5.1. Ievērosim, ka $EEE = E \cdot 111 = E \cdot 3 \cdot 37$. Tātad E>3, lai pie tam viens no skaitļiem AB vai CD ir 37 vai 74. Apskatot visas iespējamās E vērtības, iegūstam visus astoņus atrisinājumus:

***E*=4 ⇒ *AB*=12 un *CD*=37 vai *AB*=37 un *CD*=12**;

E=5 ⇒ *B*=5 vai *D*=5 (=*E*) – neder;

***E*=6 ⇒ *AB*=18 un *CD*=37 vai *AB*=37 un *CD*=18**;

E=7 ⇒ *AB*=21 un *CD*=37 (*D*=*E*) vai *AB*=37 un *CD*=21 (*B*=*E*) – neder;

***E*=8 ⇒ *AB*=24 un *CD*=37 vai *AB*=37 un *CD*=24, vai *AB*=12 un *CD*=74, vai *AB*=74 un *CD*=12**;

E=9 ⇒ *AB*=27 un *CD*=37 vai *AB*=37 un *CD*=27 (*B*=*D*) – neder.

5.2. Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas apakšējā rūtiņā ar x (skat. 1. zīm.). Tad katras rindas, kolonnas un diagonāles skaitļu summas ir $26+x$. Tālāk 1. zīm. parādīts, kā pakāpeniski tiek izdarīti secinājumi par katru tabulas rūtiņu.

	15	
	11	
	x	18

⇒

	15	
	11	
8	x	18

⇒

	15	$7+x$
	11	
8	x	18

⇒

	15	$7+x$
	11	1
8	x	18

⇒

x-3	15	$7+x$
	11	1
8	x	18

⇒

x-3	15	$7+x$
21	11	1
8	x	18

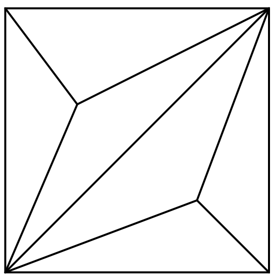
1. zīm.

Iegūstam, ka otrajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir 33. Tātad $x=7$ un aizpildītā tabula parādīta 2. zīm.

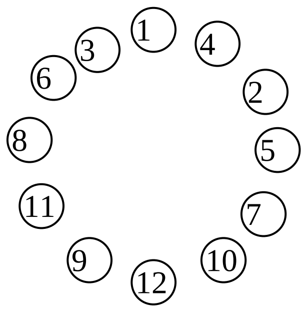
4	15	14
21	11	1
8	7	18

2. zīm.

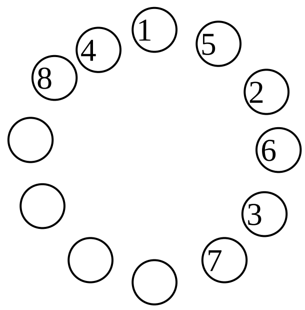
5.3. Jā, var; skat., piem., 3. zīm.



3. zīm.



4. zīm.

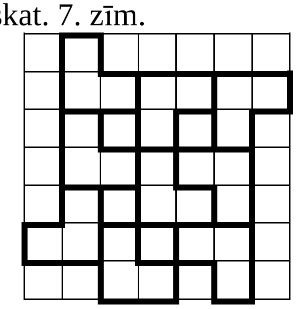


5. zīm.

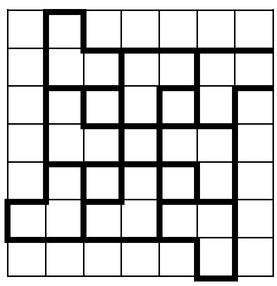
5.4. a) Jā, var. Skat., piem., 4. zīm.

b) Nē, nevar. Skaitlim 1 var būt tikai divi kaimiņi: 4 un 5, skaitlim 2 kaimiņi var būt tikai skaitļi 5 un 6, bet skaitlim 3 – skaitļi 6 un 7. Ņemot vērā šos secinājumus, iegūstam ka 5. zīm. attēloto situāciju. Neizvietoti palikuši skaitļi 9, 10, 11, 12, taču tos šajā aplī atbilstoši uzdevuma nosacījumiem izvietot nevar.

5.5. a) skat. 6. zīm.; **b)** skat. 7. zīm.



6. zīm.



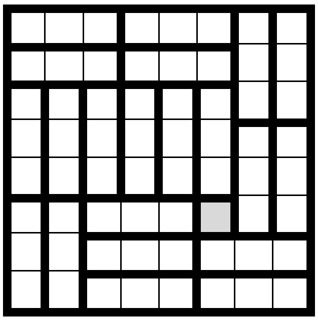
7. zīm.

6.1. Atbilde: nē.

Ja *a* vai *b* ir pāra skaitlis; ja gan *a*, gan *b* ir nepāra skaitļi, tad to summa *a*+*b* ir pāra skaitlis. tātad reizinājums $a \cdot b \cdot (a+b)$ vienmēr ir pāra skaitlis, bet 20102011 nav pāra skaitlis.

6.2. Aprēķināsim, cik „sarakstes” pavisam notiek. Ja kungu skaitu apzīmē ar *a*, bet dāmu skaitu ar *b*, tad ir spēkā sakarības *a*+*b*=60 un 17*a*=13*b*. Tātad *a* dalās ar 13. Pārbaudot vērtības *a*=13 (tad *b*=17, bet *a*+*b*=30<60), *a*=26 (tad *b*=34 un *a*+*b*=60 – der), *a*>26 (tad *b*>34 un *a*+*b*>60), redzam, ka visus uzdevuma nosacījumus apmierina tikai ***a*=26** (kungi) un ***b*=34** (dāmas).

6.3. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas var izvietot 21 taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas. (skat. 8. zīm.). Katrā no šiem taisnstūriem ir jābūt vismaz vienai zaļai rūtiņai. Tātad ir nepieciešams nokrāsot vismaz 21 rūtiņu.



8. zīm.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

9. zīm.

Parādīsim, ka ar 21 rūtiņu pietiek. Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1 ,2 vai 3 tā, ka katrā 1×3 rūtiņu grupā būtu ierakstīti visi skaitļi (skat. 9. zīm). Nokrāsojot zaļas visas rūtiņas, kurās ierakstīts 1 (tādu ir 21), iegūsim situāciju, ka nebūs iespējams izvēlēties neaizkrāsotu 1×3 rūtiņu grupu.

6.4. Aplūkosim, kā mainās tabulas skaitļu kopsumma pēc viena gājiena izpildes. Ja pirms gājiena visu skaitļu summa bija *S*, tad pēc gājiena tā ir $S-a-b+(5a-2b)+(5b-2a)=S+2(a+b)$. Tātad summa ir izmainījusies par pāra skaitli. Tā kā sākumā tabulā visu skaitļu kopsumma ir pāra skaitlis 4, tad tā pēc vairāku gājienu izpildes nevar kļūt vienāda ar nepāra skaitli 15.

6.5. Atbilde: Almai un Danai sākuma bija pa 14 konfektēm, Betai 50.

Pieņemsim, ka Almai un Danai sākumā bija *a* konfektes. Tabulā apkoposim informāciju par konfekšu skaita izmaiņām.

	Almai	Betai	Danai
Beta pazaudēja 1 konfekti	a	49	a
Alma atdeva pusi Betai	$\frac{a}{2}$	$49+\frac{a}{2}=\frac{98+a}{2}$	a
Beta atdeva pusi Danai	$\frac{a}{2}$	$\frac{98+a}{4}$	$a+\frac{98+a}{4}=\frac{5a+98}{4}$
Dana atdeva pusi Almai	$\frac{a}{2}+\frac{5a+98}{8}=\frac{9a+98}{8}$	$\frac{98+a}{4}$	$\frac{5a+98}{8}$

Tātad $\frac{9a+98}{8}=\frac{98+a}{4} \Rightarrow 9a+98=196+2a \Rightarrow 7a=98 \Rightarrow a$=14.

7.1. Pirmskaitļi var beigties ar ciparu 1, 2 (tikai skaitlis 2), 3, 5 (tikai skaitlis 5), 7 un 9. Tā kā ir uzrakstīti seši skaitļi, tad starp šiem skaitļiem ir jāparādās visiem pēdējiem cipariem. Tas nozīmē, ka virknē ir skaitļi 2 un 5.

Tā kā mazākie pirmskaitļi ir 2, 3 un 5, tad mazākie skaitļi, kas uzrakstīti uz tāfeles ir vai nu **I)** 2, 3 un 5 vai **II)** 2 un 5.

I) sestais skaitlis ir 5 + 14 = 19. Bet tad ceturtais skaitlis nevar sākties ar 3.

II) ceturtais skaitlis sākas ar 5. Pirmskaitļi, kas sākas ar 5, ir 53 un 59. Ja ceturtais skaitlis ir 53, tad virkne izskatās šādi: 2, 5, x, 53, y, x+14. Vienīgā derīgā x vērtība ir 47. Bet tad x+14=61 un y (piektais virknes loceklis) nevar sākties ar 6.

Ja ceturtais skaitlis ir 59, tad virkne izskatās šādi: 2, 5, x, 59, y, x+14. x=47 neder iepriekšminētā iemesla dēļ. Atliek x=53. Iegūstam : 2, 5, 53, 59, y, 67. Vienīgā iespējamā y vērtība ir 61 un visa virkne: **2, 5, 53, 59, 61, 67**.

7.2. **a)** Var. Ar $2s$ apzīmēsim attālumu starp pilsētām, ar t_1 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa pirmo pusi, ar t_2 – laiku, kādā zaļā automašīna veica ceļa otro pusi.

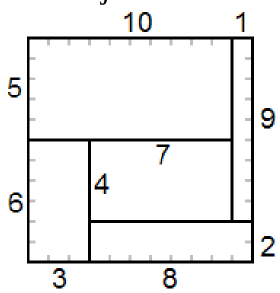
Tad $\frac{s}{t_1}=30$ km/h jeb $s=30t_1$; $\frac{2s}{t_1+t_2}=40$ jeb $2s=40t_1+40t_2$, t.i., $s=20t_1+20t_2$.

Tātad $30t_1=20t_1+20t_2$ un $t_2=\frac{1}{2}t_1$, tāpēc $\frac{s}{t_2}=2\cdot\frac{s}{t_1}=2\cdot 30=60$ km/h

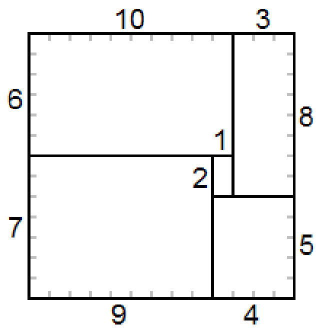
b) Nevar. Brīdī, kad zaļā automašīna ir veikusi pusi ceļa, sarkanā automašīna jau ir veikusi visu ceļu un atrodas pilsētā B. Tātad zaļajai automašīnai ceļa otrā puse būtu jāveic momentāni (0 stundās), kas nav iespējams.

7.3. Tāds skaitlis ir $2010\cdot 10+13=2011\cdot 10+3=20113$.

7.4. Kvadrāta malas garumam jābūt 11 vai 13. Piemērus skat. 10. un 11. zīm.



10. zīm.



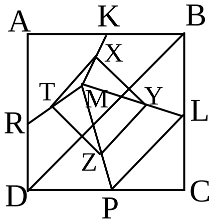
11. zīm.

7.5. Izvēlamies 11 punktus tā, lai attālumi starp katriem diviem no tiem būtu veseli skaitļi. Saskaņā ar Dirihlē principu vismaz 2 no tiem ir vienā krāsā, tie ir meklētie punkti.

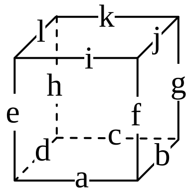
8.1. **a)** Piem., $8-3+5\cdot 2=15$

b) Piem., $8:(3-5:2)=16$

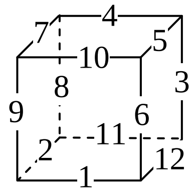
8.2. No viduslīniju īpašības trijstūros MZY un BCD seko $ZY=\frac{1}{2}PL=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BD\right)=\frac{1}{4}BD$ (skat. 12. zīm.), līdzīgi $TX=\frac{1}{4}BD=ZY$, pie tam ZY||TX. Līdzīgi pierāda, ka XY||ZT un $TZ=XY=\frac{1}{4}AC$. Bet AC=BD, tātad TZ=XY=ZY=TX un TXYZ ir rombs. Tā kā BD⊥AC un TX||BD, XY||C, tad TX⊥XY un TXYZ ir kvadrāts, k.b.j.



12. zīm.



13.a) zīm.



13.b) zīm.

8.3. Apzīmēsim ierakstos skaitļus kā parādīts 13. a) zīm. Tad

$S=a+b+c+d$

$S=a+e+i+f$

$S = b + g + j + f$
$S = c + g + k + h$
$S = d + h + l + e$
$S = i + j + k + l$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$6S = 2(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l) = 2\cdot\frac{(1+12)\cdot 12}{2} = 12\cdot 13 \text{ un } S=26.$$

13. b) zīm. parādīts piemērs, kā to realizēt.

8.4. **a)** Nē, piemēram, ja Leonards izvēlējās skaitli 444, tad viņš ieguva 888444, bet tas nedalās ar 17 (888444:17=52261 atlikumā 7).

Vispār jebkurš trīsciparu skaitlis, kas nedalās ar 17, der kā pretpiemērs.

b) Jā. Apzīmēsim sākotnējo skaitli ar *x*. Skaitlim2*x* pierakstīt galā *x* ir tas pats, kas skaitlim 2*x* pierakstīt galā trīs nulles un tad tam pieskaitīt *x*. Bet trīs nulles pierakstīt ir tas pats, kas pareizināt ar 1000. Tātad Leonarda veikto operāciju var uzrakstīt kā:

$$2x\cdot 1000 + x$$

Tātad jauniegūtais skaitlis ir $2x\cdot 1000 + x = 2001x$. Skaitlis 2001 dalās ar 23 (2001:23=87), tātad arī jauniegūtais skaitlis 2001*x* noteikti dalās ar 23.

8.5. Uzvar pirmais spēlētājs, katrā gājienā atņemot no skaitļa tā pēdējo ciparu, tādējādi pēc sava gājiena iegūstot skaitli, kura pēdējais cipars ir 0. Tā kā otrais spēlētājs nedrīkst atņemt 0, tad pēc viņa gājiena noteikti paliek skaitlis, kura pēdējais cipars nav 0. Tāpēc pirmais spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu. Tā kā tiek iegūti tikai naturāli skaitļi un spēles gaitā tie samazinās, kādreiz tiks iegūts arī skaitlis 0. Tā kā tā pēdējais cipars ir 0, tas tiks iegūts pēc pirmā spēlētāja gājiena.

9.1. Vienādojumu var pārveidot kā:

$$\frac{1}{x^2+24} - \frac{1}{xy+24} = \frac{1}{xy+24} - \frac{1}{y^2+24}.$$

Abās pusēs vienādojot saucējus iegūst:

$$\frac{xy+24-x^2-24}{(x^2+24)(xy+24)} = \frac{y^2+24-xy-24}{(y^2+24)(xy+24)} \text{ jeb}$$

$$\frac{x(y-x)}{(x^2+24)(xy+24)} = \frac{y(y-x)}{(y^2+24)(xy+24)}$$

Izdalot abas puses ar (*y*-*x*) (to var darīt, jo $x\neq y$) un pareizinot ar $(xy+24)(x^2+24)(y^2+24)$ iegūst

$$x(y^2+24) = y(x^2+24)$$

Pārnesot visu uz vienu pusi iegūst

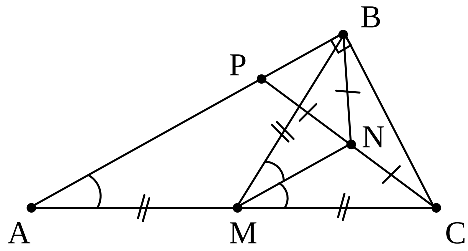
$$xy^2 - x^2y + 24x - 24y = 0$$

Sagrupējot iegūst

$$xy(y-x) - 24(y-x) = 0 \text{ jeb } (xy-24)(y-x) = 0$$

Tā kā $x\neq y$, tad $xy=24$. Šim vienādojumam naturālos skaitļos ir 8 atrisinājumi:
$x=1, y=24$; $x=2, y=12$; $x=3, y=8$; $x=4, y=6$; $x=6, y=4$; $x=8, y=3$; $x=12, y=2$; $x=24, y=1$.
Pārbaude (simetrijas pēc var pārbaudīt tikai pirmos četrus) liecina, ka visi der.

9.2. Tā kā ΔABC un ΔPBC ir taisnleņķa, AM=BM=CM un PN=BN=CN (skat. 14. zīm.). Tāpēc ΔMBN=ΔMCN (pazīme *mmm*) un ∠BMN=∠CMN, jo vienādos trijstūros pret vienādām malām ir vienādi leņķi. MN ir ΔAPC viduslīnija, tāpēc AP||MN un ∠CMN=∠CAP kā kāpšļu leņķi. Tātad, ∠BMN=∠CMN=∠CAP=∠BAC, k.b.j.



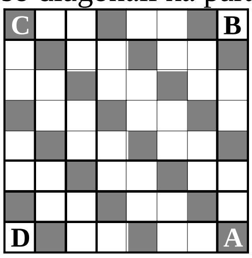
14. zīm.

9.3. Atbilde: Jā, var.

Atrisinājums. Aplūkosim vienādojumu ax^2-bx+c=0. Ievietojot x=-1 iegūst a+b+c=0. Tātad ja a+b+c=0, tad x=-1 ir šī vienādojuma sakne. Ja pirmais rūķītis izvēlas tādus 3 skaitļus, kuru summa ir 0, tad, lai kā otrais rūķītis tos saliktu „#" vietās, vienādojumam noteikti būs vismaz viena racionāla sakne x=-1.

9.4. x^2-y^2=N. Ja N-pāru, tad (x-y) un (x+y) ir vienāda paritāte un N jādalās ar 4. Tātad, lielākais pēc kārtas sekojošu šādu skaitļu skaits ir trīs: 4k-1, 4k, 4k+1.
Piemēram, 11=6^2-5^2, 12=4^2-2^2 un 13=7^2-6^2.

9.5. Izkrāsosim dotajā taisnstūrī katru trešo diagonāli kā parādīts 15. zīmējumā.



15. zīm.

Ievērosim, ka *sienāzis*, izpildot atļautos gājienus, no melnas rūtiņas var nonākt **tikai** melnā rūtiņā. Tātad no rūtiņas **A** viņš nekad nenonāks rūtiņās **B** un **D**. Savukārt rūtiņā **C** var nokļūt, ejot uz augšu pa diagonāli AC.

10.1. Pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi veido aritmētisku progresiju ar diferenci 1. Tās n pēc kārtas ņemtu locekļu a, a+1,…, a+n-1 summa ir $\frac{(a+a+n-1)\cdot n}{2}=\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}$. Tātad nepieciešams atrast visas tādas n vērtības, kurām n>1 un $\frac{(2a+n-1)\cdot n}{2}=2011$ jeb $(2a+n-1)\cdot n=4022$. Ievērosim, ka reizinātājs 2a+n+1 vienmēr ir lielāks par otro reizinātāju n un tiem ir atšķirīga paritāte.
Sadalīsim 4022 pirmreizinātājos: 4022=2·2011. Ņemot vērā augstāk minētos secinājumus, iespējams tikai gadījums n=2 un 2a+n-1=2011, tātad virknes pirmais loceklis a=1005. Tātad 2011 kā vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt vienā vienīgā veidā.

10.2. Tā kā ABC un ABD ir taisnleņķa trīsstūri, tad ap četrstūri ACBD var apvilkt riņķa līniju (tās diametrs ir AB). Tā kā CD ir $\angle$ACB bisektrise, tad $\angle$ACD un $\angle$BCD ir divi vienādi ievilkti leņķi. Tātad AD=BD un ΔABD ir vienādsānu taisnleņķa trīsstūris, kura hipotenūzas garums ir 10cm². $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=5\sqrt{2}$ un $\mathrm{S}_{\mathrm{ABD}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{2}=25\ \mathrm{cm}^2$.

10.3. Vienādojumam $a^2=b^2$ vispārīgā gadījumā iespējami divi atrisinājumi: $a=b$ un $a=-b$.
Aplūko pirmo vienādojumu un iztirzā abus iespējamos variantus:
1) $x-y=z-2 \Rightarrow z-x=2-y$ (*)

Ievietojot (*) trešajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$(2-y)^2=(y-6)^2$,

kura vienīgais atrisinājums ir y=4.

Tad no (*) iegūstam $z=x-2$ un $y-z=6-x$. Ievietojot to otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$(6-x)^2=(x-4)^2$,

kura vienīgais atrisinājums ir x=5, tātad z=3.

2) $x-y=2-z \Rightarrow y-z=x-2$ (**)

Ievietojot (**) otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$(x-2)^2=(x-4)^2$,

kura vienīgais atrisinājums ir x=3.

Tad no (**) iegūstam $y=z+1$ un $y-6=z-5$. Ievietojot to trešajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$(z-3)^2=(z-5)^2$,

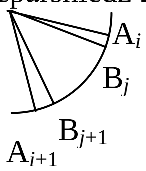
kura vienīgais atrisinājums ir z=4, tātad y=5.

Tātad vienādojumam ir divi atrisinājumi:

$$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases} \text{un} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}.$$

Pārbaude parāda, ka abi atrisinājumi der.

10.4. Būs divas tādas desmitstūra virsotnes B_j un B_{j+1}, kas pieder lokam A_iA_{i+1}, ko veido divas deviņstūra virsotnes (skat. 16. zīm.). Deviņstūra virsotnes sadala riņķa līniju 40° lielos lokos, bet 10-stūra virsotnes 36° lielos lokos, pie tam visas deviņstūra un 10-stūra virsotnes ir dažādas (jo riņķa līnija sadalīta 19 lokos). Tātad $\cup A_iB_j + \cup B_{j+1}A_{i+1} = 4°$, no kurienes seko ka vismaz viens no šiem lokiem nepārsniedz 2°.



16. zīm.

10.5. **a)** nē, nav iespējams. Izkrāsojot vienības kubiņus pamīšu melnā un baltā krāsā (tā, ka kubiņi, kam ir kopīga skaldne, nokrāsoti dažādās krāsās), augšējo kubiņu – melnu, iegūstam, ka melnie kubiņi ir 16, bet baltie – 14. Taču *klucītis* satur tieši vienu melnu un 1 baltu kubiņu – pretruna.

b) Skat., piem., 17. zīm. (zīmējumā pa slāņiem attēlots, kurš vienības kubiņš pieder kuram *stūrītim*.

8	8	4	7
6	8	7	7
6	9	5	10
9	9	10	10

3	3	4
2	3	4
6	5	5

1	1
2	2

1

17. zīm.

11.1. Uzrakstīsim katrai virknei vispārīgā elementa formulu:

(1) $1+14k$,

(2) $2+15l$,

(3) $3+16m$.

Atradīsim skaitļus, kas pieder virknēm (1) un (2):

$1+14k=2+15l$

$14k = 1 + (14l + l) \Rightarrow l + 1$ jādalās ar 14.

Mazākās derīgās vērtības ir l=13, k=14. Tātad pirmajām divām virknēm pieder skaitļi, kas izsakāmi formā

$197 + 210u$ (210=MKD(14, 15)).

Visām trim virknēm piederēs skaitļi, kuriem

$197 + 210u = 3 + 16m$ jeb

$8m = 97 + 105u = (8 \cdot 12 + 1) + (8 \cdot 13 + 1)u$.

Tātad $1 + u$ jādalās ar 8. Mazākā derīgā u vērtība ir 7.

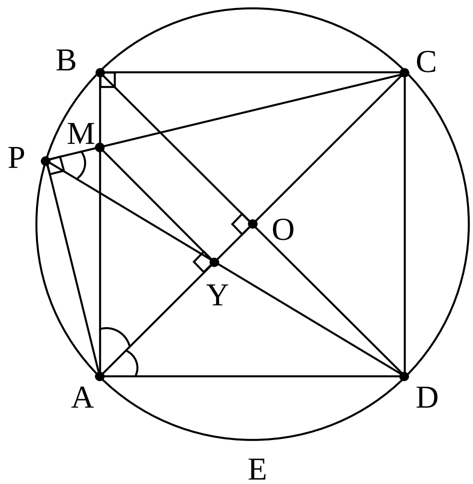
Tātad mazākais skaitlis, kas pieder visām trim virknēm ir **1667**.

Vispārīgā formā visām virknēm kopīgie locekļi ir izsakāmi formā

$1667 + 1680p$ (1680=MKD(14,15,16)). Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī asprātīgāk, pamanot, ka „iepriekšējais” (jeb 0-tais) loceklis visās virknēs būtu vienāds ar -13. Atliek atrast visu virkņu diferenču mazāko kopīgo dalāmo un pirmo locekli.

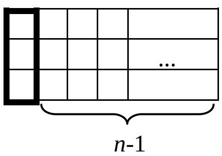
11.2. $\angle CPD = \angle CAD$, jo tie balstās uz viena loka (skat. 18. zīm.). Savukārt $\angle CAD = \angle BAC = 45°$, tāpēc $\angle CPD = \angle BAC$ vai arī $\angle MPY = \angle MAY$. Tāpēc ap A, P, M un Y var apvilkt riņķa līniju (1). $90° = \angle APC = \angle ABC$, jo šie leņķi arī balstās uz viena loka. No (1) seko, ka $\angle AYM = 180° - \angle APM = 180° - \angle APC = 90°$. Tā kā $\angle AOB = 90°$, tad $MY \parallel BO$. Līdzīgi pierāda, ka $NX \parallel AO$. Tad QXOY ir paralelograms ar vienu leņķi $90°$, t.i., taisnstūris, k.b.j.



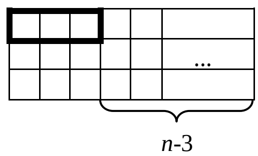
18. zīm.

11.3. Ar f_n apzīmēsim cik veidos taisnstūri $3 \times n$ var sadalīt taisnstūros 1×3.

$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2$.



19. a) zīm.



19. b) zīm.

Apskatām taisnstūri ar izmēriem 3×n. Pirmo taisnstūrīti 1×3 varam novietot a) „vertikāli” (skat. 19. a) zīm.) vai b) „horizontāli” (skat. 19. b) zīm.). a) gadījumā neaizpildīts paliek taisnstūris 3×(n-1), ko var aizpildīt f_{n-1} veidos. b) gadījumā vēl divi taisnstūrīši 1×3 jānovieto „horizontāli” (nevienu „vertikāli” ievietot nav iespējams), tad neaizpildīts paliks taisnstūris 3×(n-3), ko var aizpildīt f_{n-3} veidos.

Tātad $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$.Izmantojot šo rekursīvo sakarību viegli aprēķināt, ka $f_{12} = 70$.

11.4. Pārveidojam doto vienādojumu, pareizinot ar saucējam saistīto izteiksmi:

$$\frac{\sqrt{x-2011}-\sqrt{x-2009}}{-2}+\frac{\sqrt{x-2009}-\sqrt{x-2007}}{-2}+\ldots$$
$$+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{x+209}-\sqrt{x+2011}}{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pareizinot abas puses ar 2 un saīsinot vienādos locekļus:

$\sqrt{x+2011}-\sqrt{x-2011}=\sqrt{2}$

$\sqrt{x+2011}=\sqrt{x-2011}+\sqrt{2}$

$x+2011=x-2011+2\sqrt{2(x-2011)}+2$

$4020=2\sqrt{2(x-2011)}$

$2010^2=2(x-2011)$

$x=\frac{2010^2}{2}+2011=2010\cdot 1005+2011=2022061.$

11.5. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka skaitļi pa apli uzrakstīti secībā a_1, a_2, ..., a_{2011}, pie tam a_1 kopējais pirmreizinātāju skaits ir pāra skaitlis. Tā kā blakusesošo skaitļu dalījums ir pirmskaitlis, tad to kopējais pirmreizinātāju skaits atšķiras tieši par 1. Tātad skaitļiem a_1, a_3, a_5, ..., a_{2011} ir pāra skaits pirmreizinātāju, bet skaitļiem a_2, a_4, ..., a_{2010} – nepāra skaits pirmreizinātāju. Tā kā abiem skaitļiem a_1 un a_{2011} pirmreizinātāju skaits ir pāra skaitlis, to dalījums būs vai nu 1, vai salikts skaitlis, kas satur pāra skaitu (vismaz divus) pirmreizinātājus.

12.1. a) Atbilde: var.

Piemēram, 17 (1+7+9), 17 (3+6+8) un 11 (2+4+5) vai 11 (1+3+7), 11 (2+4+5) un 23 (6+8+9), ...

b) Atbilde: nevar.

Aplūkosim, kādas var būt grupu summas. Katrai summai jābūt lielākai par 6 (1+2+3) un mazākai nekā 24 (7+8+9). Šajā intervālā ietilpst pirmskaitļi 7, 11, 13, 17, 19 un 23. Visu skaitļu summa ir vienāda ar skaitļu no 1 līdz 9 summu, t.i. 45.

Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 7, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt 38. Vienīgais variants ir 19+19, kas neatbilst prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 7 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.

Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 11, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt 34. Iespējamie varianti ir 11+23 un 17+17, kas neatbilst prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 11 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.

Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 13, tad atlikušo divu grupu skaitļu summai ir jābūt 32. Vienīgais variants ir 13+19, kas neatbilst prasībai, ka summām jābūt atšķirīgām. Tātad 13 nevar būt nevienas grupas skaitļu summa.

Ja vismazākā vienas grupas skaitļu summa ir 17, tad visu grupu summa pārsniedz 51, kas ir vairāk nekā visu skaitļu summa.

12.2. Atbilde: vislielākā vērtība ir 1 un vismazākā 2^{-18}.

Pamatojums:

a) Tā kā $0\le\sin^2 x\le 1$, tad arī $0\le\sin^{36} x\le 1$ un analogi arī $0\le\cos^{36} x\le 1$, tāpēc

$\sin^{38} x+\cos^{38} x\le \sin^2 x\sin^{36} x+\cos^2 x\cos^{36} x\le \sin^2 x+\cos^2 x=1$

Ja $x=0$, tad $\sin^{38} x+\cos^{38} x=1$, tātad šī vērtība tiek sasniegta.

b) Pierādīsim, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās nevienādība $\sin^{2n} x+\cos^{2n} x\ge 2^{1-n}$. To var izdarīt ar matemātisko indukciju.

Bāze: $n=1$, ievietojot iegūst $\sin^2 x+\cos^2 x\ge 2^0=1$, nevienādība ir pareiza.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka apgalvojums jau ir pierādīts pie $n=k$, un pierādīsim, ka tas ir spēkā arī pie $n=k+1$. Tātad, pieņemsim, ka $\sin^{2k} x+\cos^{2k} x\ge 2^{1-k}$, un pierādīsim, ka

$\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x \geq \frac{1}{2}(\sin^{2k} x + \cos^{2k} x)$, no tā tad acīmredzami sekos prasītais.

Pareizinot kreiso pusi ar 2, bet labo - ar 2($\sin^2 x + \cos^2 x$) iegūst:

$2\sin^{2k+2} x \sin^2 x + 2\cos^{2k+2} x \cos^2 x \geq \sin^{2k} x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^{2k} x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

Pārnesot visu uz kreiso pusi, iegūst:

$\sin^{2k} x \sin^2 x - \sin^{2k} x \cos^2 x - \cos^{2k} x \sin^2 x + \cos^{2k} x \cos^2 x \geq 0$

ko sagrupējot iegūst:

$(\sin^{2k} x - \cos^{2k} x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \geq 0$,

kas ir pareiza nevienādība, jo abas iekavas ir vai nu pozitīvas, vai negatīvas.

Tātad $\sin^{38} x + \cos^{38} x \geq 2^{-18}$. Šī vērtība tiek sasniegta, piemēram, ja $x=y=\pi/4$. Tad

$\sin^{38}\frac{\pi}{4} + \cos^{38}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{2^{18}}$.

12.3. 1. risinājums. No bisektrises īpašībām seko, ka $\frac{AO}{BO} = \frac{AM}{BM}$. No hordu īpašības seko $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ jeb $\frac{AO}{BO} = \frac{OD}{OC}$. Tas nozīmē, ka $\frac{AM}{BM} = \frac{OD}{OC}$. Tā kā AM=OD, tad BM=OC, k.b.j.

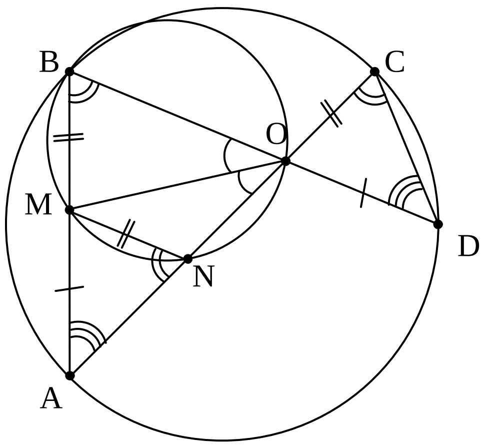
2. risinājums. Apvilksim ap M, B un O riņķa līniju, kas krusto AO punktā N (skat. 19. zīm.). $\angle ABD = \angle ACD$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku. $\angle ANM = 180° - (180° - \angle ABO) = \angle ABO$. Tātad

$\angle ANM = \angle ACD$ (1).

Tāpat

$\angle BAC = \angle BDC$ (2)

kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku. No (1), (2) un no tā, ka AM=OD, seko, ka $\Delta AMN = \Delta DOC$ (pazīme *lml*). Tas nozīmē, ka MN=OC. Bet tā kā OM ir bisektrise, tad MN=BM. Tātad, BM=MN=OC, k.b.j.



19. zīm.

12.4. Jā; piemēram, der oktaedra virsotnes.

12.5. Apskatām skaitļus $N=9000$, $x = \frac{1}{N}$ un $y = \frac{1}{N^N}$. Tad

$$x^y + y^x + x + y = \left(\frac{1}{N}\right)^y + \left(\frac{1}{N^N}\right)^{\frac{1}{N}} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^N} = \left(\frac{1}{N}\right)^y + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^N}.$$

Tā kā $\frac{1}{N} \in (0;1)$, tad arī $\left(\frac{1}{N}\right)^y \in (0;1)$. Tāpēc

$$x^y + y^x + x + y < 1 + \frac{2}{N} + \frac{1}{N^N} < 1 + \frac{2}{9000} + \frac{1}{9000} = 1 + \frac{1}{3000} < 1 + \frac{1}{2011}.$$