c + d) + 55 = 6S.$$

Ievērojam, ka skaitlis 55 ir nepāra skaitlis, bet $2(a + b + c + d)$ un $6S$ – pāra skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

8. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis 24 (skat. 12. att.). Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis **a)** 7, **b)** 17 ?

	24	
?		

12. att.

Atrisinājums. Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar x, bet apakšējā – ar y. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24 + x + y$.

a) Pārbaudīsim, vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis 7. Pakāpeniski aizpildām pārējās tabulas rūtiņas (skat. 13. att.).

	24	
	x	
7	y	

→

	24	$17 + y$
	x	
7	y	

→

	24	$17 + y$
	x	
7	y	$17 + x$

→

	24	$17 + y$
	x	-10
7	y	$17 + x$

13. att.

Esam ieguvuši pretrunu, ka vidējās rindas labajā rūtiņā jābūt negatīvam skaitlim. Tātad rūtiņā, kas bija apzīmēta ar jautājuma zīmi, nevar būt ierakstīts skaitlis 7.

b) Pārbaudīsim, vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis 17. Pakāpeniski aizpildām pārējās tabulas rūtiņas (skat. 14. att.).

	24	
	x	
17	y	

→

	24	$7 + y$
	x	
17	y	

→

	24	$7 + y$
	x	
17	y	$7 + x$

→

	24	$7 + y$
	x	10
17	y	$7 + x$

→

	24	$7 + y$
$14 + y$	x	10
17	y	$7 + x$

→

$x - 7$	24	$7 + y$
$14 + y$	x	10
17	y	$7 + x$

14. att.

Vienas diagonāles skaitļu summa ir $3x$. Tātad $y = 2x - 24$. Ievietojot $x = 13$, iegūsim vienu derīgu tabulas aizpildījumu:

6	24	9
16	13	10
17	2	20

15. att.