5.1. **Atbilde:** nē. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 1, 4, 6 vai 9, tad septiņas reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 7, 8, 2 vai 3.

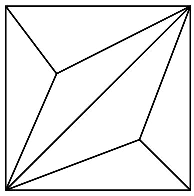
5.2. Skat., piem., 1. zīm.

5.3. **Atbilde:** jāpaņem vismaz 7 pogas. Ja paņems tikai 6 pogas, var gadīties, ka starp tām ir 1 balta, 2 zaļas un 3 sarkanas – nevienas krāsas pogas nav vajadzīgajā skaitā.

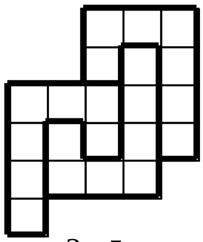
5.4. **Atbilde:** no 17. stāva. Ievērosim, ka šajā mājā ar doto liftu ne no viena stāva nav iespējams nokļūt uz 17. stāvu (zemākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz augšu, ir 1+17=18. stāvs, bet augstākais stāvs, uz kuru var nokļūt, braucot uz leju ir 24-8=16. stāvs). No 17. stāva uz citiem stāviem var nokļūt, piem., sekojošā veidā:

17. $\to$ 9. $\to$ 1. $\to$ 18. $\to$ 10. $\to$ 2. $\to$19. $\to$ 11. $\to$ 3. $\to$ 20. $\to$12. $\to$ 4. $\to$ 21. $\to$ 13. $\to$
$\to$ 5. $\to$ 22. $\to$ 14. $\to$6. $\to$ 23. $\to$ 15. $\to$ 7. $\to$ 24. $\to$16. $\to$ 8.

5.5. Skat., piem. 2. zīm.



1. zīm.

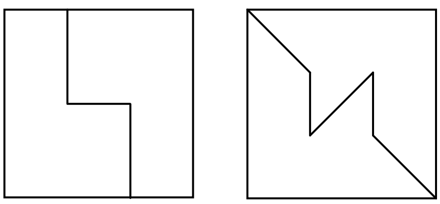


2. zīm.

6.1. Pēc katras darbības visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa palielinās par 2 (divu nodzēsto skaitļu vietā tiek rakstīta tos summa, palielināta par 2, bet pārējie skaitļi netiek mainīti, tātad arī to summa nemainās). Tātad beigās palikušais vienīgais skaitlis ir vienāds ar $S+2\cdot n$, kur S ir visu sākumā uzrakstīto skaitļu summa, bet n ir izpildīto darbību skaits. Tā kā sākumā uz tāfeles bija 10 skaitļi, bet pēc vienas darbības izpildes skaitļu skaits samazinās par viens, tad Alfons pavisam izpildīja 9 darbības (t.i. $n=9$). Beigās palikušais skaitlis ir

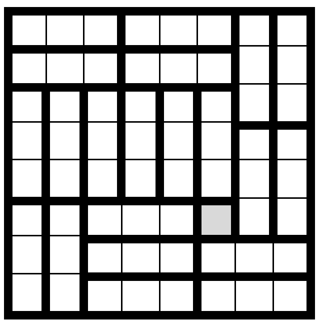
$$S+2\cdot n=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+2\cdot 9=\frac{(1+10)\cdot 10}{2}+18=55+18=73.$$

6.2. Skat., piem., 3. a) un b) zīmējumus.



a) b)

3. zīm.



4. zīm.

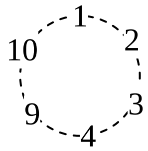
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

5. zīm.

6.3. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas var izvietot 21 taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas. (skat. 4. zīm.). Katrā no šiem taisnstūriem ir jābūt vismaz vienai zaļai rūtiņai. Tātad ir nepieciešams nokrāsot vismaz 21 rūtiņu.
Parādīsim, ka ar 21 rūtiņu pietiek. Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1, 2 vai 3 tā, ka katrā 1×3 rūtiņu grupā būtu ierakstīti visi skaitļi (skat. 5. zīm). Nokrāsojot zaļas visas rūtiņas, kurās ierakstīts 1 (tādu ir 21), iegūsim situāciju, ka nebūs iespējams izvēlēties neaizkrāsotu 1×3 rūtiņu grupu.

6.4. **a)** Jā, var, skat., piem., 6. zīm.

b) Nē, nevar. Divu dažādu naturālu skaitļu summa ir vismaz 1 + 2 = 3. Visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 2, ir nepāra skaitļi. Tātad jebkuru divu blakus uzrakstītos skaitļu summai jābūt nepāra skaitlim, t.i., jebkuru divu blakusstāvošu skaitļu paritātēm jābūt dažādām. Taču, lai arī kā7 skaitļus izvietotu pa apli, vismaz vienā vietā blakus atradīsies divi vienas paritātes skaitļi, kas summā dod pāra skaitli, lielāku nekā 2 (tas nav pirmskaitlis).



6. zīm.

6.5. Atbilde: 53.
Ja zīmuļu skaits ir pilni desmiti, tad tos var sapakot kastītēs pa 10 zīmuļiem. Ja zīmuļu skaits nav izsakāms veselos desmitos, tad zīmuļu pakošanai jāizmanto arī 7 zīmuļu kastītes. Mazākie skaitļi, kas izsakāmi kā skaitļa 7 daudzkārtņi, ir 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63. Visus skaitļus, kas lielāki nekā 63, var izteikt kā atbilstošā 7 daudzkārtņa (kura vienu cipars sakrīt ar izsakāmā skaitļa vienu ciparu) un pilnu desmitu summu. Savukārt nevienu skaitli, kas mazāks nekā 63 un kura pēdējais cipars ir 3, nevar izteikt kā 7 daudzkārtņa un pilnu desmitu summu. Lielākais no tādiem skaitļiem ir 53. Visus skaitļus no 54 līdz 62 var izteikt, piem., $54=7\cdot2+10\cdot4$, $55=7\cdot5+10\cdot2$, $56=7\cdot8$, $57=7\cdot1+10\cdot5$, $58=7\cdot4+10\cdot3$, $59=7\cdot7+10\cdot1$, $60=10\cdot6$, $61=7\cdot3+10\cdot4$, $62=7\cdot6+10\cdot2$.

7.1. Nē, nevar. Reizinājums $ab(3a+5b)$ ir pāra skaitlis: ja kāds no reizinātājiem a vai b ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis, savukārt, ja a un b abi ir nepāra skaitļi, tad summa $3a+5b$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitli.

7.2. No trijstūra nevienādības (katru divu malu summa ir lielāka nekā trešā mala) seko, ka 1 cm garais nogrieznis nav izmantojams neviena trijstūra izveidošanai. No pārējiem nogriežņiem trijstūrus var izveidot 7 veidos: (3 cm, 5 cm, 7 cm), (3 cm, 7 cm, 9 cm), (3 cm, 9 cm, 11 cm), (5 cm, 7 cm, 9 cm), (5 cm, 7 cm, 11 cm), (5 cm, 9 cm, 11 cm), (7 cm, 9 cm, 11 cm).

7.3. a) Var. Ar $2s$ apzīmēsim attālumu starp pilsētām, ar t_1 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa pirmo pusi, ar t_2 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa otro pusi.

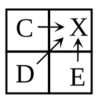
Tad $\frac{s}{t_1}=30$ km/h jeb $s=30t_1$; $\frac{2s}{t_1+t_2}=40$ jeb $2s=40t_1+40t_2$, t.i., $s=20t_1+20t_2$.

Tātad $30t_1=20t_1+20t_2$ un $t_2=\frac{1}{2}t_1$, tāpēc $\frac{s}{t_2}=2\cdot\frac{s}{t_1}=2\cdot30=60$ km/h

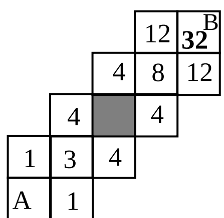
b) Nevar. Brīdī, kad zaļā automašīna ir veikusi pusi ceļa, sarkanā automašīna jau ir veikusi visu ceļu un atrodas pilsētā B. Tātad zaļajai automašīnai ceļa otrā puse būtu jāveic momentāni (0 stundās), kas nav iespējams.

7.4. Jā to var izdarīt. No sākuma kubu ar izmēriem $3\times3\times3$ sagriezīsim 27 kubiņos ar izmēriem $1\times1\times1$. Pēc tam 8 mazos kubiņus, kas atrodas pie lielā kuba viena stūra, apvienosim vienā kubā ar izmēriem $2\times2\times2$. Kopējais kubu skaits samazināsies par 7 un kļūs vienāds ar 20.

7.5. Pakāpeniski aprēķināsim, cik veidos *zilonis* var nokļūt katrā rūtiņā. Ievērosim: ja rūtiņās C, D un E var nokļūt attiecīgi c, d un e veidos, tad rūtiņā X var nokļūt $x=c+d+e$ veidos (skat. 7. zīm.). Tātad no rūtiņas A rūtiņā B var nokļūt 32 veidos (skat. 8. zīm.).



7. zīm.



8. zīm.

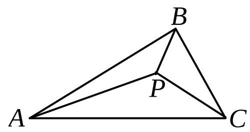
8.1. **a)** Piemēram, $4 \cdot 1 \cdot 5 - 7 = 13$

b) Piemēram, $4 : (1 - 5 : 7) = 14$

8.2. No trijstūra nevienādības seko $PA + PB > AB$, $PA + PC > AC$ un $PB + PC > BC$ (skat. 9. zīm.). Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$2(PA + PB + PC) > AB + AC + BC = P_{ABC}$

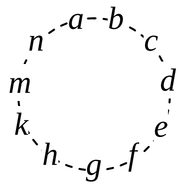
jeb $PA + PB + PC > \dfrac{1}{2} P_{ABC}$.



9. zīm.

8.3. Apzīmēsim zēnu skaitu ar *z*, bet meiteņu skaitu – ar *m*. Tātad visi zēni kopā ieguva 21,6·*z* punktus, bet visas meitenes kopā ieguva 15·*m* punktus. Tad visu bērnu vidējais punktu skaits ir $\dfrac{21{,}6z + 15m}{z + m} = 20$. Pārveidojot iegūstam $21{,}6z + 15m = 20(z + m) \Rightarrow 1{,}6z = 5m \Rightarrow$ $8z = 25m \Rightarrow z = 25t,\ m = 8t$ un $z + m = 33t$. Tā kā kopējais skolnieku skaits nepārsniedz 60, tad *t* = 1 un kopējais skolēnu skaits ir 33.

8.4. Apzīmēsim pa apli uzrakstītos skaitļus kā parādīts 10. zīmējumā. Tā kā $a + b + c$ un $b + c + d$ dalās ar 5, tad *a* un *d*, dalot ar 5, dod vienādu atlikumu (apzīmēsim to ar *r*, $0 \le r < 5$).



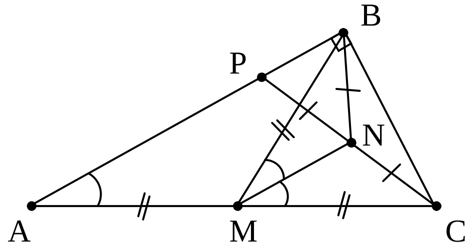
10. zīm.

Līdzīgi no tā, ka $d + e + f$ un $e + f + g$ dalās ar 5, seko, ka arī *g* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $g + h + k$ un $h + k + m$ dalās ar 5, seko, ka arī *m* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $m + n + a$ un $n + a + b$ dalās ar 5, seko, ka arī *b* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $b + c + d$ un $c + d + e$ dalās ar 5, seko, ka arī *e* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $e + f + g$ un $f + g + h$ dalās ar 5, seko, ka arī *h* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $h + k + m$ un $k + m + n$ dalās ar 5, seko, ka arī *n* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $n + a + b$ un $a + b + c$ dalās ar 5, seko, ka arī *c* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $c + d + e$ un $d + e + f$ dalās ar 5, seko, ka arī *f* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
No tā, ka $f + g + h$ un $g + h + k$ dalās ar 5, seko, ka arī *k* dod atlikumu *r*, dalot ar 5.
Tātad visi 11 uzrakstītie skaitļi, dalot ar 5, dod atlikumu *r*. Tā kā summa $a + b + c$ dalās ar 5, tad šo skaitļu atlikumu summa $r + r + r = 3r$ arī dalās ar 5. Skaitlis 3 nedalās ar 5, tātad *r* dalās ar 5. Tā kā *r* < 5, tad *r* = 0, kas nozīmē, ka visi uzrakstītie skaitļi dalās ar 5.

8.5. Izvēlamies jebkuru skaitli *k* (*k*=1, 2, ... 7). Tā kā dotā tabula ir simetriska, diagonāles abās pusēs skaitlis *k* ir ierakstīts vienādā skaitā rūtiņu, tātad ārpus diagonāles ir uzrakstīti pāra skaits skaitļu *k*. Tā kā tabulā pavisam ir septiņi (nepāra skaits) skaitļi *k*, tad vismaz viens no tiem ir uz diagonāles. Šis spriedums ir spēkā visām septiņām iespējamām *k* vērtībām, un diagonālē ir tieši 7 rūtiņas, tātad diagonālē ir ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs tieši vienu reizi.

9.1. Piemēram, skaitlis 2^{11}. Tā dalītāji ir skaitļi $1 = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}$.

9.2. Tā kā Δ*ABC* un Δ*PBC* ir taisnleņķa, *AM*=*BM*=*CM* un *PN*=*BN*=*CN* (skat. 11. zīm.). Tāpēc Δ*MBN*=Δ*MCN* (pazīme *mmm*) un ∠*BMN*=∠*CMN*, jo vienādos trijstūros pret vienādām malām ir vienādi leņķi. *MN* ir Δ*APC* viduslīnija, tāpēc *AP*||*MN* un ∠*CMN*=∠*CAP* kā kāpšļu leņķi. Tātad, ∠*BMN*=∠*CMN*=∠*CAP*=∠*BAC*, k.b.j.



11. zīm.

9.3. No Vjeta teorēmas seko $p^2+q=507$ - nepāra skaitlis, tātad viens no pirmskaitļiem *p* vai *q* ir 2. Ja $q=2$, tad $p^2=505$, bet tad *p* nav vesels skaitlis. Tātad $p=2$ un $q=503$, no kurienes iegūstam $a=p^2q=2012$.

9.4. Ievērosim, ka $\overline{aaabbbccc}=111\cdot\overline{a00b00c}=37\cdot3\cdot\overline{a00b00c}$. Tātad Pēteris var uzvarēt, panākot, ka izveidojas skaitlis $\overline{aaabbbccc}$. Lai to panāktu, Pēteris domās sadala zvaigznītes pēc kārtas grupās pa trim. Kad Jānis ieraksta kādu ciparu, Pēteris tās pašas grupas abu pārējo zvaigznīšu vietā ieraksta tādus pašus ciparus, kā Jānis. Tātad pēc Pētera gājiena katrā grupā vai nu visas trīs zvaigznītes ir aizstātas ar cipariem, vai arī visas trīs ir neaizstātas. Tātad pēc kārtējā Jāņa gājiena Pēteris atkal varēs rīkoties tāpat un panākt savu uzvaru.

9.5. Ja trapeces augstums ir *h*, tad tās laukumus ir $S=\frac{(3+13)}{2}\cdot h=8h$. Sadalot trapeci piecos trijstūros, vismaz vienam no tiem mala atrodas uz trapeces īsākā pamata un augstums pret šo malu nepārsniedz trapeces augstumu. Tātad ir trijstūris, kura laukums $S_1\le\frac{1}{2}\cdot3\cdot h=1{,}5h$. Taču $1{,}5h<\frac{8h}{5}=1{,}6h$, t.i., šī trijstūra laukums ir mazāks nekā piektā daļa no trapeces laukuma. Tātad doto trapeci nav iespējams sadalīt piecos vienlielos trijstūros.

10.1. Ja $p\ne3$, tad p^2, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tāpēc $14p^2+1$ dalās ar 3, un nav pirmskaitlis. Ja $p=3$, tad $14p^2-1=125=5^3$.

10.2. Novilksim riņķi, kura diametrs ir BD. Tā kā leņķi *DAB* un *BCD* ir plati, tad punkti A un C atrodas riņķa iekšpusē. Tātad $AC<BD$, jo jebkurš nogrieznis riņķa iekšpusē ir īsāks nekā tā diametrs.

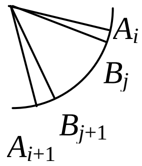
10.3. Aplūkosim kvadrātfunkcijas $\frac{1}{3}x^2+px+q$ vērtības punktos x_1 un x_2.

$$\frac{1}{3}x_1^2+px_1+q=x_1^2+px_1+q-\frac{2}{3}x_1^2=-\frac{2}{3}x_1^2\le0.$$

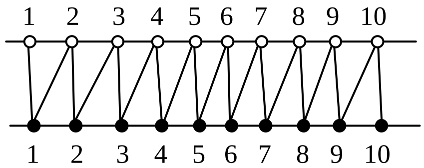
$$\frac{1}{3}x_2^2+px_2+q=-x_2^2+px_2+q+\frac{4}{3}x_2^2=\frac{4}{3}x_2^2\ge0.$$

Tā kā vienā no šiem punktiem polinoma vērtība ir negatīva, bet otrā – pozitīva, pie tam kvadrātfunktcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir arī kāds punkts, kurā funkcija $\frac{1}{3}x^2+px+q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2+px+q=0$ sakne.

10.4. Būs divas tādas desmitstūra virsotnes B_j un B_{j+1}, kas pieder lokam A_iA_{i+1}, ko veido divas deviņstūra virsotnes (skat. 12. zīm.). Deviņstūra virsotnes sadala riņķa līniju 40° lielos lokos, bet 10-stūra virsotnes 36° lielos lokos, pie tam visas deviņstūra un 10-stūra virsotnes ir dažādas (jo riņķa līnija sadalīta 19 lokos). Tātad $\cup A_iB_j + \cup B_{j+1}A_{i+1} = 4°$, no kurienes seko, ka vismaz viens no šiem lokiem nepārsniedz 2°.



16. zīm.

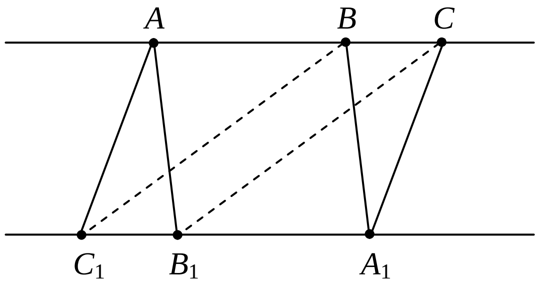


17. zīm.

10.5. Visus zaļos punktus sanumurējam no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz 10 (skat. 17. zīm.). Līdzīgi sanumurējam visus sarkanos punktus. Tā kā nogriežņi nekrustojas, tad tie sakārtoti virzienā no kreisās uz labo pusi. Aplūkojam katra nogriežņa galapunktos ierakstīto skaitļu summas. Tā ir stingri augoša virkne. Mazākā summa ir 2, lielākā – 20. Pavisam iespējamas 19 vērtības. Kā uzzīmēt 19 nogriežņus skat., piem., 17. zīm.

11.1. Ja n^2-3n-1 dalās ar 169, tad $n^2-3n-1=(n-8)(n+5)+39$ dalās ar 13. Tātad $(n-8)(n+5)$ dalās ar 13. Tā kā skaitļi $n-8$ un $n+5$ abi vienlaicīgi dalās ar 13, tad $(n-8)(n+5)$ dalās ar 169. Bet tādā gadījumā $(n-8)(n+5)+39$ nedalās ar 169.

11.2. Sākumā apskatam gadījumu, kad taisnes ir paralēlas (skat. 18. zīm.). Ievērojam, ka ΔAB_1C_1 ir vienāds ar ΔA_1BC, pie tam viens ir iegūts ar otrā pagriezienu par $180°$. Tas nozīmē, ka $CB=B_1C_1$, pie tam punktu pāri *B*, *C* un C_1, B_1 uz taisnēm izvietoti tieši šajā secībā. Tāpēc $BC_1 \| B_1C$.



18. zīm.

Par nogriežņa *XY* virzītu nogriezni $\overline{XY}$ sauksim nogriezni, kur taisnei, kurai tas pieder, ir piekārtots virziens. Ja $\overline{XY}$ virziens sakrīt ar taisnes virzienu, tā vērtība ir *XY*; pretējā gadījumā tā ir $-XY$.

Ja taisnes nav paralēlas, tās krustojas kādā punktā O. No Talesa teorēmas seko, ka izpildās vienādības $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OB_1}:\overline{OA_1}$ un $\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{OA_1}:\overline{OC_1}$. Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\overline{OC}:\overline{OB}=\overline{OB_1}:\overline{OC_1}$. Tad no Talesa apgrieztās teorēmas seko, ka $BC_1 \| B_1C$, k.b.j.

Piezīme. Virzītie nogriežņi tiek lietoti, lai varētu pielietot Talesa apgriezto teorēmu. Iespējams arī līdzīgs pierādījums ar parastiem nogriežņu garumiem; šajā gadījumā būtu jāšķiro vairāki punktu izvietojuma gadījumi, atkarībā no tā, kurā pusē no O uz taisnes atrodas katrs punkts.

11.3. Pārveidojam doto vienādojumu, pareizinot ar saucējam saistīto izteiksmi:

$$\frac{\sqrt{x-2012}-\sqrt{x-2010}}{-2}+\frac{\sqrt{x-2010}-\sqrt{x-2008}}{-2}+\ldots+$$

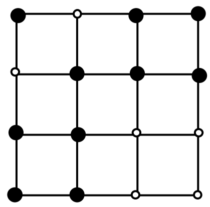
$$+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{-2}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{x+2010}-\sqrt{x+2012}}{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pareizinot abas puses ar 2 un saīsinot vienādos locekļus:

$$\sqrt{x+2012}-\sqrt{x-2012}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x+2012}=\sqrt{x-2012}+\sqrt{2}$$
$$x+2012=x-2012+2\sqrt{2(x-2012)}+2$$
$$4022=2\sqrt{2(x-2012)}$$
$$2011^2=2(x-2012)$$
$$x=\frac{2011^2}{2}+2012=2024072{,}5.$$

11.4. Izliekta 2012-stūra iekšējo leņķu summa ir $2010\cdot 2\pi$. Tos ir jānoklāj ar 200 12-stūru leņķiem, kuru kopējais lielums ir $200\cdot 10\cdot 2\pi<2010\cdot 2\pi$. Tātad prasīto izdarīt nav iespējms.

11.5. Tas, ka 10 punktus var nokrāsot redzams piem. 19. zīmējumā.
Atliek pamatot, ka, ja nokrāsosim 11 punktus, tad noteikti atradīsies *labs* taisnstūris ar visām nokrāsotām virsotnēm. Ja ir nokrāsoti 11 punkti tad ir divas iespējas:



19. zīm.

A) ir kāda rinda, kur ir nokrāsoti 4 punkti,
B) nav tādas rindas.

A) gadījumā noteikti vēl ir rinda, kurā ir nokrāsoti vismaz 3 punkti, tad no šīm abām rindām noteikti var izvēlēties *labu* taisnstūri, kuram visas virsotnes ir nokrāsotas (ņemam vai nu divus vidējos, vai malējos punktus (tos, kuri abi ir nokrāsoti) no tās rindas, kur ir 3 nokrāsoti punkti un tos pašus no tās rindas, kur ir 4).

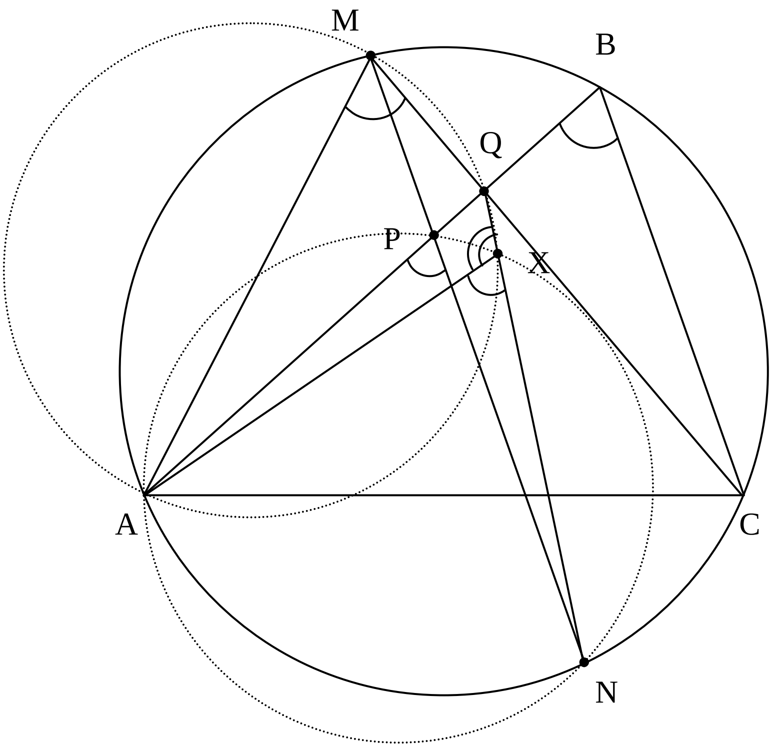
B) gadījumā, ja katrā rindā ir ne vairāk kā 3 nokrāsoti punkti, tad ir vismaz 3 rindas, kurās ir vismaz 3 nokrāsoti punkti. Tātad būs vai nu augšējā un apakšējā, vai divas vidējās rindas ar 3 nokrāsotiem punktiem. Tad no šīm divām rindām var izvēlēties *labu* taisnstūri, kuram visas virsotnes ir nokrāsotas – jāņem tās divas kolonas, kurās abām šīm rindām ir nokrāsoti punkti.

12.1. Apzīmēsim vienu no dotajiem septiņciparu skaitļiem ar *A*, bet otru – ar *B*. Tā kā abu skaitļu decimālais pieraksts sastāv no vieniem un tiem pašiem cipariem, to ciparu summas ir vienādas ar 28, tad *A* un *B*, dalot ar 9, dod vienādu atlikumu 1, t.i. $A=9N+1$ un $B=9M+1$, *N* un *M* – naturāli skaitļi. Pieņemsim, ka $A=kB$, kur *k* naturāls skaitlis un $2\le k\le 7$ (*k* nepārsniedz 7, jo skaitļi *A* un *B* abi ir septiņciparu skaitļi, un *A* pirmais cipars nepārsniedz 7). Skaitlis $kB=k(9M+1)=9kM+k$, dalot ar 9, dod atlikumu $k\ne 1$, tātad $kB\ne A$, k.b.j.

Piezīme. Atrisinājumu var pierakstīt īsāk, lietojot kongruences: $A\equiv B\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,9)$, bet $kB\equiv k\ (\mathrm{mod}\,9)$. Ja $A=nB$, tad $1\equiv k\ (\mathrm{mod}\,9)$. Tā kā $2\le k\le 7$, iegūta pretruna.

12.2. Apzīmēsim ΔAMQ un ΔAPN apvilkto riņķa līniju krustošanās punktu ar X (skat. 20. zīm.). Lai pierādītu, ka X atrodas uz nogriežņa QN, pietiek parādīt, ka $\angle\mathrm{AXQ}+\angle\mathrm{AXN}=180°$.

$\angle\mathrm{APN}=\angle\mathrm{ABC}$, jo $\mathrm{MN}\parallel\mathrm{BC}$. Savukārt $\angle\mathrm{AXN}=\angle\mathrm{APN}$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku. Kā ievilktie leņķi ir vienādi arī $\angle\mathrm{AMC}=\angle\mathrm{ABC}$. Bet tā kā A, M, Q, X atrodas uz riņķa līnijas, tad $\angle\mathrm{AXQ}=180°-\angle\mathrm{AMC}$. Ieguvām, ka $\angle\mathrm{AXN}=\angle\mathrm{ABC}$ un $\angle\mathrm{AXQ}=180°-\angle\mathrm{ABC}$. To summa ir vienāda ar $180°$, k.b.j.



20. zīm.

12.3. Ja $x<1$ vai $x>3$, tad izteiksmes $\lg x \cdot \lg(4-x)$ vērtība ir vai nu negatīva vai vispār neeksistē, ja $1 \le x \le 3$, tad arī $1 \le 4-x \le 3$ un $\lg x \cdot \lg(4-x) \le \lg(3) \cdot \lg(3) < \frac{1}{4}$, jo $3 < \sqrt{10}$.

Tātad dotajam vienādojumam atrisinājuma nav.

12.4. **a)** Jā; der, piemēram, oktaedra virsotnes.
b) Jā; der, piemēram, regulāras trijstūra prizmas, kuras sānu skaldnes ir kvadrāti, virsotnes un tai apvilktās sfēras centrs.

12.5. **Atbilde:** pietiek ar 5 dienām. Piemēram, 1. dienā pie tāfeles tika izsaukti 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. un 8. skolēni, 2. dienā – 1., 2., 3., 4., 9., 10., 11. un 12. skolēni, 3. dienā – 1., 2., 5., 6., 9., 10., 13. un 14. skolēni, 4. dienā – 1., 3., 5., 7., 9., 11., 13. un 15. skolēni, 5. dienā – 17. skolēns.
Pamatosim, ka ar mazāk dienām nepietiek. Teiksim, ka vairāki skolēni ir *vienādā pozīcijā*, ja vienā dienā tie visi bija izsaukti pie tāfeles vai arī visi nebija pie tāfeles. Pēc 1. dienas būs vismaz 9 skolēni *vienādā pozīcijā*. (Izvēloties jebkurus divus no šiem skolēniem, tie neapmierina uzdevuma nosacījumus.). 2. dienā no šīs grupas skolēniem daži (vai neviens) tika izsaukti pie tāfeles, taču paliek vismaz 5 skolēni, kas abās dienas bija *vienādā pozīcijā*. Savukārt pēc trīs dienām noteikti būs vismaz 3 skolēni, kas visās dienās bija *vienādā pozīcijā*, bet pēc 4. dienas joprojām varēs atrast vismaz 2 skolēnus, kas visas četras dienas bija *vienādā pozīcijā*. Izvēloties šo skolēnu pāri, tam nevarēs atrast dienu, kad viens bija pie tāfeles, bet otrs – nē. Tātad ar 4 dienām nepietiek.