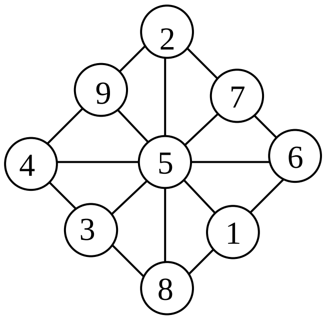
5.1. Atbilde: 22 reizes.
Laika posmos no plkst. 1:00 – 11:00 un no plkst. 13:00 – 23:00 pulksteņa rādītāji katrā stundā sakrīt tieši vienu reizi (minūšu rādītājs stundas laikā veic 1 pilnu apgriezienu, kura laikā vienreiz „apdzen” stundu rādītāju, tātad tieši vienu reizi ar to sakrīt). Savukārt laika posmos no plkst. 11:00 – 13:00 un no plkst. 23:00 – 1:00 pulksteņa rādītāji sakrīt tikai vienu reizi katrā: plkst. 12:00 un plkst. 0:00. Tātad diennakts laikā pulksteņa rādītāji sakrīt 10+10+1+1=22 reizes.

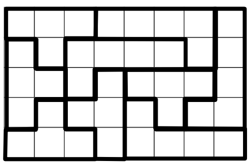
5.2. Atbilde: no 17. stāva. Ievērosim, ka šajā mājā ar doto liftu ne no viena stāva nav iespējams nokļūt uz 17. stāvu (zemākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz augšu, ir 1+17=18. stāvs, bet augstākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz leju ir 24-8=16. stāvs). No 17. stāva uz citiem stāviem var nokļūt, piem., šādā veidā:
17. → 9. → 1. → 18. → 10. → 2. →19. → 11. → 3. → 20. →12. → 4. → 21. → 13. →
→ 5. → 22. → 14. →6. → 23. → 15. → 7. → 24. →16. → 8.

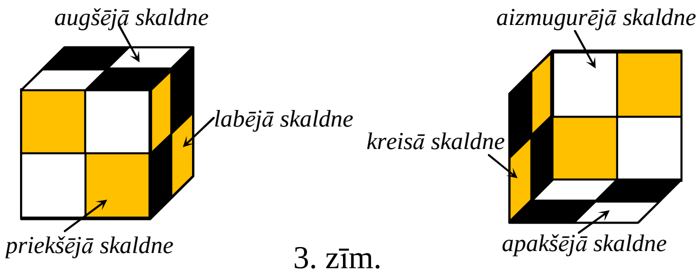
5.3. Skat., piem., 1. zīm.
Ievērosim, ka ciparu summām jābūt vienādām uz astoņām taisnēm, pie tam vidējais aplītis atrodas uz 4 no tām. Pārējie astoņi cipari sadalās pa pāriem, kas kopā ar vidējā aplītī ierakstīto ciparu veido vienādas summas, tātad tos astoņus ciparus, kas nav ierakstīti vidējā aplītī, ir jāsadala pāros ar vienādām summām. To var izdarīt, ja tiek izmantoti cipari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (skat. 1. zīm.) vai arī cipari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



1. zīm.

5.4. Skat., piem., 2. zīm.


2. zīm.



3. zīm.

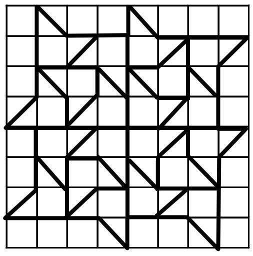
5.5. Atbilde: a) nevar; **b)** var, skat., piem., 3. zīm.
a) Pie kuba virsotnes „satiekas” trīs mazie kvadrātiņi, katram no tiem ir kopīga mala ar abiem pārējiem. Tāpēc šos kvadrātiņus nevar izkrāsot divās krāsās atbilstoši uzdevuma prasībām.

6.1. Pēc katras darbības visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa palielinās par 2 (divu nodzēsto skaitļu vietā tiek rakstīta to summa, kurai pieskaitīts skaitlis 2, bet pārējie skaitļi netiek mainīti, tātad arī to summa nemainās). Tad beigās uz tāfeles uzrakstītais vienīgais skaitlis ir vienāds ar $S+2\cdot n$, kur S ir visu sākumā uzrakstīto skaitļu summa, bet n ir izpildīto darbību skaits. Tā kā sākumā uz tāfeles bija 10 skaitļi, bet pēc vienas darbības izpildes skaitļu skaits samazinās par viens, tad Alfons pavisam izpildīja 9 darbības (t.i. $n = 9$). Beigās palikušais skaitlis ir

$$S+2\cdot n=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+2\cdot 9=\frac{(1+10)\cdot 10}{2}+18=55+18=73.$$

6.2. a) Ja skaitlis dalās ar 3, tad tā ciparu summa dalās ar 3. Ja šī skaitļa un tam blakusesošā skaitļa ciparu summas atšķiras par 3, tad arī blakusesošā skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tāpēc pats skaitlis dalās ar 3. Taču no diviem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem ne vairāk kā viens dalās ar 3. Tātad divu blakusesošu skaitļu ciparu summas nevar atšķirties tieši par 3.
b) Jā, tā var būt; der, piemēram, skaitļi 30 un 31.

6.3. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.

6.4. Atbilde: nē, nevar.

Lai abu grupu skaitļu reizinājumi būtu vienādi, abās grupās kā skaitļu pirmreizinātājiem jābūt pārstāvētiem vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem vienādā skaitā. Taču visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 100 un mazāki nekā 200 pavisam tiek pārstāvēti tikai vienu reizi katrs, tātad tos nevar sadalīt pa divām grupām tā, lai katrā grupā būtu vienāds skaits.

6.5. Atbilde: Una vienmēr var panākt savu uzvaru.

Savā pirmajā gājienā Una ieraksta savu vārdu tā, lai burts N būtu ierakstīts kvadrāta centrālajā rūtiņā. Tad uz katru Ivo gājienu Una atbild ar centrāli simetrisku gājienu, t.i., Una rakstu savu vārdu rūtiņās, kas ir simetriskas rūtiņām, kurās pēdējā gājienā Ivo ierakstīja savu vārdu, attiecībā pret kvadrāta centru. Ja vēl bija brīvas rūtiņas, kur savu vārdu varēja ierakstīt Ivo, tad noteikti brīvas ir arī tām centrāli simetriskās rūtiņas.

7.1. Ja divciparu skaitļa desmitu cipars ir a, bet vienu cipars ir b, tad divciparu skaitlis ir $10a+b$, tā ciparu reizinājums ir $a\cdot b$ un meklētais dalījums ir $\frac{10a+b}{ab}=\frac{10a}{ab}+\frac{b}{ab}=\frac{10}{b}+\frac{1}{a}$. Dalījuma vērtība būs mazāka, ja dalītāji būs lielāki. Lielākā iespējamā a un b vērtība var būt 9, tātad apskatāmā dalījuma vērtība ir $\frac{10}{b}+\frac{1}{a}\geq\frac{10}{9}+\frac{1}{9}=\frac{11}{9}$. Skaitļa 99 dalījums ar tā ciparu reizinājumu ir $\frac{99}{9\cdot 9}=\frac{11}{9}$.

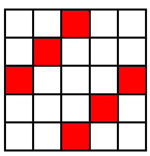
7.2. No trijstūra nevienādības (katru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala) seko, ka 1 cm garais nogrieznis nav izmantojams neviena trijstūra izveidošanai. No pārējiem nogriežņiem trijstūrus var izveidot 7 veidos: (3 cm, 5 cm, 7 cm), (3 cm, 7 cm, 9 cm), (3 cm, 9 cm, 11 cm), (5 cm, 7 cm, 9 cm), (5 cm, 7 cm, 11 cm), (5 cm, 9 cm, 11 cm), (7 cm, 9 cm, 11 cm).

7.3. Pēc dalāmības pazīmēm viegli pārbaudīt, ka dotais skaitlis dalās ar 8, bet nedalās ar 16. Skaitlis dalās ar 8, ja ar 8 dalās skaitļa pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis, šajā gadījumā 176 dalās ar 8.

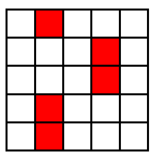
Skaitlis dalās ar 16, ja ar 16 dalās skaitļa pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis, šajā gadījumā 5176 nedalās ar 16.

Tātad dotā skaitļa sadalījumā pirmreizinātājos pirmskaitlis 2 ietilpst ar nepāra pakāpi 3. Taču, ja skaitlis ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad katrs pirmskaitlis tā sadalījumā pirmreizinātājos ietilpst ar pāra pakāpi. Tātad dotais skaitlis nav naturāla skaitļa kvadrāts.

7.4. Atbilde: a) ir iespējams, skat., piem., 5. zīm.; **b)** ir iespējams, skat., piem., 6. zīm.



5. zīm.



6. zīm.

7.5. Atbilde: Ivo vienmēr var panākt savu uzvaru.

Uz katru Unas gājienu Ivo atbild ar centrāli simetrisku gājienu, t.i., Ivo rakstu savu vārdu rūtiņās, kas ir simetriskas rūtiņām, kurās pēdējā gājienā Una ierakstīja savu vārdu, attiecībā pret kvadrāta centru. Ja vēl bija brīvas rūtiņas, kur savu vārdu varēja ierakstīt Una, tad noteikti brīvas ir arī tām centrāli simetriskās rūtiņas.

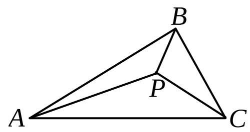
8.1. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $a\cdot 10^k + B$, kur a ir pirmais cipars (kas tiek nosvītrots), bet B ir k ciparu skaitlis, kas paliek pēc a nosvītrošanas ($1 \le k \le 5$).

Tad $a\cdot 10^k + B = 36\cdot B \Rightarrow a\cdot 10^k = 35\cdot B \Rightarrow a\cdot 2^k\cdot 5^k = 5\cdot 7\cdot B$.

Tātad a dalās 7. Tā kā a ir cipars, tad $a = 7$ un $B = 2^k\cdot 5^{k-1} = 2\cdot 10^{k-1}$, $1 \le k \le 5$.
Pavisam ir pieci skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus: 72, 720, 7200, 72000, 720000.

8.2. No trijstūra nevienādības seko $PA + PB > AB$, $PA + PC > AC$ un $PB + PC > BC$ (skat. 7. zīm.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $2(PA + PB + PC) > AB + AC + BC = P_{ABC}$

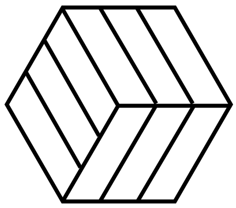
jeb $PA + PB + PC > \frac{1}{2}P_{ABC}$.

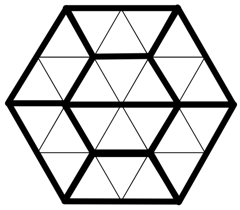


7. zīm.

8.3. Aplūkosim kvadrātvienādojumu $x^2 - \sqrt{t}\cdot x + a = 0$. No uzdevumā dotās vienādības seko, ka t ir šī vienādojuma sakne. Tā kā kvadrātvienādojumam ir vismaz viena sakne, tā diskriminants ir nenegatīvs, t.i., $D = \left(\sqrt{t}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot a = t - 4a \ge 0$ jeb $t \ge 4a$, k.b.j.

8.4. **a)** skat., piem., 8. zīm.; **b)** skat., piem., 9. zīm.

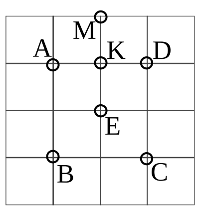

8. zīm.


9. zīm.

8.5. Vispirms pajautāsim par x_1, tad par x_3. Ja $x_1 = x_3$, jautāsim par x_2, ja $x_1 \ne x_3$, jautāsim par x_4. Ja $x_1 = x_3 = x_2$, tad neatkarīgi no x_4 vērtības, virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, savukārt, ja $x_1 = x_3 \ne x_2$ dotā virkne nav monotona.

Ja $x_1 \ne x_3$, bet $x_3 = x_4$, tad, neatkarīgi no x_2 vērtības, virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, savukārt, ja $x_1 \ne x_3$ un $x_3 \ne x_4$ (t. i., $x_1 = x_4$), virkne nav monotona.

9.1. Ja trapeces augstums ir h, tad tās laukumus ir $S = \frac{(3+13)}{2}\cdot h = 8h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Tātad ir trijstūris, kura laukums $S_1 \le \frac{1}{2}\cdot 3\cdot h = 1{,}5h$. Taču $1{,}5h < \frac{8h}{5} = 1{,}6h$, t.i., šī trijstūra laukums ir mazāks nekā piektā daļa no trapeces laukuma. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros.



10. zīm.

9.2. Vispirms aplūkosim virsotnes A, B, C, D un E (skat. 10. zīm.). Vismaz trīs no tām ir nokrāsotas vienā krāsā. Ja vienā krāsā nokrāsotas trīs no virsotnēm A, B, C un D, tās veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Ja vienā krāsā nokrāsotas virsotnes (E, A, B) vai (E, B, C), vai (E, C, D), vai (E, A, D), arī veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris ar vienādas krāsas virsotnēm.

Gadījumā, ja virsotnes A, E un C nokrāsotas vienā krāsā, bet virsotnes B un D – otrā krāsā, aplūkosim vēl virsotnes K un M. Ja vismaz viena no tām ir nokrāsota tāpat kā A un E, tad tā kopā ar A un E veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri. Savukārt, ja M un K abas nokrāsotas tāpat kā virsotne D, veidojas vienādsānu taisnleņķa trijstūris MKD.

9.3. **Atbilde:** 1, 2, 3 un 5.

Dotos ciparus apzīmēsim ar *a*, *b*, *c*, *d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

$$4\cdot 10\cdot(a+b+c+d)+4\cdot(a+b+c+d)=44(a+b+c+d)=484,$$

tātad $a+b+c+d=484:44=11$. Vienīgā iespēja, ka četru dažādu nenulles ciparu summa ir 11, ir tad, ja šie cipari ir 1, 2, 3 un 5.

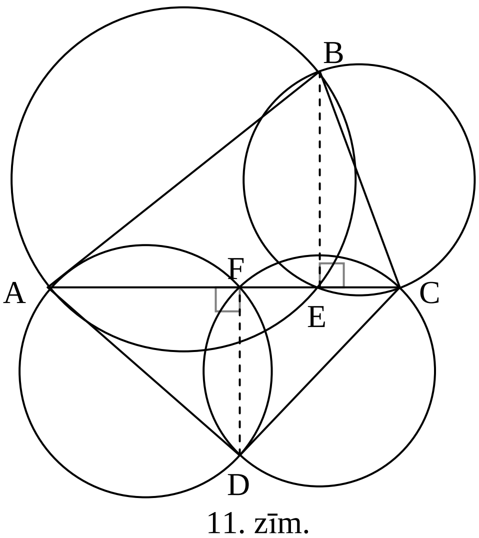
9.4. Tā kā $x_0>0$ un $x_{n+1}=x_n+\frac{2}{x_n}$ katram $n\geq 0$, tad $x_n>0$ visiem $n\geq 0$.

Aplūkosim skaitļu virkni $y_n=x_n^{\ 2}$ katram $n\geq 0$.

Tad $y_{n+1}=x_{n+1}^{\ 2}=\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)^2=x_n^{\ 2}+4+\frac{4}{x_n^{\ 2}}>x_n^{\ 2}+4=y_n+4$.

Tātad $y_{100}>y_0+4\cdot 100=y_0+400$ jeb $x_{100}^{\ 2}>x_0^{\ 2}+400>0+400=400$. Tā kā $x_{100}>0$ un $x_{100}^{\ 2}>400$, tad $x_{100}>20$, k.b.j.

9.5. Apzīmēsim doto četrstūri ar ABCD. Novilksim augstumus BE un DF pret diagonāli AC. Riņķis ar diametru AB pilnībā satur sevī ΔABE, jo $\angle AEB$ ir taisns leņķis. Līdzīgi arī ΔBEC pilnībā atrodas riņķī ar diametru BC (sk. 11. zīm.). Trijstūri ΔABE un ΔBEC kopā veido trijstūri ΔABC, tāpēc tas arī tiek pārklāts ar dotajiem riņķiem. Līdzīgi pamato, ka arī ΔADC tiek pārklāts ar dotajiem riņķiem, līdz ar to arī viss četrstūris ABCD tiek pārklāts ar dotajiem četriem riņķiem.



11. zīm.

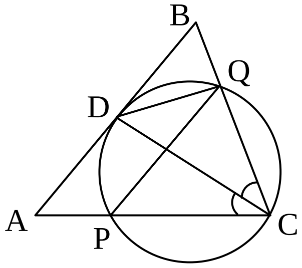
10.1. Aplūkosim kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2+px+q$ vērtības punktos x_1 un x_2.

$$\frac{1}{3}x_1^2+px_1+q=x_1^2+px_1+q-\frac{2}{3}x_1^2=-\frac{2}{3}x_1^2\leq 0.$$

$$\frac{1}{3}x_2^2+px_2+q=-x_2^2+px_2+q+\frac{4}{3}x_2^2=\frac{4}{3}x_2^2\geq 0.$$

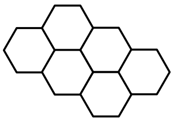
Tā kā vienā no šiem punktiem polinoma vērtība ir negatīva, bet otrā – pozitīva, pie tam kvadrātfunkcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir arī kāds punkts, kurā funkcija $\frac{1}{3}x^2 + px + q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ sakne.

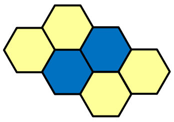
10.2. Tā kā AB ir riņķa līnijas pieskare, tad $\angle BDQ = \angle DCQ$ kā ordaspieskares leņķis un ievilkts leņķis, kas balstās uz vienu loku (skat. 12. zīm.). Savukārt $\angle DQP = \angle DCP$ kā ievilktie leņķi. Tā kā CD ir bisektrise, tad $\angle DCQ = \angle DCP$, tāpēc $\angle BDQ = \angle DQP$ – tie šķērsleņķi pie taisnēm AB un PQ, kuras krusto taisne DQ, tātad AB||PQ, k.b.j.

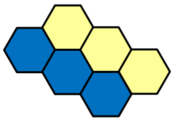


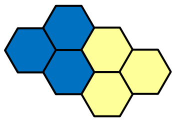
12. zīm.

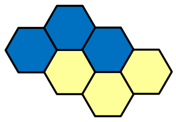
10.3. Atbilde: $n = 4$.
Ievērosim, ka doto figūru var sadalīt sešās 13. zīm. redzamajās figūrās, un savukārt šo figūru var sadalīt jebkuros *n*-heksos, ja $n = 2$, 3, skat., piem., 14., 15., 16. un 17. zīm.

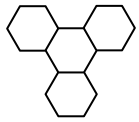

13. zīm.


14. zīm.


15. zīm.


16. zīm.


17. zīm.


18. zīm.

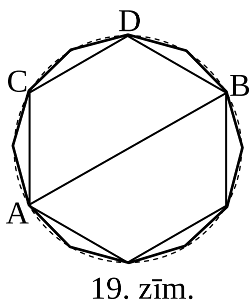
Acīmredzami, ka doto figūru nevar sadalīt 18. zīm. redzamajos 4-heksos, jo ar tiem nevar pārklāt jau dotās figūras ‘malas’ divus pirmos sešstūrus.

10.4. Visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 sadalīsim 50 grupās: katru nepāra skaitli ievietosim citā grupā (pavisam ir 50 nepāra skaitļi), savukārt, tā kā katru pāra skaitli p var izteikt kā nepāra skaitļa n un divnieka pakāpes reizinājumu, t. i., $p = n \cdot 2^k$, $k > 0$, pāra skaitli p ievietosim vienā grupā ar nepāra skaitli n.
Piemēram, pirmās grupas ir {1; 2; 4; 8; 16; 32; 64}, {3; 6; 12; 24; 48; 96}; {5; 10; 20; 40; 80} utt.
Izvēloties jebkurus divus skaitļus no vienas grupas, lielākais skaitlis dalās ar mazāko (dalījums ir divnieka pakāpe).
Tā kā tika izvēlēts 51 skaitlis, bet visi skaitļi ir sadalīti 50 grupās, tad vismaz divi skaitļi būs no vienas grupas; tie arī ir meklētie divi skaitļi.

10.5. Ievērosim, ka $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $12 = 2^2 \cdot 3^1$, $18 = 2^1 \cdot 3^2$.
Ja kāds no 2013 uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar kāda pirmskaitļa $p \geq 5$ pakāpi p^k ($k \geq 1$), tad visi uzrakstītie skaitļi dalās ar p^k. Tāpēc, visus uzrakstītos skaitļus izdalot ar p^k, uzdevumā aprakstītā īpašība saglabājas.
Pēc šādas vienkāršošanas visi pa riņķi uzrakstītie skaitļi izsakāmi formā $2^a 3^b$. Var ievērot, ka jebkuriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem summa $a + b$ vienam ir pāra skaitlis, bet otram – nepāra. Taču, tā kā pa apli jāuzraksta 2013 – nepāra skaits skaitļu, to nevar izdarīt.

11.1. Ja $n^2 - 3n - 1$ dalās ar 169, tad $n^2 - 3n - 1 = (n-8)(n+5) + 39$ dalās ar 13. Tātad $(n-8)(n+5)$ dalās ar 13. Tā kā skaitļi $n-8$ un $n+5$ abi vienlaicīgi dalās ar 13, tad $(n-8)(n+5)$ dalās ar 169. Bet tādā gadījumā $(n-8)(n+5)+39$ nedalās ar 169.

11.2. Atbilde: jā, piemēram, regulārs 12-stūris.
Regulāram sešstūrim diagonāles AB garums ir vienāds ar divu malu garumiem, piem., AB = AC + CD (skat. 19. zīm.)



19. zīm.

Apskatīsim regulāram sešstūrim apvilkto riņķa līniju, un katram tās lokam, ko atšķeļ sešstūra mala, atliksim viduspunktu. Savienojot šos viduspunktus un sešstūra virsotnes, iegūsim regulāru 12-stūri. Sākotnējā sešstūra malas un diagonāles ir iegūtā 12-stūra diagonāles, tātad regulāram 12-stūrim ir diagonāle, kuras garums ir vienāds ar divu citu diagonāļu garumu summu.

11.3. Visi skaitļi a_i uzrakstāmi formā $a_i = 3^b \cdot 5^c$, tāpēc apskatāmas summas katrs saskaitāmais izsakāms formā $\frac{1}{a_i} = \frac{1}{3^b \cdot 5^c}$. Apzīmēsim ar k maksimālo no visiem kāpinātājiem b un c pa visiem i.

Pierādīsim, ka $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \le \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^k}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^k}\right)$.

Labajā pusē, atverot iekavas, iegūsim visus iespējamos reizinājumus $\frac{1}{3^b \cdot 5^c}$, visām b un c vērtībām no 0 līdz k. Kreisajā pusē visi skaitļi arī ir izsakāmi šādā formā, un tie visi ir dažādi. Tātad labā puse satur visus tos pašus un varbūt vairāk saskaitāmos (tie visi ir pozitīvi) nekā kreisā puse, tāpēc labās puses vērtība ir lielāka vai vienāda ar kreisās puses vērtību.

Labajā pusē ir divu ģeometrisko progresiju summu reizinājums. Izmantojot ģeometriskās progresijas pirmo k locekļu summu, iegūstam

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ un}$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{5}} < \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Tātad $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \le \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$, k.b.j.

11.4. Maršrutus plānosim sekojošā veidā. Vispirms izvēlamies divas pilsētas K un L, un reisu no K uz L dodam apkalpot aviokompānijai A, bet reisu no L uz K – kompānijai B. Pēc tam izvēlamies trešo pilsētu M, un saplānojam reisus, kas savieno M ar K un L: visus no M izejošos reisus (MK un ML) uzticam apkalpot kompānijai A, bet visus M ienākošos reisus (KM un LM) uzticam kompānijai B.

Tādā veidā turpinām: jau saplānoto reisu shēmai pievienojot jaunu pilsētu W, **visus** no W izejošos reisus uzticam apkalpot vienai aviokompānijai, bet **visus** pilsētā W ieejošos reisus – otrajai aviokompānijai.

Šādā veidā saplānojot visus reisus, noteikti neveidosies neviens ciklisks maršruts, ko nodrošina viena un tā pati kompānija. Lai veidotos ciklisks maršruts, nepieciešams, lai maršrutā ietilpstošajām pilsētām būtu vismaz viens ieejošais un vismaz viens izejošs reiss, ko nodrošina viena un tā pati kompānija, taču aprakstītā plānošanas shēma šādu iespēju izslēdz.

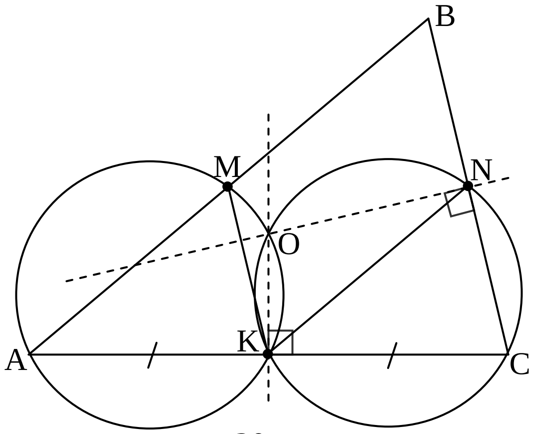
11.5. Galda virsmu „pārklāsim" ar kvadrātisku rūtiņu režģi, kur rūtiņas malas garums vienāds ar kvadrātveida papīra gabalu malas garumu un režģa līnijas ir paralēlas galda malām.

Adatas iespraudīsim izveidotā režģa punktos (rūtiņu virsotnēs). Tā kā režģa rūtiņas malas garums vienāds ar papīra gabalu malas garumu un režģa līnijas paralēlas papīra gabalu malām, tad katrs kvadrāts tiks piesprausts ar ne vairāk kā vienu adatu. Ja kāds papīra gabals netiek piesprausts ne ar vienu adatu (adatas atrodas uz šīs kvadrāta malām), izvēlēto režģi nedaudz paralēli pārbīda, līdz katrs kvadrāts ir piesprausts pie galda.

12.1. Ja $x<1$ vai $x>3$, tad izteiksmes $\lg x \cdot \lg(4-x)$ vērtība ir vai nu negatīva vai vispār neeksistē, ja $1 \le x \le 3$, tad arī $1 \le 4-x \le 3$ un $\lg x \cdot \lg(4-x) \le \lg(3) \cdot \lg(3) < \frac{1}{4}$, jo $3 < \sqrt{10}$.

Tātad dotajam vienādojumam atrisinājuma nav.

12.2. 1. risinājums. Aplūkosim divas no dotajām riņķa līnijām, skat. 20. zīm. ΔAMK un ΔKNC ir līdzīgi ΔABC ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$. Līdz ar to ap ΔAMK un ap ΔKNC apvilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi. Tāpēc tās abas krustojas punktos uz to simetrijas ass, kas ir AC vidusperpendikuls. Apzīmēsim šo riņķa līniju otru krustpunktu ar O. Leņķu $\angle OKC$ un $\angle ONC$ summai jābūt $180°$, tāpēc $\angle ONC$ arī ir taisns leņķis. Tātad ON ir malas BC vidusperpendikuls. Tāpēc abas apskatītas riņķa līnijas krustojas ΔABC vidusperpendikulu krustpunktā, kas ir ΔABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Līdzīgi pierāda, ka arī trešā riņķa līnija iet caur punktu O.



20. zīm.

2. risinājums. Trijstūris ΔAMK ir homotētisks trijstūrim ΔABC ar koeficientu $\frac{1}{2}$ un homotētijas centru punktā A. Tāpēc ΔAMK apvilktā riņķa līnija pieskaras ΔABC apvilktajai riņķa līnijai punktā A. No homotētijas seko arī, ka ΔAMK apvilktās riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu, tāpēc mazākā riņķa līnija iet caur lielākās centru. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējās divas riņķa līnijas iet caur ΔABC apvilktās riņķa līnijas centru. Tāpēc visas trīs dotās riņķa līnijas krustojas vienā punktā O – ΔABC apvilktās riņķa līnijas centru.

12.3. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 7. $6 \equiv -1; 13 \equiv -1; 29 \equiv 1 \pmod 7$, tāpēc $(-1)^x + (-1)^y = 1^z \pmod 7$ jeb $\pm 1 + (\pm 1) = 1$, taču pēdējā vienādība nav iespējama, tātad nav tādu naturālu skaitļu x, y, z, ar kurām dotā vienādība būtu patiesa.

12.4. Ar $a(n)$ apzīmēsim n burtus garo vārdu, kas sākas ar patskani, skaitu, bet ar $b(n)$ – n burtus garo vārdu, kas sākas ar līdzskani, skaitu. Tad $S(n) = a(n) + b(n)$.

Ja vārds sākas ar patskani, tad nākamais burts var būt tikai līdzskanis (jo divi patskaņi nevar būt blakus), tāpēc $a(n) = i \cdot b(n-1)$.

Ja vārds sākas ar līdzskani, tad nākamais burts var būt vai nu patskanis, vai arī vēl viens līdzskanis, bet tad trešais burts noteikti ir patskanis (jo blakus var būt ne vairāk kā divi līdzskaņi), tāpēc $b(n) = j \cdot a(n-1) + j^2 \cdot a(n-2)$.

Tātad $S(n) = a(n) + b(n) = i \cdot b(n-1) + j \cdot a(n-1) + j^2 \cdot a(n-2) =$

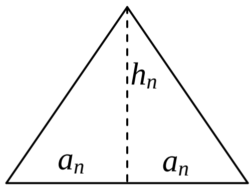
$= i\cdot(j\cdot a(n-2)+j^2\cdot a(n-3))+j\cdot(i\cdot b(n-2))+j^2\cdot(i\cdot b(n-3)) =$

$= i\cdot j\cdot(a(n-2)+b(n-2))+i\cdot j^2\cdot(a(n-3)+b(n-3)= i\cdot j\cdot S(n-2)+i\cdot j^2\cdot S(n-3)$ jeb $S(n+3)=i\cdot j\cdot S(n+1)+i\cdot j^2\cdot S(n)$, k.b.j.

12.5. Izmantosim faktu, ka, ja $x\in(0;\ 1)$, tad arī $x^2\in(0;\ 1)$. Tad $2-\sqrt{3}\in(0;1)$, $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}\in(0;1)$, $(7-4\sqrt{3})^2=97-56\sqrt{3}\in(0;1)$ utt. Šādi iegūstam skaitļus $h_1-a_1\sqrt{3}$, $h_2-a_2\sqrt{3}$ utt., kur a_n un h_n ir naturāli skaitļi, pie tam $(h_n-a_n\sqrt{3})^2=h_n^2+3a_n^2-2h_na_n\sqrt{3}=h_{n+1}-a_{n+1}\sqrt{3}$. Tālāk, ja $h_n^2-3a_n^2=1$, tad $h_{n+1}^2-3a_{n+1}^2=(h_n^2+3a_n^2)^2-3\cdot(2h_na_n)^2=(h_n^2+3a_n^2)^2-12h_n^2a_n^2=(h_n^2-3a_n^2)^2=1$.

Tā kā $h_1^2-3a_1^2=2^2-3\cdot1^2=1$, tad visiem n $h_n^2-3a_n^2=1$.

Vēl ievērosim, ka $a_{n+1}=2h_na_n\ge 2h_1a_n\ge 4a_n$, tāpēc $a_n\ge 4^{n-1}$. Izvēlēsimies n tik lielu, ka $a_n>2013^2$ un apskatīsim 21. zīm. redzamo vienādsānu trijstūri. Tā perimetram P ir spēkā nevienādības $P>4a_n$ un $\sqrt{P}>2\cdot2013$. Lielākā atšķirība starp tā malām nav lielāka par



21. zīm.

$$\left|\sqrt{a_n^2+h_n^2}-2a_n\right|=\left|\frac{h_n^2-3a_n^2}{\sqrt{a_n^2+h_n^2}+2a_n}\right|=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+h_n^2}+2a_n}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{a_n^2+h_n^2}+a_n}=\frac{2}{P}=\frac{1}{0{,}5\sqrt{P}}\cdot\frac{1}{\sqrt{P}}<\frac{1}{2013\cdot\sqrt{P}}, \text{ k.b.j.}$$